

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Селина, Аналитический подход к задаче рассеяния электромагнитной волны на цилиндрическом отверстии в тонком металлическом экране,  
*Компьютерная оптика*, 2023, том 47, выпуск 4, 548–558

<https://www.mathnet.ru/co1154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

18 апреля 2025 г., 10:47:48



## Аналитический подход к задаче рассеяния электромагнитной волны на цилиндрическом отверстии в тонком металлическом экране

Н.В. Селина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Кубанский государственный технологический университет,  
350000, Россия, г. Краснодар, ул. Московская, д. 2

### Аннотация

Предложен метод аналитического исследования металлической пленки, перфорированной цилиндрическими наноотверстиями, как основы метаповерхности. Формулы полностью определяют электромагнитное поле рассеянной на отверстии плоской волны на любом расстоянии от поверхности. Произведен расчет по аналитическим формулам спектров пропускания и поглощения исследуемой структуры, а также зависимости фазы рассеянной волны от радиуса отверстия. Результаты расчета согласуются с литературными данными расчета эффективности фотодетектора на основе полупроводниковой слоистой среды с квантовыми точками и интервала изменения фазы света, рассеянного на метаатомах, необходимого для создания линзы.

**Ключевые слова:** металлическая пленка с цилиндрическими наноотверстиями, плазмонный резонанс, метаатом, метаповерхность.

**Цитирование:** Селина, Н.В. Аналитический подход к задаче рассеяния электромагнитной волны на цилиндрическом отверстии в тонком металлическом экране / Н.В. Селина // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 4. – С. 548-558. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1218.

**Citation:** Selina NV. Analytical approach to the problem of electromagnetic wave scattering by a cylindrical hole in a thin metal screen. Computer Optics 2023; 47(4): 548-558. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1218.

### Введение

История становления эвристической мысли, развития знаний и умений человечества привела в настоящее время к тому, что человеку доступно не только создание искусственных сред с особыми свойствами, не встречающимися в природе, но и успешное их применение в решении конструктивных задач, которые не имеют других доступных решений.

Композитные материалы с особыми оптическими свойствами называются метаматериалами, а элементы структуры, из которых они состоят, – метаатомами. Особые свойства метаматериалов определяются резонансным характером рассеяния света на метаатомах. Резонансное электромагнитное поле волны, рассеянной на элементах структуры материала, меняется скачком на границах раздела сред-компонентов, поэтому волна имеет измененные по отношению к рассеиваемому излучению фазу и амплитуду. Эта особенность метаматериалов дает возможность управлять светом при помощи оптических элементов, из них изготовленных [1, 2].

Объемный метаматериал достаточно сложен в изготовлении, к тому же в среде объемного метаматериала усилено поглощение света. Указанные проблемы решаются с использованием метаповерхностей, понятие которых появилось в научной литературе в последние годы [1–4]. Свойства метаповерхностей определяются не только особенностью метаматериала, из которого изготовлена тонкая пленка, представ-

ляющая собой метаповерхность, но и резонансами в наноструктурированном тонком слое.

В литературе приведены результаты исследования оптических свойств металлодиэлектрических наноструктур с цилиндрической границей раздела сред, с использованием различных моделей и математического аппарата [5–17]. Общая теоретическая задача вычисления пропускания света тонкой металлической пленкой с наноотверстием (массивом отверстий) имеет два аспекта. Первый – исследование оптических свойств одиночной металлической проволоки, окруженной диэлектриком, или наноразмерной цилиндрической полости в металле. Если речь идет о массиве периодически расположенных цилиндрических отверстий в пленке, то исследуется двумерный фотонный кристалл (штыревой импедансный кристалл или плазмонный кристалл на основе нанотрубок и нанопроволок). Перфорированная пленка – фотонный кристалл, ограниченный в продольном направлении, в связи с чем возникает второй аспект задачи – расчет оптических передаточных характеристик слоистой плоскопараллельной среды. В данной задаче рассматривается металлический нанослой между диэлектрическими полупространствами. Конечный результат теоретического исследования рассеяния света на тонкой металлической пленке, перфорированной наноотверстиями цилиндрической формы, должен быть обусловлен решениями двух перечисленных оптических задач.

В последние десятилетия оба аспекта активно обсуждались в научной литературе. Оптические свой-

ства металлической проволоки, помещенной в диэлектрическое пространство, впервые были исследованы и объяснены в 1899 г. Зоммерфельдом [7]. Показано, что на поверхности раздела сред в такой структуре возбуждаются плазмонные поверхностные электромагнитные волны.

Рассмотренные в работах [8–9] решения задачи исследования квадратного двумерного металлодиэлектрического фотонного кристалла с цилиндрическими включениями дают хороший результат для бесконечного по длине массива проволок, но некоторые из сделанных предположений ограничивают применение таких решений для фотонного кристалла, ограниченного в продольном направлении, то есть нужна альтернативная теория массива нанотверстий в пленке или адаптация приведенных выше методов к рассматриваемой в настоящей статье задаче.

