Р.И.Фрейдзон

ХАРАКТЕРИСТИКА СЛОЖНОСТИ РЕКУРСИВНЫХ ПРЕДИКАТОВ, НЕ ЗАВИСЯЩАЯ ОТ СТАНДАРТИЗАЦИИ ПОНЯТИЯ АЛГОРИФМА*)

В заметке рассматриваются одноместные рекурсивные предикаты, заданные на множестве всех слов в некотором фиксированном алфавите. Вводится понятие λ -сложности рекурсивного предиката и устанавливается связь между λ -сложностью предиката и сложностью его распознавания многоленточными машинами Тьюринга с входом (м.м.т.). Формулируются достаточные условия нераспознаваемости рекурсивного предиката в реальном времени и строится простой пример нераспознаваемого в реальном времени примитивно рекурсивного предиката.

Пусть A – некоторый фиксированный алфавит. Под "словами" в дальнейшем будем понимать "слова в алфавите A ", через $\ell(P)$ будем обозначать длину слова P , символ $\leftrightharpoons$ будет заменять слова "вводится в качестве обозначения".

Пусть S – рекурсивный предикат, заданный на множестве всех слов в алфавите A

$$S_P^m \leftrightharpoons \{X : PX \in S \ \& \ \ell(X) \leq m\},$$

где P – слово, X – переменная для слов, m – натуральное число. Пусть f – некоторая общерекурсивная функция. Множество всех множеств вида S_P таких, что $\ell(P) \leq f(m)$ финитно, т.е. может быть задано в виде списка. Следовательно,

---

*) Основные результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 4 ноября 1967 г.

можно подсчитать количество его элементов, которое мы условимся обозначать посредством $\mathcal{K}_S^f(m)$.

λ^f -сложность предиката S будем называть функцию λ_S^f такую, что для всякого m выполняется $\lambda_S^f(m) = \log_2 \mathcal{K}_S^f(m)$. Рекурсивный предикат S будем называть правильным, если существует такая общерекурсивная функция φ, что каковы бы ни были общерекурсивная функция f и натуральное число i, имеет место неравенство $\lambda_S^f(i) \leq \lambda_S^\varphi(i)$. Функцию λ_S^φ в этом случае будем называть λ-сложностью предиката S, а функцию φ — индикатором правильности предиката S. Очевидно, что если φ_1 и φ_2 — индикаторы правильности предиката S, то для всех n выполняется $\lambda_S^{\varphi_1}(n) = \lambda_S^{\varphi_2}(n)$. Таким образом. функции сложности, соответствующие различным индикаторам правильности предиката S, совпадают.

Легко видеть, что при сделанных относительно S и φ предположениях для любого натурального i имеет место неравенство: $\lambda_S^\varphi(i) \leq n^{i+1}$ (где n — число букв алфавита A).

Ниже в терминах λ-сложности формулируются результаты, относящиеся к сложности распознавания рекурсивных предикатов на м.м.т. (о распознавании предикатов на м.м.т. см. также [1], [2]).

<u>Теорема 1</u>. Пусть S — правильный предикат, φ — индикатор правильности S и функция λ_S^φ имеет конечный предел. Тогда множество слов, на которых выполняется S, регулярно

(в смысле С.К.Клини).

Действительно, пусть у функции λ_S^{φ} существует конечный предел и $S_P \leftrightharpoons \{X : PX \in S\}$; тогда число различных множеств вида S_P финитно. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой 1.1 работы [3].

Будем рассматривать м.м.т. в алфавите A с лентами, потенциально неограниченными в обе стороны, и неподвижными глазками. Пусть T – м.м.т. с k лентами, q состояниями и r -буквенным рабочим алфавитом. Размерностью машины T будем называть тройку (k, q, r) и обозначать ее через $d(T)$. Конфигурация машины определяется обычным образом (см., например, [4]). Пусть C – множество внутренних состояний машины T, в множестве C выделим состояние c_0, называемое начальным, и подмножество $\overline{C}$, называемое множеством заключительных состояний. Конфигурацию машины T будем называть начальной, если в этой конфигурации все ленты машины пусты, и она находится в состоянии c_0; конфигурацию будем называть заключительной, если в этой конфигурации машина находится в одном из заключительных состояний; конфигурацию будем называть соответствующей слову P (и обозначать через $K(P)$), если машина переходит в эту конфигурацию из начальной под действием слова P (т.е. после прихода на вход машины последней буквы слова P).

