В.В.Пеллер

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ГЛАДКОСТЬ ФУНКЦИЙ

§ I. Введение

Работа посвящена изучению связей между свойствами гладкости функций и скоростью убывания наилучших приближений рациональными функциями. Точнее, пусть X – банахово пространство функций на отрезке $[-1,1]$ (или, более общо, на компактном подмножестве K в $\mathbb{C}$), $\mathcal{R}_n$ – множество рациональных функций с полюсами вне K вида $\frac{p}{q}$, где p и q полиномы, $\deg p \leqslant n$, $q \leqslant n$. Наилучшие приближения $r_n^X(f)$ функции f, $f \in X$, рациональными функциями определяются равенством

$$r_n^X(f) \overset{def}{=} \inf_{r \in \mathcal{R}_n} \|f - r\|_X .$$

Задача состоит в том, чтобы определить, как связаны между собой скорость убывания чисел $r_n^X(f)$ и свойства гладкости функции f. Соответствующая задача для полиномиальных приближений уже давно стала классической и в этой области получено много точных результатов.

Упомянутая задача для рациональных приближений начала исследоваться в работах С.Н.Мергеляна [1], А.А.Гончара [2], Е.П.Долженко [3]. Однако оказалось, что эта задача значительно сложнее, чем задача приближений полиномами, и в полученных результатах был существенный зазор между прямыми и обратными теоремами. Этот разрыв удалось сократить Ю.А.Брудному [4], который получил следующий результат о наилучших приближениях в равномерной метрике на отрезке вещественной прямой.

$$\Lambda^{\lambda}_{1/\lambda+\varepsilon} \subset \left\{\varphi : dist_{L^\infty}(\varphi, \mathcal{R}_n) = O(n^{-\lambda})\right\} \subset \Lambda^{\lambda}_{1/\lambda-\varepsilon},$$

где Λ^{λ}_{p} – пространство функций f на $[0,1]$ таких, что

$$\|\Delta_h^k f\|_{L^p[0,1-kh]} \leqslant const\,|h|^{\lambda}.$$

Здесь $\Delta_h^k f$ – k-я разность, т.е. $\Delta_h^{n+1} f = \Delta_h^1(\Delta_h^n f)$, $(\Delta_h^1 f)(x) = f(x+h) - f(x)$.

Ю.А.Брудным также получены аналогичные результаты о наилучших приближениях рациональными функциями в норме L^p, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. [4]).

В работе автора [5] получены следующие точные результаты (совпадение прямых и обратных теорем) о рациональных приближениях в норме пространства ВМО *) функций, заданных на единичной окружности.

ТЕОРЕМА А. Пусть f – аналитическая функция класса BMO_A в единичном круге $\mathbb{D}$. Тогда

$$\sum_{n\geq 0}\left(dist_{BMO_A}(f,\mathcal{R}_n)\right)^p<+\infty$$

в том и только в том случае, когда f принадлежит классу Бесова $B_p^{1/p}$.

ТЕОРЕМА Б. Пусть f – функция класса ВМО на единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда

$$\sum_{n\geq 0}\left(dist_{BMO}(f,\mathcal{R}_n)\right)^p<+\infty$$

в том и только в том случае, когда $f\in B_p^{1/p}$.

В теореме А рассматриваются рациональные функции с полюсами вне $clos\,\mathbb{D}$, а в теореме Б – с полюсами вне $\mathbb{T}$. Поскольку норма пространства ВМО слабее равномерной нормы, то теоремы А и Б позволяют получить обратные теоремы теории приближений в равномерной метрике.

Основная цель этой статьи – распространить результаты работы 5 на случай аналитических функций в областях (это делается в § 3) и на случай функций, заданных на отрезке вещественной прямой (этому посвящен § 4). При этом мы будем использовать теорему А и аппарат преобразований Фабера, развитый Е.М.Дынькиным в [6].