В рамках рассмотрения второго аспекта задачи исследования проводились многими учеными и на сегодняшний день есть аналитическое решение задачи [10]. Оба аспекта задачи соединены в работе [11], где объясняются три причинных фактора экстраординарного прохождения света через тонкую металлическую пленку, перфорированную цилиндрическими отверстиями.

Отверстие цилиндрической формы в тонкой металлической пленке рассматривалось и позднее [12], где применен расчет в квазистатическом приближении.

Все перечисленные подходы к теоретическому исследованию металлической пленки, перфорированной цилиндрическими отверстиями, хотя и содержат приближение, но в определенных условиях позволяют рассчитать резонансные свойства и параметры структуры, а значит, прогнозировать характеристики структуры при конструировании новых плазмонных устройств. В силу положенных приближений и сложности математического аппарата моделей, полуаналитический расчет по рассмотренным подходам ограничен в общем применении и не так прост в выполнении.

Здесь перспективной выступает альтернативная теория фотонных кристаллов, общая для плоской, цилиндрической и сферической симметрий [13–16]. В работах [13–14] предложенным методом исследуется слоистая плоская структура, в работах [15–16] – бесконечная по длине проволоки цилиндрическая многослойная структура. В настоящей работе в том же подходе объединены два результата. Математически рассчитаны конечные формулы для пропускания и поглощения света, падающего нормально на тонкую пленку, перфорированную цилиндрическим отверстием. На примере конструкции фотодетектора с напыленной на фотоэлемент перфорированной золотой пленкой, рассчитаны спектры пропускания и поглощения итоговой структуры. Рассчитана также зависимость скачка фазы рассеянной на цилиндрическом отверстии волны, результат которой применяет-

ся при проектировании рефрактивных линз повышенного качества с использованием метаматериалов.

### 1. Теоретическое решение задачи. Обзор известных моделей

Рассмотрим задачу рассеяния света тонкой металлической пленкой с цилиндрическим отверстием (массивом отверстий), которая, как уже упоминалось, имеет два аспекта: расчет бесконечной структуры с цилиндрическими включениями и одномерной трехслойной структуры. В результате возможен расчет ограниченного в продольном направлении двумерного фотонного кристалла.

Первое основополагающее теоретическое исследование металлодиэлектрической структуры цилиндрической симметрии, проведенное Зоммерфельдом, – это теория дифракции электромагнитной волны на тонкой металлической проволоке, где показано, что на поверхности раздела сред в такой структуре возбуждаются плазмонные поверхностные электромагнитные волны [7]. Дисперсионное соотношение определяет две дисперсионные ветви решений.

Наиболее универсальным в исследовании периодических бесконечных структур с цилиндрическими включениями является метод объемных интегральных уравнений, учитывающий внутренние поля [8–9]. В нем применяется периодическая функция Грина. Сложная структура интегралов позволяет аналитически решить задачу лишь в некотором приближении. В числе математических приближений можно отметить, что в [8] рассматривается замена функции Бесселя конечным числом членов ряда, её определяющего, а в [9] используется асимптотическое представление интегралов Вейля–Зоммерфельда.

В качестве способа решения второго аспекта задачи в теоретических исследованиях часто применяется метод передаточной матрицы для слоистых сред [10]. Для плоской трехслойной среды работает известная формула, определяющая пропускание такой структуры. Формула учитывает выполнение сопряжения тангенциальных компонент полей на плоских границах слоев:

$$T = \frac{t_1 t_2 \exp(iqh)}{1 - r_1 r_2 \exp(iqh)}, \quad (1)$$

где  $t_1$ ,  $t_2$  – пропускание на первой и второй границах раздела слоев;  $r_1$ ,  $r_2$  – отражение на первой и второй границах слоев соответственно,  $q$  – волновой вектор падающего на структуру излучения;  $h$  – толщина среднего слоя. В работе [11] рассмотрена непосредственно задача пропускания света тонкой металлической пленкой с цилиндрическими отверстиями, где объясняются три причинных фактора экстраординарного прохождения света через такую структуру:

1. Экстремумы в спектрах волноводной структуры – бесконечной цилиндрической полости в металле.

2. Минимумы мнимой компоненты волнового вектора в металле, определяемые его диэлектрической проницаемостью, так называемые «окна прозрачности» металла.

3. Возбуждение плазмонов на задней грани пленки, включающих в случае массива отверстий блоховские волны.

Общее решение для волновода включает все подерживаемые моды, но, как показано в [11, 15], из мод ненулевого порядка по азимутальному модовому числу подавляющее преимущество по амплитуде имеет мода TE<sub>11</sub>, моды нулевого порядка при нормальном падении световой волны на плоскую границу пленки не возбуждаются. Поэтому в [11] рассматривается только выделенная мода, а также дается обоснование такого выбора.

