

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. N. Zatelepin, S. A. Medin, Влияние неоднородности проводимости на концевой эффект в секционированном МГД-генераторе, *TVT*, 1974, Volume 12, Issue 5, 1071–1077

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

February 17, 2025, 13:02:48



УДК 621.313.12:538.4:533.95

**ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПРОВОДИМОСТИ НА КОНЦЕВОЙ ЭФФЕКТ В СЕКЦИОНИРОВАННОМ МГД-ГЕНЕРАТОРЕ**

*В. Н. Зателенин, С. А. Медин*

Решена задача о распределении потенциала в концевой области секционированного МГДГ с неоднородной проводимостью газа и экспоненциально спадающим вне электродной зоны магнитным полем. Полученное решение дало возможность исследовать интегральные характеристики МГДГ. Приведены графики концевых приращений мощности и работы в зависимости от неоднородности проводимости.

Электрические поля в каналах МГД-устройств в настоящее время исследованы достаточно полно в результате решения большого числа модельных задач [1]. Наибольший интерес представляют задачи о распределении потенциала и тока в МГД-каналах с неоднородными распределениями параметров плазмы и магнитного поля. В [2] найдено решение задачи для канала с однородным потоком в случае полубесконечных идеально секционированных электродов и экспоненциально спадающим вне электродов магнитным полем.

Цель данной работы — исследование электрических характеристик аналогичного генератора с учетом неоднородности проводимости поперек канала. Проводимость моделируется функцией, позволяющей аналитически решить задачу. В решении имеется свободный параметр, который дает возможность рассмотреть влияние наполненности профиля проводимости на интегральные характеристики генератора: мощность  $N$ , работу  $A$ .

Рассмотрим плоский канал постоянной высоты  $2h$  (рис. 1), стенки которого — изоляторы при  $x < 0$  и идеально секционированные электроды при  $x > 0$ . По каналу в заданном внешнем магнитном поле движется с постоянной скоростью поток проводящей жидкости. Проводимость жидкости принимается зависящей от поперечной координаты  $\sigma = \sigma(y)$ . При  $Re_m \ll 1$  и  $ot \ll 1$  распределение потенциала и тока в канале определяется уравнениями [1]

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + UB \right) &= 0, \\ j_y &= -\sigma \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + UB \right), \\ j_x &= -y \partial \varphi / \partial x. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\sigma = \sigma(y)$  — проводимость;  $U$  — скорость;  $B$  — магнитное поле, изменяющееся по длине канала

$$B = B_0 b(x) = \begin{cases} B_0 \exp(\mu x) & x < 0 \\ B_0 & x > 0 \end{cases} \quad \mu \geq 0. \tag{2}$$

Прежде чем сформулировать граничные условия, проведем некоторый одномерный анализ системы (1), т. е. рассмотрим область вдали от концевого участка  $x = +\infty$ .

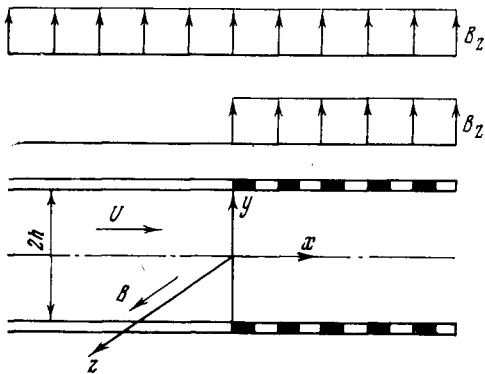


Рис. 1. Схема канала

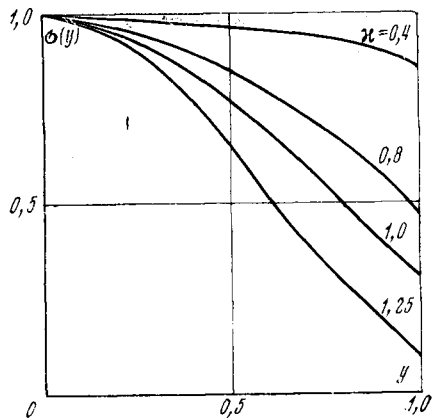


Рис. 2. Семейство профилей проводимости при разных параметрах  $\xi$

В этом случае из второго уравнения (1) легко получить [3]

$$\varphi = -UBy - j_y \int_0^y \frac{dy}{\sigma(y)}, \quad j = j_y = \text{const} < 0, \quad (3)$$

$$\varphi(h) - \varphi(-h) = -2UBh - j_y \int_{-h}^h \frac{dy}{\sigma(y)}.$$

Введем в рассмотрение следующие обозначения:  
коэффициент нагрузки

$$k = - \frac{\varphi(h) - \varphi(-h)}{2UBh}, \quad (4)$$

эффективная проводимость

$$\sigma^* = \langle \sigma^{-1} \rangle^{-1} = \frac{1}{1/h \int_0^h dy / \sigma(y)}.$$