В § 2 мы приводим определения различных классов функции, преобразования Фабера и формулируем некоторые результаты об инвариантности классов Бесова относительно преобразования Фабера, полученные Е.М.Дынькиным в [6].

Я искренне благодарен Е.М.Дынькину и А.Б.Александрову за полезные обсуждения.

§ 2. Предварительные сведения

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ. Класс ВМО функций на окружности $\mathbb{T}$ функций ограниченной средней осцилляции определяются следующим образом

$$f\in BMO \Longleftrightarrow \|f\|_{BMO}\overset{def}{=}\left|\int_{\mathbb{T}} f\,dm\right|+\sup_I\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|\,dm<+\infty\,,$$

---

*) См. определение пространства ВМО и других встречающихся здесь пространств в § 2.

где supremum берется по всем дугам I единичной окружности $\mathbb{T}$, $f_I \overset{def}{=} \frac{1}{|I|}\int_I f$, а $|I|$ – мера Лебега множества I.

Аналогичным образом определяются пространства BMO $(\mathbb{R})$ и BMO $[-I,I]$ функций на вещественной прямой и отрезке $[-I,I]$. В силу теоремы Ч.Феффермана (см.[7],[8],[9]), $f \in BMO$ в том и только в том случае, когда $f = g_1 + \tilde{g}_2$, где $g_1, g_2 \in L^\infty$, а $\tilde{g}_2$ – функция, гармонически сопряженная к g_2. Аналогичное описание допускает класс BMO $(\mathbb{R})$. Хорошо известно, что $BMO[-1,1] = BMO(\mathbb{R})\big|[-1,1]$.

Множество функций f из BMO, аналитических в $\mathbb{D}$ (т.е. таких f, что $\hat{f}(n)=0$ при $n<0$) обозначается символом BMO_A. В силу упомянутой теоремы Ч.Феффермана

$$f \in BMO_A \Longleftrightarrow \exists g \in L^\infty(\mathbb{T}): \mathbb{P}_+ g \overset{def}{=} \sum_{n\geqslant 0} \hat{g}(n) z^n = f.$$

На классе BMO_A можно ввести норму $\|f\|_{BMO_A} = \inf\{\|g\|_{L^\infty}: \mathbb{P}_+ g = f\}$, эквивалентную норме BMO.

К л а с с   Б е с о в а B_p^s функций на $\mathbb{T}$ состоит из функций f на $\mathbb{T}$ таких, что

$$\int_0^1 (\omega_p^m(f,\delta))^p \frac{1}{\delta^{ps+1}} d\delta < +\infty,$$

где m – целое число, $m > s$, ω_p^m – модуль разности порядка m в L^p, т.е. $\omega_p^m(f,\delta) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \|\Delta_h^m f\|_{L^p}$ (см.[I0]). Подпространство пространства B_p^s, состоящее из аналитических в $\mathbb{D}$ функций обозначается с и м в о л о м A_p^s. Известно (см. [II]), что

$$f \in A_p^s \Longleftrightarrow \int_0^1 \|f_r^{(m)}\|_{L^p} (1-r)^{(m-s)p-1} dr < +\infty,$$

где $f_r(z) = f(rz)$.

Аналогично определяется класс Бесова функций $B_p^s[-1,1]$ функций на отрезке $[-I,I]$.

К л а с с ы   Б е с о в а $A_p^s(G)$ функций, заданных в жордановой области G с липшицевой границей могут быть определены с помощью локальных приближений следующим образом (см.[I2], [6]). Пусть I – дуга границы ∂G, $f \in L^p(I)$, положим

$$E_m(f,I)_p = \inf\left(\int_I |f-Q|^p\right)^{1/p},$$

где infimum берется по всем многочленам Q степени m, а интеграл берется по длине дуги.