Будем говорить, что м.м.т. T распознает слово P в реальном времени, если конфигурация $K(P)$ является заключительной. Будем говорить, что предикат S представим машиной T в реальном времени (и писать $\mathcal{M}_T(S)$), если S выполняется для тех и

только тех слов, которые распознаются машиной T в реальном времени. Будем говорить, что предикат S распознаваем в реальном времени (и писать $\mathcal{rt}(S)$)*), если существует такая машина T, что $\mathcal{M}_T(S)$. Класс множеств, распознаваемых в реальном времени, будем обозначать через $\mathcal{rt}$.

На каждом шаге работы машины ячейки каждой из лент пронумеруем подряд целыми числами, причем номер 0 присвоим ячейке, которая в данный момент обозревается глазком; n-окрестностью данной конфигурации будем называть ее след в зоне $[-n, n]$ (см. [4]). Через $V_P(n)$ будем обозначать n-окрестность, соответствующую конфигурации $K(P)$.

<u>Лемма 1</u>. Пусть T – м. м. т. и $d(T) \equiv (k, q, r)$. Тогда для любого n число различных $V_P(n)$ (при варьируемом P) не превосходит $q \cdot r^{k(2n+1)}$.

<u>Лемма 2</u>. Пусть T – м. м. т., n – натуральное число и существуют такие слова P_1 и P_2, что $V_{P_1}(n) \equiv V_{P_2}(n)$. Тогда каково бы ни было слово Q, если $\ell(Q) \leq n$, то слова P_1Q и P_2Q распознаются или не распознаются машиной T одновременно.

Лемма вытекает из следующего утверждения: если $\ell(Q) \leq n$, то $V_{P_1Q}(n-\ell(Q)) \equiv V_{P_2Q}(n-\ell(Q))$. Последнее легко доказывается индукцией по длине слова Q.

---

*) От английского "real time recognizable".

Теорема 2. Пусть T – м. м. т., $d(T)=(k,q,r)$ и $\mathcal{M}_T(S)$. Тогда каковы бы ни были общерекурсивная функция f и натуральное число n имеет место соотношение $\lambda_S^f(n) \le C_1 n + C_2$, где $C_1 = 2k\log_2 r$, $C_2 = k\log_2 r + \log_2 q$.

Доказательство. Допустим, что существуют общерекурсивная функция f и натуральное n такие, что $\lambda_S^f(n) > C_1 n + C_2$. Тогда

$$\mathcal{P}_S^f(n) = 2^{\lambda_S^f(n)} > q \cdot r^{k(2n+1)}$$

Следовательно, согласно лемме I, найдутся такие слова P_1 и P_2, что $V_{P_1}(n) = V_{P_2}(n)$ и в то же время $S_{P_1}^n \ne S_{P_2}^n$. Пусть $Q \in (S_{P_1}^n \cup S_{P_2}^n) \setminus (S_{P_1}^n \cap S_{P_2}^n)$. Тогда $\ell(Q) \le n$ и, согласно лемме 2, $P_1 Q \in S$ тогда и только тогда, когда $P_2 Q \in S$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

Следствие. Если для предиката S существует такая общерекурсивная функция f, что точная нижняя граница (по положительным n) отношения $n/\lambda_S^f(n)$ есть 0, то $S \notin \mathcal{R}$.

Действительно, если точная нижняя граница отношения $n/\lambda_S^f(n)$ есть 0, то каково бы ни было положительное ε, найдется такое положительное n, что $\lambda_S^f(n) > \frac{n}{\varepsilon}$. Отсюда

легко вывести, что предположение $S \in \mathcal{R}$ противоречит теореме 2.

Лемма 3. Пусть $S \in \mathcal{R}$. Тогда S примитивно рекурсивен.

Лемма 4. Можно построить примитивно рекурсивный предикат $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{B} \notin \mathcal{R}$.

В качестве $\mathcal{B}$ можно взять предикат, истинный лишь на словах вида $U*V$, где U и V – слова в алфавите $\{0,1\}$, такие что слово V входит в слово U. В этом случае для любого натурального n

$$\lambda_{\mathcal{B}}^{f}(n) \geq 2^{n-2} - n + 1 ,$$

где функция f такова, что $f(n) = 2^{n+1}$ при всех n.

Из лемм 3, 4 непосредственно вытекает, что класс $\mathcal{R}$ строго уже класса всех примитивно рекурсивных предикатов.