Тогда из (3) имеем

$$j = j_y = UB\sigma^*(k-1).$$

В дальнейшем все рассмотрение проводится в терминах безразмерных величин. Переход от  $x$  или  $y$ ,  $\sigma$  или  $\sigma^*$ ,  $\varphi$ ,  $j$ ,  $N$  или  $A$  к размерному виду осуществляется умножением на  $h$ ,  $\sigma_0$  (проводимость на оси канала),  $UB_0h$ ,  $\sigma_0 UB_0$ ,  $\sigma_0 U^2 B_0^2 h^2$  соответственно.

Учитывая высказанные одномерные соображения, сформулируем следующие граничные условия:

$$j_y = 0 \text{ или } \partial\varphi/\partial y = -b(x) \text{ при } x < 0, y = \pm 1,$$

$$j_y = \sigma^*(k-1) = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1-k) \frac{\sigma^*}{\sigma(1)} - b(x) \quad (5)$$

при  $x > 0, y = \pm 1$ .

Заметим, что задача (1), (5) симметрична относительно оси  $x$ , что дает возможность рассматривать только верхнюю половину канала  $0 < y < 1$ , при-

нимая при этом  $\varphi(x, 0) = 0$ . Функция  $\varphi(x, y)$  при подходящем выборе  $\sigma(y)$  удовлетворяет условиям [2]

$$|\varphi(x, y)| < \text{const},$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$|\varphi(x, y)| < \text{const exp}(\tau_+ x), \quad (\tau_+ > 0).$$

$$x \rightarrow -\infty$$

Эти оценки показывают, что решение задачи может быть построено с помощью преобразования Фурье. Предварительно для упрощения системы (1), (5) введем в нее некоторые новые обозначения. Пусть  $\sigma = a^2$ ,  $\Phi = a\varphi$ , тогда из (1), (5) получаем

$$\Delta \Phi - \frac{d^2 a}{a dy^2} \Phi + 2b(x) \frac{da}{dy} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{da}{a dy} \Phi = -ab(x) \quad \text{при} \quad x < 0 \quad y = 1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{da}{a dy} \Phi = (1-k) \frac{\sigma^*}{a} - b(x)a \quad \text{при} \quad x > 0 \quad y = 1,$$

$$\Phi = 0, \quad y = 0.$$
(6)

Для простоты расчетов примем модельный профиль проводимости  $\sigma = \cos^2 \kappa y$  ( $a = \cos \kappa y$ ) (рис. 2). Параметр  $\kappa$  ( $0 \leq \kappa < \pi/2$ ) дает возможность менять степень спада проводимости к стенкам по сравнению с ядром потока. Для принятого профиля  $\sigma(y) = \cos^2 \kappa y$  эффективная проводимость (4)  $\sigma^* = \kappa \text{ctg} \kappa$ . В случае однородной проводимости  $\sigma^* = 1$  ( $\kappa = 0$ ). При спаде проводимости к стенке до нуля  $\sigma^* = 0$  ( $\kappa = \pi/2$ ).

Подставим в систему (6)  $a = \cos \kappa y$ . Применяя к левой и правой частям (6) преобразование Фурье

$$\tilde{\Phi}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y) \exp(i\alpha x) dx,$$

$$\alpha = \nu + i\tau, \quad 0 < \tau < \tau_+,$$

и оставляя за Фурье-образами те же обозначения, что у соответствующих функций, имеем

$$\ddot{\Phi} - (\alpha^2 - \kappa^2) \Phi = -2\kappa \sin \kappa y m(\alpha),$$

$$\dot{\Phi} + \kappa \text{tg} \kappa \Phi = \cos \kappa m(\alpha) + \frac{(k-1)\sigma^*}{i\alpha \cos \kappa}, \quad y = 1,$$

$$\Phi = 0, \quad y = 0,$$

$$m(\alpha) = \mu / (i\alpha + \mu) i\alpha.$$
(7)