Исследование цельной структуры в [11] использует формулу (1) для расчета пропускания света пленкой с отверстиями. Также там показано, что в условиях определенных размеров компонентов рассматриваемой структуры (диаметр отверстия < 100 нм, период кристалла – порядка 300–400 нм) волноводные свойства массива отверстий с большой точностью совпадают со свойствами единичного отверстия, поэтому в расчетах нужно учитывать сумму полей во всех отверстиях, каждое слагаемое которой – поле единичного отверстия.

Обращаясь к альтернативной теории исследования одномерных фотонных кристаллов различной симметрии, можно также объединить два аспекта решения рассматриваемой задачи. Здесь в случае цилиндрической симметрии, вместо неудобной для расчета табулированной функции Бесселя, используется функция, неявно заданная общим интегралом дифференциального уравнения Бесселя. Значения функции Бесселя удовлетворяют общему интегралу. Общий интеграл включает только аналитические функции, поэтому численный расчет значений неявно заданной функции не требует больших затрат вычислительного ресурса. Дисперсионное соотношение двухкомпонентного фотонного кристалла для всех трех симметрий имеет простой и схожий вид.

Модели одномерного фотонного кристалла плоской и цилиндрической симметрии подробно исследованы в работах [13–16]. Приведем основные результаты такого подхода к решению рассматриваемых задач (двух аспектов центральной в настоящей статье задачи). Для плоской трехслойной среды – это результаты работы [14].

Распространение электромагнитной волны в неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(x, y, z)$  определяется решением уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} -\partial \mathbf{B} / \partial t &= \text{rot} \mathbf{E}, \\ \partial \mathbf{D} / \partial t &= \text{rot} \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H}, \\ \mathbf{E} &= \epsilon \epsilon_0 \mathbf{D}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  – индукции магнитного и электрического поля соответственно;  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  – напряженности магнитного и электрического поля соответственно,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon$ ,  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Исключение из них векторных функций  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  приводит к волновому уравнению:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{H} + \frac{1}{\epsilon} (\text{grad} \epsilon \times \text{rot} \mathbf{H}) &= -\epsilon k_0^2 \mathbf{H}, \\ k_0^2 &= \omega^2 / c^2, \\ c^2 &= 1 / \mu_0 \epsilon_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнение (2) решалось для плоскополяризованной ТМ-волны. Металлическая пленка – среда из одного слоя (среда 1), расположенного между двумя диэлектрическими полупространствами (среда 2).

Рассмотрим основные результаты, полученные в работе [14] (вектор напряженности магнитного поля направлен вдоль оси Y, плоскость XOY параллельна грани пленки и делит пленку пополам; ось Z перпендикулярна пленке; в таком рассмотрении характеристики волны не зависят от переменной y). С целью их получения были введены обозначения:

$$\begin{aligned} (\epsilon_1 \cdot \epsilon H_y) \partial H_y / \partial z &= k_1 \tan(a(z)), \\ k_1 &= (\epsilon_1 k_0^2 - k_x^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $k_x$  – x-компонента волнового вектора;  $k_1$  – z-компонента волнового вектора электромагнитной волны в среде номер 1, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  принимает два значения:

$$\begin{aligned} \epsilon(z) &= \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) T(z), \\ T(z) &= \begin{cases} 1, \epsilon(z) = \epsilon_2, \\ 0, \epsilon(z) = \epsilon_1, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  – диэлектрические проницаемости сред номер 1 и номер 2 соответственно.

Окончательная формула для напряженности магнитного поля волны:

$$\begin{aligned} H_y(x, z) &= \exp \left( \int_0^z k_1 \tan(a(y)) dy \right) \cos(k_x x) = \\ &= \cos(a(z)) \cos(k_x x), \end{aligned}$$

где

$$a(z) = \begin{cases} k_1 z, & -\delta < z < \delta \\ k_2(z - \delta) + \arctan \left( \frac{\epsilon_2 k_1}{\epsilon_1 k_2} \tan(a(\delta)) \right), & |z| > \delta, \end{cases}$$

$2\delta$  – толщина пленки,  $k_2$  – z-компонента волнового вектора электромагнитной волны в среде номер 2

$$k_2 = (\epsilon_2 k_0^2 - k_x^2)^{1/2}.$$

Дисперсионное соотношение плазмонного резонанса:

$$\frac{\epsilon_2 k_1}{\epsilon_1 k_2} \tan(a(\delta)) = -i. \quad (3)$$

Откуда следует формула для напряженности магнитного поля волны во втором компоненте двухкомпонентной среды:

$$H_y(x, z) = \frac{\cos(k_1(z - \delta)) \cos(k_x x)}{\sqrt{1 + \left( \frac{\epsilon_1 k_2}{\epsilon_2 k_1} \right)^2 - 1} \cos^2(a(\delta))}.$$

Отверстия в перфорированной пленке можно моделировать с помощью метода, предложенного в работе [15], где представлен расчет дисперсионной картины цилиндрического волновода. Расчет проведен в цилиндрической системе координат.