Для функции f из $L^p(\partial K)$ модуль гладкости порядка m определяется следующим образом

$$\omega_p^m(f,\delta)=\sup\Big(\sum_j E_m(f,I_j)_p^p\Big)^{1/p},$$

где supremum берется по всем конечным разбиениям ∂K на дуги $\{I_j\}$ такие, что $\delta/2\leqslant|I_j|\leqslant\delta$ при всех j.

Класс $A_p^s(G)$ состоит из множества аналитических в G функций класса Смирнова $E^p(G)$ (см. [13]) и таких, что

$$\int_0^1(\omega_p^m(f,\delta))^p\frac{d\delta}{\delta^{1+ps}}<+\infty$$

при $m>s$.

Таким же образом можно определить и пространства B_p^s, $B_p^s[-1,1]$.

Е.М.Дынькиным (см. [6]) получено описание классов $A_p^s(G)$ в терминах псевдоаналитического продолжения. Пусть $K=G$ или $K=[-1,1]$. Тогда $f\in A_p^s(G)$ ($f\in B_p^s[-1,1]$) в том и только в том случае, когда f допускает продолжение на $\mathbb{C}\setminus\operatorname{clos}K$ такое, что

$$\iint_{\mathbb{C}\setminus K}\left|\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right|^p\operatorname{dist}(z,K)^{-p(s-1)-1}\,dx\,dy<+\infty .$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФАБЕРА. Пусть G_1, G_2 – липшицевы области $\varphi:\mathbb{C}\setminus G_2\longrightarrow\mathbb{C}\setminus G_1$ – конформное отображение такое, что $\varphi(\infty)=\infty$. Преобразование Фабера $T_{G_1}^{G_2}$ сопоставляет аналитической функции в G_1 функцию, аналитическую в G_2, по формуле

$$(T_{G_1}^{G_2}f)(z)=\mathcal{K}_{G_2}^{+}(f\circ\varphi)(z)\overset{def}{=\!=}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_2}f(\varphi(\zeta))\frac{d\zeta}{\zeta-z},\; z\in G_2 .$$

Преобразование Фабера можно определить также следующим способом, который позволяет охватить и случай функций на отрезке. Пусть K область с липшицевой границей или $K=[-1,1]$ и пусть f – измеримая функция на $\partial(\mathbb{C}\setminus K)$ (в случае $K=[-1,1]$ мы имеем две функции f^+ и f^-, причем $f^+(1)=f^-(1)$, $f^+(-1)=f^-(-1)$). Говорят, что f допускает преобразование Коши, если существуют функции h,Φ в $\mathbb{C}\setminus K$ такие, что $h\in E^q(\mathbb{C}\setminus K)$ при $q>0$, $\Phi\in W_r^1$ при $r>1$, граничные значения $h+\Phi$ на $\partial(\mathbb{C}\setminus K)$ совпадают с f почти везде. В этом случае преобразование Коши определено равенством

$$(\mathcal{K}^+ f)(z) = (\mathcal{K}^+_K f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}\setminus K} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar z}(\zeta)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \quad z \in K,$$

(см.подробности в [6]).

В случае $K = [-1, 1]$

$$(\mathcal{K}^+_K f)(x) = \frac{1}{2}\left(f^+(x) + f^-(x)\right) + \frac{1}{2\pi}\,\text{v. p.}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{f^+(t) - f^-(t)}{t - x}\right)dt, \quad x \in [-1, 1].$$

Теперь можно определить и преобразование Фабера $T^{K_2}_{K_1}$, где K_i — жорданова область или отрезок:

$$T^{K_2}_{K_1} f \overset{def}{=} \mathcal{K}^+_{K_2}(f \circ \varphi),$$

где φ - конформное отображение $\mathbb{C}\setminus \operatorname{clos} K_2$ на $\mathbb{C}\setminus \operatorname{clos} K_1$.

Имеет место равенство $T^{K_3}_{K_2} T^{K_2}_{K_1} = T^{K_3}_{K_1}$, где K_i — либо жорданова область с липшицевой границей, либо отрезок.