Таким образом, задача свелась к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Решая его и учитывая граничные условия, имеем

$$\Phi = \frac{1}{\gamma \text{ch} \gamma + \kappa \text{tg} \kappa \text{sh} \gamma} \left( \frac{\mu \cos^2 \kappa + \sigma^* (k-1) (i\alpha + \mu)}{(i\mu - \alpha) \alpha \cos \kappa} - \frac{2\kappa^2}{\alpha^2 \cos \kappa} m(\alpha) \right) \times$$

$$\times \text{sh} \gamma y + \frac{2\kappa}{\alpha^2} m(\alpha) \sin \kappa y,$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \kappa^2.$$
(8)

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем из (8) искомое решение

$$\begin{aligned} & \left( (k-1)\sigma^* + \cos^2 \kappa + \frac{2\kappa^2}{\beta_n^2} \right) = p_n, \\ & \mu^2 + \kappa^2 = \omega^2, \\ & H_n = \cos \kappa (1 + \cos^2 \tau_n / \kappa \operatorname{tg} \kappa), \\ & \varphi = \frac{\Phi}{\cos \kappa y} = \frac{1}{\cos \kappa y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + ic}^{\infty + ic} \Phi \exp(-i\alpha x) d\alpha, \\ & \varphi = -y - (k-1) \operatorname{ctg} \kappa \operatorname{tg} \kappa y + \\ & + \frac{1}{\cos \kappa y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\beta_n (k-1)\sigma^* + \mu p_n] \sin \tau_n \sin \tau_n y \exp(-\beta_n x)}{\beta_n^2 (\beta_n + \mu) H_n}, \quad (9) \\ & \varphi = - \left( \mu \cos^2 \kappa - \frac{2\kappa^2}{\mu^2} \right) \frac{\sin \omega y}{(\omega \cos \omega + \kappa \operatorname{tg} \kappa \sin \omega)} \times \\ & \times \frac{\exp(\mu x)}{\cos \kappa \cos \kappa y} - \frac{2\kappa \sin \kappa y \exp(\mu x)}{\mu^2 \cos \kappa y} - \frac{1}{\cos \kappa y} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\beta_n (1-k)\sigma^* + \mu p_n] \sin \tau_n \sin \tau_n y \exp(\beta_n x)}{\beta_n^2 (\mu - \beta_n) H_n}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_n$  и  $\beta_n$  находятся из уравнений  $\tau_n \cos \tau_n + \kappa \operatorname{tg} \kappa \sin \tau_n = 0$ ,  $\beta_n = \sqrt{\tau_n^2 - \kappa^2}$ .

При выводе формулы (9) полагалось, что параметр магнитного поля  $\mu$  не совпадает ни с одним корнем  $\tau_n$ .

В (9) бесконечные суммы определяют вклад концевой эффeкта.

Полученное решение при  $\sigma^* = 1$  (однородная проводимость) переходит в известное [2].

С помощью (9) можно определить интегральные характеристики генератора:  $N = N(L, k, \mu, \kappa)$  — мощность и  $A = A(L, k, \mu, \kappa)$  — работа, рассчитанные для области канала  $-\infty < x < L$ , при условии  $L = x/h > 1$  ( $x$  — размерная длина рассматриваемой зоны электродного участка)

$$\begin{aligned} N &= k(1-k)\sigma^* L + \Delta N, \\ A &= (1-k)\sigma^* L + \Delta A, \\ \Delta N &= \frac{2(k-1)\sigma^*}{\cos^2 \kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\beta_n (k-1)\sigma^* + \mu p_n] \sin^2 \tau_n}{\beta_n^3 (\beta_n + \mu) H_n}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\Delta A = \frac{\mu}{\cos^2 \kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n (2\kappa^2 + \tau_n^2 \cos^2 \kappa) \sin^2 \tau_n}{\beta_n^5 (\beta_n + \mu) H_n}. \quad (11)$$

На рис. 3, 4 представлены зависимости приращений мощности и работы от безразмерного параметра  $\sigma^*$ .