Уравнение (2) для азимутальной компоненты лапласиана вектор-функции напряженности магнитного поля запишется в виде:

$$\Delta H_\varphi - \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \left( \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) - \frac{H_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = -H_\varphi \epsilon k_0^2. \quad (4)$$

Представим азимутальную компоненту магнитного поля в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной из цилиндрических координат, причем зависимость от координаты  $z$  экспоненциальная (постоянная распространения волны  $k_z$ ):

$$H_\varphi(z, r, \varphi) = \exp(ik_z z) R(r) \Phi(\varphi).$$

Применяя метод разделения переменных, получаем два уравнения: для  $\Phi(\varphi)$  и  $R(r)$ . Функция, зависящая от угловой переменной, определяется уравнением:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Phi.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\Phi = \text{const} \exp(\pm im\varphi). \quad (5)$$

Соотношение радиальной и угловой компонент магнитного поля удобно определить записью общего решения уравнения (4) через циклические координаты (циклические орты  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_{-1}$  [17]):

$$\mathbf{H} = H_\varphi \mathbf{e}_\varphi + H_r \mathbf{e}_r = \frac{(H_r - iH_\varphi) \exp(-i\varphi) \mathbf{e}_1 - (H_r + iH_\varphi) \exp(i\varphi) \mathbf{e}_{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Общее решение линейного уравнения (4) можно записать как линейную комбинацию двух циклических компонент. Для решения, содержащего только одну из компонент, справедливо одно из равенств:

$H_r = iH_\varphi$  или  $H_r = -iH_\varphi$ . Первое из них соответствует знаку плюс в угловой функции (5), второе – знаку минус. Выбор знака плюс приводит к следующему преобразованию уравнения (4):

$$\frac{\partial^2 (Rr^{-m})}{\partial r^2} + \frac{2m+1}{r} \frac{\partial (Rr^{-m})}{\partial r} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \frac{\partial (Rr^{-m})}{\partial r} - \frac{(2m+1)r^{m-1}}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} R = -Rr^{-m} k_r^2. \quad (6)$$

Здесь радиальная компонента волнового вектора определена равенством:

$$k_r^2 = \epsilon k_0^2 - k_z^2.$$

Далее решение выражено новой функцией  $a(r)$ , определяемой равенством:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon(r)} \frac{1}{Rr^{-m}} \frac{\partial (Rr^{-m})}{\partial r} = -k_{r1} \tan(a(r) + C),$$

где  $C$  – константа, равная 0 или  $\pi/2$ .

В таком обозначении уравнение (6) можно привести к виду:

$$\frac{da}{dr} = k_{r1} \pm \frac{(2m+1) \sin(2a(r))}{2r}. \quad (7)$$

Исследование уравнения (6) приводит к двум равенствам, определяющим правило дифференцирования для решения уравнения (7):

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\sin(a+C)}{r^{\pm(m+1/2)}} \right) = k_{r1} \frac{\cos(a+C)}{r^{\pm(m+1/2)}}. \quad (8)$$

Интегрирование уравнения (7) согласно правилу (8) приводит к уравнениям, неявно определяющим функцию  $a(r)$  для азимутального модового числа  $m = 0$  и числа  $m = -1$  в волне ТМ-поляризации:

$$a(r) = k_{r1} \pm \frac{\sin(a)^2}{2k_{r1}r}. \quad (9)$$

Точно такое уравнение справедливо и для мод циклической волны  $TE_{01}$  и  $TE_{11}$  [15].

Окончательное решение для однородной среды (моды  $TM_{01}$ ,  $TM_{11}$ ):

$$H_\varphi(r) = R(r) \exp(i\varphi) \exp(ik_z z),$$

(моды  $TE_{01}$ ,  $TE_{11}$ ):

$$E_r(r) = R(r) \exp(i\varphi) \exp(ik_z z),$$

$$R(r) = \text{const} \frac{\sin(a(r))}{\sqrt{r}}.$$

Используем приведенные выше обозначения для диэлектрической проницаемости двухкомпонентной среды. Вывод формул для двухкомпонентной среды цилиндрической симметрии аналогичен выводу соответствующих формул плоской симметрии. Дисперсионное соотношение аналогично (3):

$$\frac{\epsilon_2 k_1}{\epsilon_1 k_2} \tan(a(d)) = -i, \tag{10}$$

где  $d$  – радиус границы раздела сердцевины и оболочки.