Е.М.Дынькиным [6] доказано, что

$$T^{K_2}_{K_1} A^{1/p}_p (K_1) = A^{1/p}_p (K_2), \quad 1 \leqslant p < +\infty,$$

где в случае $K_i = [-1, 1]$ $\quad A^{1/p}_p (K_i) \overset{def}{=} B^{1/p}_p [-1, 1]$.

§ 3. Функции, заданные в областях

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые классы функций в областях комплексной плоскости, определяемые в терминах наилучших приближений рациональными функциями и дадим явное описание этих классов.

Пусть G - жорданова область на плоскости с липшицевой границей ∂G. Символом $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}^G_n$ обозначим множества рациональных функций, имеющих не более, чем n полюсов в $\mathbb{C}\setminus \operatorname{clos} G$ (с учетом кратностей).

Рассмотрим пространство $\mathcal{K}^+ L^\infty_{\partial G}$ функций f, аналитических в G и таких, что существует такая ограниченная функция g на ∂G, что

$$f(z) = (\mathcal{K}^+_G g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} g(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G.$$

В этом пространстве будем рассматривать следующую норму

$$\|f\|_{\mathcal{K}^+ L^\infty_{\partial G}} \overset{def}{=} \inf\left\{\|g\|_{L^\infty(\partial G)} : f = \mathcal{K}^+ g\right\}.$$

Обозначим символом $R_n(f)$ расстояние от функции f до множества $\mathcal{R}_n$ в норме $\mathcal{K}^+ L^\infty_{\partial G}$, т.е.

$$R_n(f)=\inf\left\{\|f-r\|_{\mathcal{K}^+ L^\infty_{\partial G}} : r\in\mathcal{R}_n\right\}.$$

Следующая теорема позволяет дать явное описание функций, имеющих заданное убывание чисел $R_n(f)$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $f\in\mathcal{K}^+ L^\infty_{\partial G}$, $1\leqslant p<+\infty$. Следующие утверждения эквивалентны

I) $\sum\limits_{n\geqslant 0}(R_n(f))^p<+\infty$,

2) $f\in A_p^{1/p}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эту теорему мы получим как следствие теоремы А из Введения. Действительно, легко видеть, что достаточно доказать, что преобразование Фабера $T^G_{\mathbb{D}}$ (см. § 2) обладает следующими свойствами:

а) $T^G_{\mathbb{D}} A^{1/p}_p = A^{1/p}_p(G)$; б) $T^G_{\mathbb{D}} BMO_A = \mathcal{K}^+ L^\infty_{\partial G}$ в) $T^G_{\mathbb{D}}\mathcal{R}^{\mathbb{D}}_n=\mathcal{R}^G_n$.

Утверждение а) доказано Е.М.Дынькиным в [6]. Утверждение б) очевидно, так как, если $g\in L^\infty(\mathbb{T})$, $f\in\mathbb{P}_+g$, то $T^G_{\mathbb{D}}f=\mathcal{K}^+_G(g\circ\varphi)$, где φ – конформное отображение $\hat{\mathbb{C}}\setminus\operatorname{clos}G$ на $\hat{\mathbb{C}}\setminus\operatorname{clos}\mathbb{D}$.

Для доказательства утверждения в) достаточно проверить, что

$$T^G_{\mathbb{D}}\frac{1}{(z-\lambda)^n}=\frac{1}{\varphi^n(\lambda)}\,\frac{1}{(z-\varphi^{-1}(\lambda))^n},\ \lambda\in\mathbb{C},\quad T^G_{\mathbb{D}}z^n=\frac{1}{\varphi^{(n)}(\infty)}z^n.$$