При  $\mu = 0$  (магнитное поле однородно) в концевой зоне канала генерируется мощность бóльшая, чем по одномерной теории,  $\Delta N > 0$ . Это объясняется подтеканием тока из безэлектродной зоны. При увеличении неоднородности проводимости (уменьшение  $\sigma^*$ )  $\Delta N$  падает, имея характер стремления к нулю выше линейного. Для пояснения этого эффeкта исследуем поведение

потенциала  $\varphi$  вдали от концевой участка при  $x = \pm\infty$ . Учитывая определение (4), имеем из (3)

$$\varphi(\infty, y) = -y - (k-1)\sigma^* \int_0^y \frac{dy}{\sigma(y)}, \quad (12)$$

$$\varphi(-\infty, y) = -y.$$

При значительной неоднородности проводимости  $\sigma^*$  близка к нулю. Из (12) видно, что в этом случае в ядре потока потенциал ведет себя так, словно электродная стенка — непроводящая  $\varphi \approx -y$ . Только в пристеночном

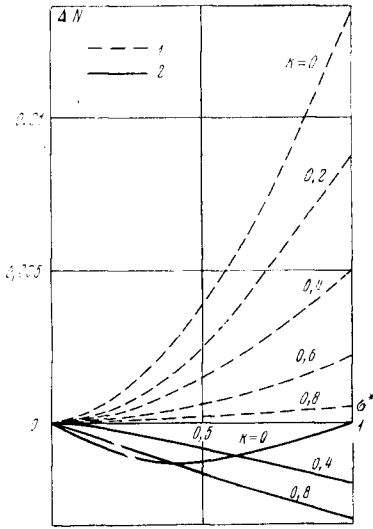


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость поправок мощности  $\Delta N$  на концевой эффект от  $\sigma^* = \kappa \operatorname{ctg} \kappa$ :

1 —  $\mu=0$ ; 2 —  $\mu=\infty$

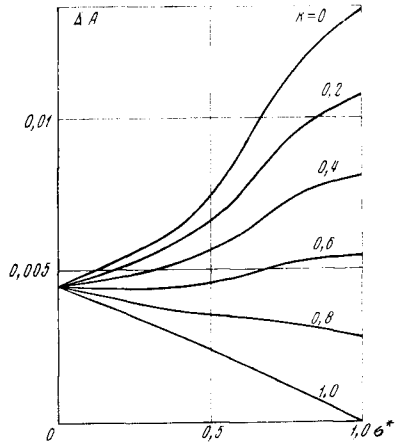


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость поправок работы  $\Delta A$  на концевой эффект от  $\sigma^*$  при  $\mu=\infty$

слое, который с уменьшением  $\sigma^*$  становится тоньше, потенциал начинает чувствовать влияние электродов. В этом смысле предельным является случай  $\sigma^*=0$ . Тогда вплоть до электродов  $\varphi = -y$ , а при  $y=1$  разрыв потенциала обеспечивает электродам  $\varphi = -k$ . Следовательно, решением задачи во всем канале будет  $\varphi = -y$ . Этот результат строго следует из (9) при  $\sigma^* \rightarrow 0$ . Отсюда видно, что если при однородной проводимости область неоднородности потенциала имеет размер порядка калибра канала, то при неоднородности проводимости она сужается. Теперь становится понятным характер паде-

ния  $\Delta N$ . Действительно, пусть  $\Delta\varphi = \varphi(x, 1) - \varphi(\infty, 1)$ . Тогда  $\Delta N = 2j_v \int_0^\infty \Delta\varphi dx$ .

При  $\sigma^* \rightarrow 0$  не только  $j_v \rightarrow 0$ , но и  $\int_0^\infty \Delta\varphi dx \rightarrow 0$ .

При  $\mu=\infty$  (магнитное поле обрывается у конца электродной зоны) в концевой зоне канала генерируется мощность меньшая, чем по одномерному расчету,  $\Delta N < 0$ . Это связано с шунтированием внешней нагрузки безэлектродной зоной.

Чтобы пояснить зависимость  $\Delta N$  от  $\sigma^*$ , снова обратимся к формуле (12). Заметим, что теперь в отличие от случая  $\mu=0, \varphi=0$  при  $x=-\infty$ . При  $x=+\infty$  наличие неоднородности проводимости приводит к тому, что в ядре потока  $\varphi \approx -y$ , лишь вблизи электродов потенциал резко выходит на значение, определяемое коэффициентом нагрузки. Таким образом, даже при  $k=0$   $E_y \neq 0$ , что приводит к неоднородности электрического поля в концевой области. Как известно [2], при  $\sigma = \text{const}$  и  $k=0$   $\Delta N=0$ . При наличии неоднородности проводимости  $\Delta N \neq 0$  при всех коэффициентах нагрузки, кроме  $k=1$ . Анализ формул (9) показывает, что неоднородность проводимости