В среде 2 (оболочке) функция фазы также неявно определяется равенствами:

$$a(r) = \Delta a(r-d) + \arctan\left(\frac{\epsilon_2 k_1}{\epsilon_1 k_2} \tan(a(d))\right),$$

$$\Delta a(r-d) = k_2(r-d) - \frac{\sin^2(a(r))}{2k_2 r} + \frac{\sin^2(a(d))}{2k_1 d}.$$

Откуда следуют формулы, определяющие решение для двухкомпонентной среды в среде-компоненте 2:

$$R(r) = \frac{const}{\sqrt{r}} \frac{\sin(\Delta a(r-d))}{\sqrt{1 + \left(\left(\frac{\epsilon_1 k_2}{\epsilon_2 k_1}\right)^2 - 1\right) \cos^2(a(d))}}.$$

**2. Теоретическое решение задачи. Вывод конечных результатов**

Вычислим основные оптические характеристики серебряной пленки, перфорированной цилиндрическими отверстиями.

Сначала рассчитаем интенсивность волны в точке  $P$ , находящейся на расстоянии  $\Delta$  от оси цилиндрического отверстия, перпендикулярной плоскости пленки, и на расстоянии  $b$  от границы пленки (рис. 1).

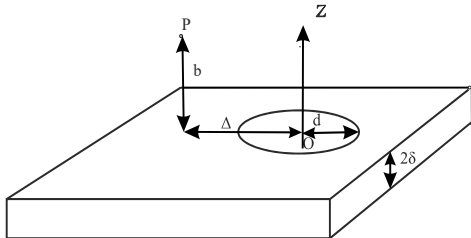


Рис. 1. Схематическое изображение металлического экрана с цилиндрическим отверстием, основные обозначения оси отверстия, расстояний до точки наблюдения и размеров структуры

Для вычисления интенсивности света, прошедшего через отверстие, используем метод дифракционного интеграла. Амплитуда суммарной волны в точке  $P$ , излучаемой внешней поверхностью пленки и отверстием, то есть всеми источниками, расположенными в плоскости  $z = \delta$ , которую обозначим символом  $\sigma$ :

$$J = \int_{\sigma} J_0(\varphi, r) \frac{\exp(ik_0 R)}{R} dS, \tag{11}$$

$J_0(\varphi, r)$  – распределение амплитуды электромагнитной волны (напряженность электрического или магнитного поля).

$$R = \sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}.$$

Подставляя это выражение в формулу (11), записывая интеграл для выходной поверхности отверстия

и внешней металлической поверхности пленки, приходим к равенству:

$$J = \int_0^d \int_0^{2\pi} J_{01}(\varphi, r) \frac{\exp(ik_0 \sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)})}{\sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}} r dr d\varphi + \int_d^{\infty} \int_0^{2\pi} J_{02}(\varphi, r) \frac{\exp(ik_0 \sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)})}{\sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}} r dr d\varphi,$$

где  $J_{01}(r, \varphi)$  – амплитуда волны, прошедшей через отверстие, в выходной плоскости,  $J_{02}(r, \varphi)$  – амплитуда плазмонной волны на выходной грани пленки.

Будем полагать, что интенсивность волны равномерно распределена в выходной плоскости отверстия.

В структурах, в которых возбуждаются одновременно и продольный, и поперечный резонансы, поле плазмонной волны на поверхности металлической части выходной грани пленки зависит от радиальной и угловой координат только лишь изменением расстояния, пройденного плазмоном. Таким образом, амплитуда волны на выходной грани рассматриваемой структуры в металлической её части зависит от координат согласно соотношению:

$$J_{02}(\varphi, r) = const \exp(-ik_{sp}(r-d)).$$

Рассчитаем интеграл (11) в этом предположении, обозначим соответствующие интегралы по площадям отверстия и металлической поверхности пленки соответственно  $J_1$  и  $J_2$ . Далее числовой множитель перед интегралами для сокращения записи будем полагать равным единице:

$$J_1 = \int_0^d \int_0^{2\pi} \frac{\exp(ik_0 \sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)})}{\sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}} r dr d\varphi,$$

$$J_2 = \int_d^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp(-ik_{sp} r) \times \frac{\exp(ik_0 \sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)})}{\sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}} r dr d\varphi.$$

Сначала рассмотрим интеграл  $J_2$ . Интеграл по угловой переменной обозначим:

$$F(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\left(k_0 \sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}\right)}{\sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}} d\varphi,$$

$$G(r) = \int_0^{2\pi} \frac{i \sin\left(k_0 \sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}\right)}{\sqrt{b^2 + \Delta^2 + r^2 - 2\Delta r \cos(\varphi)}} d\varphi.$$

Для того, чтобы перейти от интегрирования по угловой переменной к интегрированию на комплексной плоскости, необходимо представить подынтегральную функцию в виде ряда рациональных относительно  $\cos(\varphi)$  членов. Разложим экспоненту в степенной

ряд на всей области её определения, интеграл от суммы степенных функций  $g^\alpha$  ( $g = b^2 + \Delta^2 + r^2 - \Delta r \cos(\varphi)$ ) с целым значением  $\alpha$  после замены  $2\cos(\varphi) = z + z^{-1}$  сразу можно записать как интеграл по комплексной переменной. Такой интеграл по кругу единичного радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости обозначим символом  $W_1$ . Оставшийся интеграл от суммы степенных функций  $g^\alpha$  с полужелым  $\alpha$  обозначим символом  $W_2$ .