Но это очевидно, так как

$$T^G_{\mathbb{D}}\frac{1}{(z-\lambda)^n}=\mathcal{K}^+_G\frac{1}{(\varphi(z)-\lambda)^n}=\mathcal{K}^+_G\left(\frac{1}{(\varphi(z)-\lambda)^n}-\frac{1}{\varphi^{(n)}(\lambda)}\,\frac{1}{(z-\varphi^{-1}(\lambda))^n}\right)+\frac{1}{\varphi^n(\lambda)}\mathcal{K}^+_G\frac{1}{(z-\varphi^{-1}(\lambda))^n}.$$

Теперь осталось заметить, что первое слагаемое в правой части равенства равно нулю, а второе – равно $\frac{1}{\varphi^{(n)}(\lambda)}\,\frac{1}{z-\varphi^{-1}(\lambda)}$. Аналогично доказывается равенство $T^G_{\mathbb{D}}z^n=\frac{1}{\varphi^{(n)}(\infty)}z^n$.

Сформулируем также еще один вариант теоремы I. Пусть $\widetilde{\mathcal{R}}_n$ – множество рациональных функций вне ∂G и таких, что сумма кратностей их полюсов в $\hat{\mathbb{C}}\setminus\operatorname{clos}G$ не превосходит n. (Количество полюсов в G не ограничивается). Расстояние функций до множества $\widetilde{\mathcal{R}}_n$ будем измерять в равномерной норме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f - аналитическая функция в G и непрерывная в $\operatorname{clos} G$, $1 \leqslant p < +\infty$. Следующие утверждения равносильны:

1) $\sum\limits_{n \geqslant 0} \left(\operatorname{dist}_{L^\infty(\partial G)}(f, \widetilde{\mathcal{R}}_n)\right)^p < +\infty$.

2) $f \in A_p^{1/p}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что в условиях теоремы

$$R_n(f) = \operatorname{dist}_{L^\infty(\partial G)}(f, \widetilde{\mathcal{R}}_n). \quad \bullet$$

§ 4. Рациональная аппроксимация на отрезке

Здесь мы рассмотрим случай функций на отрезке $\Delta = [-1, 1]$. Пусть $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n^\Delta$ - множество рациональных функций, с полюсами вне Δ, сумма кратностей которых не превосходит n.

Для функции f из BMO $[-1, 1]$ положим

$$r_n(f) = \operatorname{dist}_{BMO}(f, \mathcal{R}_n)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in BMO\,[-1, 1]$, $1 \leqslant p < +\infty$. Тогда

$$\sum_{n \geqslant 0} (r_n(f))^p < +\infty$$

в том и только в том случае, когда $f \in B_p^{1/p}[-1, 1]$.

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся следующим утверждением.

ТЕОРЕМА (P. Jones). Пусть h - возрастающая функция на $\mathbb{R}$, являющаяся гомеоморфизмом. Тогда следующие утверждения равносильны:

а) $f \circ h \in BMO(\mathbb{R})$ для всякой функции f из BMO $(\mathbb{R})$

б) Существуют числа $C_1, C_2 > 0$, $p \geqslant 1$, $q \leqslant 1$ такие, что для всякого интервала I и для всякого борелевского подмножества $E \subset I$ имеет место неравенство

$$C_1 \left(\frac{|E|}{|I|}\right)^p \leqslant \frac{|h(E)|}{|h(I)|} \leqslant C_2 \left(\frac{|E|}{|I|}\right)^\delta.$$

Это утверждение было доказано П.Джонсом (неопубликовано). Нам понадобится только импликация б) $\Longrightarrow$ а), ее доказательство можно извлечь из работы Е.М.Дынькина [14].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Так же, как и при доказательстве теоремы I, достаточно показать, что

$$T_{\mathbb{D}}^{\Delta} A_p^{1/p} = B_p^{1/p}[-1,1]\,;\ T_{\mathbb{D}}^{\Delta} \mathcal{R}_n^{\mathbb{D}} = \mathcal{R}_n^{\Delta}\,;\ T_{\mathbb{D}}^{\Delta} BMO_A = BMO[-1,1]\,.$$

Первое утверждение доказано Е.М.Дынькиным [6], второе доказывается так же, как в теореме I. Покажем, что $T_{\mathbb{D}}^{\Delta} BMO_A = BMO[-1,1]$.