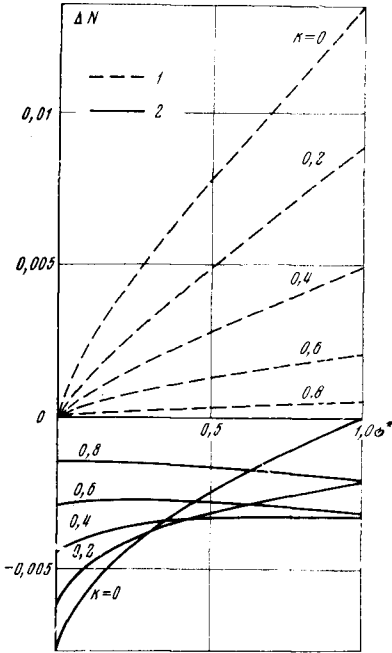


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость относительной поправки мощности  $\Delta N/\sigma^*$  на концевой эффект от  $\sigma^*$ :  
1 —  $\mu=0$ ; 2 —  $\mu=\infty$

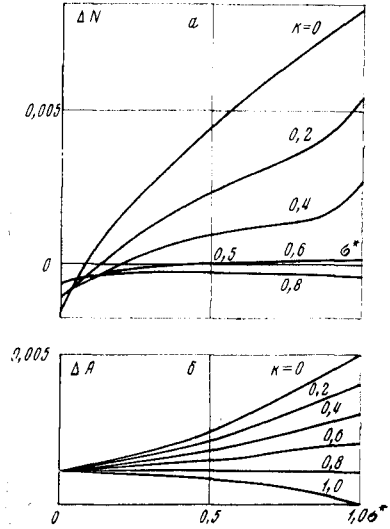


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость относительной поправки мощности  $\Delta N/\sigma^*$  (а) и поправки работы  $\Delta A$  (б) на концевой эффект от  $\sigma^*$  при  $\mu=1$

по-разному влияет на область локализации концевой эффект при  $\mu=0$  и  $\mu=\infty$ . Если в первом случае при  $\sigma^* \rightarrow 0$  эта область сужается, то во втором при достаточно малых  $k$  она растет. Лишь при  $k$ , близких к единице, область локализации несколько сужается.

Покажем теперь, что при  $\mu=\infty$  характер стремления  $\Delta N \rightarrow 0$  при  $\sigma^* \rightarrow 0$

линейный. Действительно, пусть  $\Delta \varphi = \varphi(x, 1) - \varphi(\infty, 1)$   $\Delta N = 2j_y \int_0^{\infty} \Delta \varphi dx$ .

Тогда при  $\sigma^* \rightarrow 0$   $j_y \rightarrow 0$ , а из сказанного выше следует, что

$$\int_0^{\infty} \Delta \varphi dx \rightarrow \text{const} \neq 0,$$

Заметим, что при  $k=0$  не только  $\Delta N < 0$ , но и  $N < 0$ . Таким образом, внешнее устройство, обеспечивающее режим постоянного тока на электродах при малых  $k$ , должно состоять не только из сопротивлений, но также из батарей.

На рис. 5 представлен график  $\Delta N/\sigma^*$ , позволяющий оценить относительную величину вклада концевой области в сравнении с одномерным расчетом. С другой стороны, этот же график дает возможность оценить ошибку в расчете  $\Delta N$ , если несмотря на неоднородность проводимости, считать ее постоянной и равной  $\sigma^*$  ( $\sigma = \sigma^*$ ).

Как и следовало ожидать  $\Delta A = 0$  при  $\mu = 0$ .  $\Delta A$  при  $\mu = \infty$  монотонно зависит от  $\sigma^*$ , возрастая или убывая в зависимости от коэффициента нагрузки  $k$ . При  $\sigma^* \rightarrow 0$   $\Delta A$  выходит на константу, не зависящую от  $k$ . Это является следствием того, что при  $\sigma^* = 0$  ток не попадает во внешнюю цепь и вихревые токи, локализующиеся в ядре потока, не зависят от коэффициента нагрузки.

На рис. 6, а, б даны  $\Delta N$  и  $\Delta A$  при  $\mu = 1$ . Сравнение с рис. 3, 4 показывает, что данный режим — переходный от  $\mu = 0$  к  $\mu = \infty$ .

Институт высоких температур  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
25 IV 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Вагажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. Магнитогиродинамические течения в каналах. «Наука», 1970.
  2. А. Б. Вагажин, С. А. Медин, А. Г. Сокольский, Б. Я. Шумяцкий. Теплофизика высоких температур, 8, № 2, 1970.
  3. Г. А. Любимов. ПМТФ, № 5, 1963.
-