В первую очередь рассмотрим интеграл  $W_1$ :

$$W_1 = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \left( \frac{ik_0}{z} + \frac{(ik_0)^3}{3!z} + \frac{(ik_0)^5}{5!z} \right) dz.$$

Раскрывая бином Ньютона и вычисляя вычет от каждого из полученных слагаемых, приходим к выражению для интеграла  $W_1$ :

$$W_1 = 2\pi \left\{ \frac{ik_0(b^2 + \Delta^2 + r^2)}{3!} + \frac{(ik_0)^3 \sum_{k=2, l=2}^{\infty} \frac{2!}{l!l!k!} (b^2 + \Delta^2 + r^2)^k (r\Delta)^{2l}}{5!} + \dots \right\}.$$

Заменим коэффициент в разложении бинома  $(z+1/z)^{2l}$  при нулевой степени  $z$ , применяя формулу Стирлинга:

$$\sqrt[2l]{\frac{2l!}{l!l!}} = \frac{\sqrt[2l]{2l!}}{\sqrt[l]{l!}} \approx 2.$$

Погрешность такой замены не превышает 30%, она резко снижается с увеличением  $l$ , и для больших значений степени  $l$  близка к нулю. После проведения такой замены можно свернуть ряд интегралов:

$$W_1 = \pi \left[ \frac{\sin(k_0 \sqrt{b^2 + g_1^2})}{\sqrt{b^2 + g_1^2}} + \frac{\sin(k_0 \sqrt{b^2 + g_2^2})}{\sqrt{b^2 + g_2^2}} \right],$$

$$g_1 = \Delta + r, g_2 = \Delta - r.$$

В интеграле  $W_2$  нужно разложить в ряд также множитель  $g^{-1/2}$ . Вычисление вычетов подынтегральной функции в интегральном ряде  $W_2$  приводит к сумме членов вида:

$$\sum_{k+2l=N} \frac{N!}{l!l!k!} (b^2 + \Delta^2 + r^2)^k (r\Delta)^{2l}$$

с различными значениями  $N$ . Снова применим формулу Стирлинга и свернем интегральный ряд:

$$W_2 = \pi \left[ \frac{\cos(k_0 \sqrt{b^2 + g_1^2})}{\sqrt{b^2 + g_1^2}} + \frac{\cos(k_0 \sqrt{b^2 + g_2^2})}{\sqrt{b^2 + g_2^2}} \right]. \quad (12)$$

Сравнивая вид формул для функций  $F(r)$ ,  $G(r)$  с формулами для  $W_1$  и  $W_2$ , приходим к выводу: при-

ближение работает, когда графики функций  $F(r)$  и  $W_2$ , а также функций  $G(r)$  и  $W_1$  попарно совпадают. На рис. 2 показаны три пары кривых, где сплошные серые кривые вычислены численно для интеграла  $F(r)$ , а черные пунктирные кривые построены по формуле (12). Все кривые построены с учетом равенства  $k_0\Delta = 1$ , значения констант  $k_0b$  для различных пар кривых разные. Линии каждой пары кривых близки. Уменьшение величины  $k_0\Delta$  приводит к лучшему совпадению между собой парных кривых, увеличение такой величины приводит к расхождению кривых в парах, и оно только увеличивается с возрастанием  $k_0\Delta$ . Таким образом, справедливость замены по формуле Стирлинга ограничивается критерием:  $k_0\Delta < 1$ .

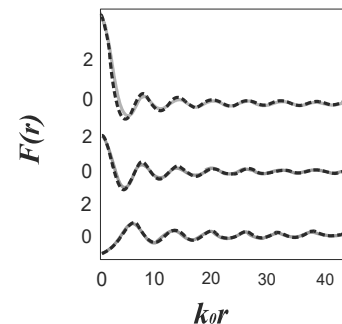


Рис. 2. Графики зависимости  $F(r)$ , рассчитанные численно (серые сплошные линии) и по формуле (12) (черные пунктирные линии). Для значений:  $k_0\Delta = 1$ ,  $k_0b = 0$  (верхняя вставка),  $k_0b = 2$  (средняя вставка),  $k_0b = 5$  (нижняя вставка)

В практически важных случаях плазмонные устройства работают в ближнем поле излучения, где условия физико-математической задачи удовлетворяют критерию  $k_0\Delta < 1$ . Поэтому в настоящей статье для рассмотрения приведенных моделей сделана замена интеграла  $F(r)$  и  $G(r)$  на функции  $W_2$  и  $W_1$ .