Теорема I позволяет утверждать принадлежность (а следствие из теоремы 2 – непринадлежность) предиката классу $\mathcal{R}$ лишь в случае, если его функция сложности ограничена (соответственно, растет быстрее, чем любая линейная). В классе $\mathcal{R}$ существуют предикаты с логарифмическим порядком роста функции сложности. Примером может служить любой предикат типа $\mathcal{R}$ из раздела 2 работы [2]. Покажем в заключение, что существуют рекурсивные предикаты, не принадлежащие классу $\mathcal{R}$, у которых функция сложности имеет логарифмический порядок роста.

Пусть $\mathcal{E}$ – предикат, заданный на множестве слов в алфавите $\{1\}$ и $\mathcal{E}$ выполняется на тех и только тех словах, длины кото-

рых являются значениями диагональной функции Аккермана Ψ. Через g обозначим функцию, определяемую равенством: $g(m) = \mu_i(\Psi(i) > m)$.

Теорема 3. Предикат $\mathcal{E}$ не принадлежит классу $\mathcal{R}$, и функция $\lambda_{\mathcal{E}}^{g}$, являющаяся λ-сложностью предиката $\mathcal{E}$, имеет логарифмический порядок роста.

Доказательство. Докажем сначала, что предикат $\mathcal{E}$ правильный. Функция g общерекурсивна, поскольку общерекурсивная функция Ψ неограничена. Легко видеть, что для любой общерекурсивной f и натурального n имеем:

$$\lambda_{\mathcal{E}}^{g}(n) \geq \lambda_{\mathcal{E}}^{f}(n)$$

Следовательно, g есть индикатор правильности предиката $\mathcal{E}$.

Теперь подсчитаем количество различных множеств вида $\mathcal{E}_P^m$ при $l(P) \leq m$. Очевидно, оно не превосходит m, т.е. числа различных слов P в алфавите $\{1\}$, у которых $l(P) \leq m$. Пусть теперь $l(P) > m$. Покажем, что в этом случае множество $\mathcal{E}_P^m$ содержит не более одного элемента. Пусть $\mathcal{E}_P^m$ содержат более одного элемента. Построим различные слова Q_1 и Q_2 такие, что $PQ_1, PQ_2 \in \mathcal{E}$ и

$$0 < l(Q_1) \leq l(Q_2) < m.$$

Тогда существуют натуральные числа i_1 и i_2 такие, что $l(PQ_1) = \Psi(i_1)$ и $l(PQ_2) = \Psi(i_2)$. Следовательно,

$$\ell(Q_2)=\ell(PQ_2)-\ell(P)\geq\ell(PQ_2)-\ell(PQ_1)=$$
$$=\Psi(i_2)-\Psi(i_1)\geq\Psi(i_1)=\ell(PQ_1)>m .$$

Полученное противоречие доказывает, что множество $\mathcal{E}_P^m$ содержит не более одного элемента. Таким образом, число различных множеств вида $\mathcal{E}_P^m$ (в случае $\ell(P)>m$) не превосходит m .

Так как $\mathcal{E}$ — правильный предикат, множество всех множеств вида $\mathcal{E}_P^m$ финитно. Следовательно, для любого n выполняется неравенство:

$$\log_2 n\leq\lambda_{\mathcal{E}}^{g}(n)\leq 1+\log_2 n .$$

Таким образом, функция $\lambda_{\mathcal{E}}^{g}$ имеет логарифмический порядок роста.

Остается показать, что $\mathcal{E}\notin\mathcal{R}$. Предикат $\mathcal{E}$ не является примитивно рекурсивным; допустив противоположное, можно легко придти к заключению о примитивной рекурсивности функции Ψ . Следовательно, согласно лемме 3, $\mathcal{E}\notin\mathcal{R}$. Этим завершается доказательство теоремы.

В заключение автор выражает благодарность Н.А.Шанину, Г.С.Цейтину и всем членам группы математической логики ЛОМИ за полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

1. Hennie F.C. On line turing machine computation. "IEEE Trans. on Electr. Comp.", 1966, EC-15, № 1, 35-44.
2. Фрейдзон Р.И. О представимости алгорифмически разрешимых предикатов машинами Рабина. "Записки научных семинаров ЛОМИ", 1967, 4, 209-218.
3. Спивак М.А. Алгебраическая характеристика вычислительной силы автомата. "Кибернетика", 1965, № 4, I-II.
4. Фрейвалд Р. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга с входом. "Алгебра и логика .Семинар". 1965, т.4, вып.I, 46-58.