Пусть сначала $f \in BMO[-1,1]$. Установим, что $T_{\Delta}^{\mathbb{D}} f \in BMO_A$. Положим $g(e^{i\theta}) = f(\arccos\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $g(e^{i\theta}) = g(e^{-i\theta})$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant 0$. Тогда $T_{\Delta}^{\mathbb{D}} f = \mathbb{P}_+ g$.

Пусть $\tilde{g}(\theta) \overset{\text{def}}{=} g(e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Легко проверить, что из теоремы П.Джонса вытекает, что $\tilde{g} \in BMO[0,\pi]$, так как функция $\theta \longrightarrow -\arccos\theta$ может быть продолжена до гомеоморфизма $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющего условиям этой теоремы.

Отсюда вытекает, что $g \in BMO$, так как четное продолжение функции из ВМО сохраняет класс ВМО. Следовательно, $T_{\Delta}^{\mathbb{D}} f = \mathbb{P}_+ g \in BMO$. Таким образом, мы доказали, что $T_{\mathbb{D}}^{\Delta} BMO_A \supset BMO[-1,1]$.

Покажем, что $T_{\mathbb{D}}^{\Delta} BMO_A \subset BMO[-1,1]$. Пусть $F \in BMO_A$. Тогда

$$(T_{\mathbb{D}}^{\Delta} F)(x) = \frac{1}{2}\left(F\circ\varphi^{+}(x) + F\circ\varphi^{-}(x)\right) + \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-1}^{1}\left(F\circ\varphi^{+}(t) - F\circ\varphi^{-}(t)\right)\frac{dt}{t-x},\quad x \in [-1,1],$$

где φ – конформное отображение $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ на $\hat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{clos}\mathbb{D}$ (см.§ 2).

Пусть G – такая аналитическая функция вне круга $\mathbb{D}$ такая, что $G(\infty) = 0$ и $H = F + G$ – ограниченная функция на $\mathbb{T}$. Ввиду того, что функция $G\circ\varphi$ аналитична в $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ и $G\circ\varphi(\infty) = 0$ легко видеть, что

$$\frac{1}{2}\left(G\circ\varphi^{+}(x) + G\circ\varphi^{-}(x)\right) + \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-1}^{1}\left(G\circ\varphi^{+}(t) - G\circ\varphi^{-}(t)\right)\frac{dt}{t-x} \equiv 0,\quad x \in [-1,1].$$

Следовательно,

$$(T_{\mathbb{D}}^{\Delta} F)(x) = \frac{1}{2}\left(H\circ\varphi^{+}(x) + H\circ\varphi^{-}(x)\right) + \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-1}^{1}\left(H\circ\varphi^{+}(t) - H\circ\varphi^{-}(t)\right)\frac{dt}{t-x},\quad x \in [-1,1].$$

Отсюда заключаем, что функция $T_{\mathbb{D}}^{\Delta} F$ равна сумме ограниченной функции и функции, сопряженной к ограниченной. Следовательно,

$T_{\mathbb{D}}^{\Delta} F \in BMO[-1,1]$. ●

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что мы доказали, что $T_{\Delta}^{\mathbb{D}} BMO[-1,1] \subset BMO_A$ и что всякую функцию из $T_{\mathbb{D}}^{\Delta} BMO_A$ можно представить в виде $g+\tilde{h}\,|\,[-1,1]$, где $g \in L^{\infty}[-1,1]$, $h \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} h \subset [-1,1]$. Следовательно, мы можем заключить, что

$$BMO[-1,1]=\{g+\tilde{h}\,|\,[-1,1] : g \in L^{\infty}[-1,1],\ h \in L^{\infty}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h\ [-1,1]\}.$$