Окончательно для интеграла  $J_2$  получаем формулу:

$$J_2 = \pi \int_d^\infty \exp(-ik_{sp}r) \left[ \frac{\exp(ik_0 \sqrt{b_2 + g_1^2})}{\sqrt{b_2 + g_1^2}} + \frac{\exp(ik_0 \sqrt{b_2 + g_2^2})}{\sqrt{b_2 + g_2^2}} \right] r dr.$$

Вычислим одно из слагаемых в последнем выражении, обозначим его символом  $I_2$ . Сделаем в рассматриваемом интеграле замену переменной, позволяющую свести его к функции Бесселя:

$$I_2 = \int_d^\infty \exp(-ik_{sp}r) \frac{\exp(ik_0 \sqrt{b_2 + g_1^2})}{\sqrt{b_2 + g_1^2}} r dr = \left[ \frac{g_1/b = \sinh(x)}{\sqrt{1+(g_1/b)^2} = \cosh(x)} \right] = \frac{\exp(ik_{sp}\Delta)}{2i} \times \int_{\operatorname{arcsinh}(\Delta/b)}^\infty (b \sinh(x) - \Delta) \exp(ik_0 b \cosh(x) - ik_{sp} b \sinh(x)) dx.$$

В приближении:

$$\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\Delta}{b}\right) < 1 \ll \operatorname{arccoth}\left(\frac{k_0}{k_{sp}}\right),$$

справедливом в условиях плазмонного резонанса, приходим к равенству:

$$I_2 = \frac{i}{2} \exp(ik_{sp}\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} k_0 \Delta \exp(ik_r b \cosh(x)) dx + \frac{i}{2} \exp(ik_{sp}\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{sp} k_0 b}{\sqrt{k_0^2 - k_{sp}^2}} \exp(ik_r b \cosh(x)) \cosh(x) dx.$$

Применяя аналогичные преобразования к остальным слагаемым в уравнении, определяющем интеграл  $J_2$ , приходим к равенству для полного интеграла  $J_2$ :

$$J_2 = \pi k_0 \times \left( \sin(k_{sp}\Delta) \Delta K_0(ik_r b) + \frac{bk_{sp}}{ik_r} \cos(k_{sp}\Delta) K_1(ik_r b) \right), \quad (13)$$

где  $K_n(x)$  – модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка.

Перейдем к определению интеграла  $J_1$ . Здесь также применим метод интегрирования на комплексной плоскости по окружности радиуса 1 и замену коэффициента по формуле Стирлинга. Результат имеет вид:

$$J_1 = \int_0^d \left[ \frac{\exp\left(ik_0\sqrt{b^2 + (\Delta + r)^2}\right)}{\sqrt{b^2 + (\Delta + r)^2}} + \frac{\exp\left(ik_0\sqrt{b^2 + (\Delta - r)^2}\right)}{\sqrt{b^2 + (\Delta - r)^2}} \right] \pi r dr.$$

Ввиду малости отверстия, интеграл приближенно записывается в виде:

$$J_1 = \left( \frac{\exp\left(ik_0\sqrt{b^2 + (\Delta + d)^2}\right)}{\sqrt{b^2 + (\Delta + d)^2}} + \frac{\exp\left(ik_0\sqrt{b^2 + (\Delta - d)^2}\right)}{\sqrt{b^2 + (\Delta - d)^2}} \right) \frac{k_0 \pi d^2}{2}. \quad (14)$$

### 3. Фотодетектор на основе полупроводниковой слоистой структуры с квантовыми ямами, дополненный металлическим слоем, перфорированным цилиндрическими отверстиями

Металлоповерхность с цилиндрическими отверстиями улучшает оптические характеристики и эффективность полупроводниковых электрооптических устройств. Например, перфорированный металлический слой, напыленный на многослойную полупроводниковую структуру, в десятки раз увеличивает чувствительность фотодетектора на её основе [18 – 19].

Для того, чтобы спроектировать фотодетектор, дополненный металлоповерхностью, необходима теория расчета резонансов в металлодиэлектрической структуре либо результаты численного расчета структуры с заданными параметрами. Более универсальным представляется вариативный анализ теоретических формул, поэтому далее рассмотрим применение полученных в параграфе 2 формул к расчету пропускания и поглощения фотодетектора с напыленной на фотоэлемент перфорированной металлической пленкой.

Как было отмечено в параграфе 1, амплитуды электрического и магнитного поля излучения в каждом отверстии из массива и в одиночном отверстии, перфорирующей металлическую пленку, для рассматриваемых в [11] размеров структуры (диаметр отверстия < 100 нм и период решетки – порядка 300 нм) совпадают с относительной погрешностью  $e^{-8}$ . Применение фотодетектора предполагает нормальное падение электромагнитной волны на фотоэлемент, поэтому фаза волны в каждом из отверстий массива, как и в одиночном отверстии, совпадают. Таким образом, спектр пропускания пленки с массивом отверстий представляет наложение спектров пропускания каждого отверстия и может быть учтено множителем, равным числу отверстий (в [18] их 25).