Сравнивая это утверждение с хорошо известной характеризацией пространства $BMO[-1,1]$

$$BMO[-1,1]=\{g+\tilde{h}\,|\,[-1,1] : g \in L^{\infty}[-1,1],\ h \in L^{\infty}(\mathbb{R})\},$$

мы можем сформулировать любопытное следствие.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Тогда существует такая функция $g \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} g \subset [-1,1]$ такая, что $(\widetilde{g+f})\,|\,[-1,1] \in L^{\infty}[-1,1]$. ●

Поскольку норма BMO $[-I,I]$ слабее нормы L^{∞}, то можно сформулировать следующую обратную теорему теории наилучших приближений в равномерной метрике.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in L^{\infty}[-1,1]$, $1 \leqslant p < +\infty$. Если

$$\sum_{n \geqslant 0} \left(dist_{L^{\infty}}(f, \mathcal{R}_n^{\Delta})\right)^p < +\infty,$$

то $f \in B_p^{1/p}[-1,1]$.

В частности, при $p=1$ получаем результат более сильный, чем теорема Е.П.Долженко [3], которая утверждает, что если $\sum_{n \geqslant 0} dist_{L^{\infty}}(f, \mathcal{R}_n^{\Delta}) < +\infty$, то f – абсолютно непрерывная функция.

Литература

I. Мергелян С.Н. Некоторые вопросы конструктивной теории функций. – Труды Матем.ин-та им.В.А.Стеклова, I95I, 37.

2. Гончар А.А. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций. – Труды междун.конгресса математиков (Москва I966) "Мир", I968, 329-356.

3. Долженко Е.П. Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций. – Матем.сб., I962, 56, № 4, 403-434.

4. Б р у д н ы й Ю.А. Рациональная аппроксимация и теоремы вложения. – Докл.АН СССР, 1979, 247, № 2, 269–272.
5. П е л л е р В.В. Операторы Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов). – Матем.сб., 1980, 113, № 4, 538–581.
6. Д ы н ь к и н Е.М. Конструктивная характеристика классов С.Л.Соболева и О.В.Бесова. – Труды Матем.ин-та им.В.А.Стеклова, 1981, 155, 41–76.
7. F e f f e r m a n C., S t e i n E.M. H^p spaces of several variables. – Acta Math., 1972, 129, 137–193.
8. K o o s i s P. Introduction to H^p spaces. – London Math. Soc.Sect.Note series 40, Cambridge Univ.Press, 1980.
9. G a r n e t t J. Bounded analytic functions. AP, N.-Y., London, 1981.
10. Н и к о л ь с к и й С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М., Наука, 1977.
11. С т е й н И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., Мир, 1973.
12. Б р у д н ы й Ю.А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений. – Труды Моск.мат.об-ва, 1971, 24, 69–132.
13. П р и в а л о в И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.–Л., ГИТТЛ, 1950.
14. Д ы н ь к и н Е.М. Оценки аналитических функций в жордановых областях. – Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1977, 73, 70–90.

V.V.Peller. Rational approximation and smoothness of functions

Summary

For a compact set K on the complex plane and a Banach space X of functions on K the numbers $r_n^X(f)$, $f \in X$, are defined by

$$r_n^X(f) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_X \|f - r\|_X ,$$

the infimum being taken over all rational functions $r = p/q$ where $\deg p \leqslant n$, $\deg q \leqslant n$ and q does not vanisch on K. The question is to compare the smoothess of f with the speed of decreasing of $r_n^X(f)$.

Two cases are considered: 1) $\operatorname{int} K$ is a Jordan domain with Lipschitzian boundary, $X = \mathcal{K}^+_{L^\infty \partial G} = \{f : f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{g(s)}{s-z}\,ds,\ g \in L^\infty(\partial G)\}$; 2) $K = [-1,1]$, $X = BMO[-1,1]$. It is proved that $\sum_n (r_n^X)^p < +\infty$ if and only if f belongs to the Besov class $B_p^{1/p}$.