Однако всё же спектр пленки с массивом отверстий имеет дополнительные по отношению к спектру пленки с одиночным отверстием особенности. Любая разрешенная зона плазмонного фотонного кристалла либо одномерного многослойного, либо двумерного с периодически расположенными одинаковыми включениями ограничена дисперсионными кривыми одной повторяющейся в пространстве ячейки. Волновой вектор таких волн в квадратной решетке с периодом  $p$  рассчитывается по формуле:

$$k_{sp} = k_{tan} + (\mathbf{e}_x n_x + \mathbf{e}_y n_y) \frac{2\pi}{p},$$

где  $e_x, e_y$  – орты декартовой системы координат,  $n_x, n_y$  – целые числа, изменяющиеся в пределах количества ячеек в массиве,  $k_{tan}$  – тангенциальная компонента волнового вектора собственной (плазмонной) моды структуры или падающей из свободного пространства на структуру волны. Чем больше числа  $n_x, n_y$ , тем плотнее заполнение зоны, в случае бесконечной периодической структуры любой размерности зоны непрерывные.

В интервале спектра волнового вектора падающего на фотоэлемент излучения  $k_0$ : [4 мкм<sup>-1</sup>, 6 мкм<sup>-1</sup>] интервал изменения для рассчитанных значений волнового вектора плазмонов  $k_{sp}$ : [19 мкм<sup>-1</sup>, 21 мкм<sup>-1</sup>]. Пары чисел ( $k_0, k_{sp}$ ), имеющие такие значения, являются одновременно решениями двух дисперсионных уравнений (3, 10). Для структуры с массивом отверстий дополнительные точки разрешенной зоны на фазовой диаграмме, ограниченные на вертикальной оси



$k_0$  числами  $4 \text{ мкм}^{-1}$  и  $6 \text{ мкм}^{-1}$ , с точностью 5% группируются вблизи дисперсионной кривой одного отверстия в металлической пленке. Тем самым увеличивается плотность состояний на диаграмме, но характеристики волны во всех областях структуры изменяются мало (в рамках ширины рассчитанного интервала).

Оптическая теория для одиночного отверстия здесь работает хорошо, и расчетную энергию электромагнитной волны за экраном, отнесенную к энергии падающего излучения (пропускание), так же как и относительную энергию возбужденных плазмонов (поглощение), можно получить из аналитических дисперсионных зависимостей для такой структуры в плазмонном пределе.

При нормальном падении света на пленку моды трехслойной структуры «диэлектрик-металл-диэлектрик» не возбуждаются. Однако в случае больших значений  $k_{sp}$  на дальних от начала координат участках фазовой диаграммы разрешенная зона многослойной металлодиэлектрической структуры вырождается в дисперсионную кривую плазмонов на границе «металл-диэлектрик». При этом сохраняются формулы (13 – 14), но дисперсионное уравнение имеет предельные значения своих членов:

$$\tan(k_1 \delta) = -i \frac{k_2 \epsilon_1}{k_1 \epsilon_2} \Rightarrow 1 + \frac{k_2 \epsilon_1}{k_1 \epsilon_2} = 0.$$

Переход обусловлен приближенным равенством:  $\tan(k_1 \delta) \approx i$ , справедливым в пределе:  $\text{Im}(k_1 \delta) \gg 10$ .

Плазмоны на выходной границе пленки в таком случае могут появиться только посредством туннелирования через отверстие. Если волновой вектор плазмонов равен резонансному  $k_{sp}$ , то длина их пробега резко увеличивается и вклад излучаемой ими энергии существенен по сравнению с пропусканием отверстия. В противном случае вклад ничтожно мал.

Напряженность магнитного поля волны в структуре тонкого металлического экрана с отверстием или без него согласно рассматриваемой в статье теории равна произведению поля в координатной плоскости, делящей экран пополам, и множителя  $g = (1 + \alpha^{-2} \tan^2(k_2 \delta))^{-1/2}$ . Здесь введено обозначение:  $\alpha = \epsilon_1 k_2 / \epsilon_2 k_1$ . Поэтому пропускание рассматриваемой структуры определяется произведением множителя  $g$  и результата интегрирования поля волны на внешней грани экрана по переменной  $\Delta$  (считая  $z = \delta$ ) на интервале  $0 < \Delta < \infty$ . Кроме того, формула для пропускания экрана с отверстием должна учитывать цилиндрические плазмоны на грани отверстия, перетекающие в плоские волны. В этом случае, исходя из результатов теории для цилиндрической структуры, рассматриваемой в статье, пропускание должно быть умножено на выражение  $g_{cyl} = (1 + \alpha^2 \tan^2(a(d)))^{-1/2}$ . Ещё в качестве слагаемого нужно учесть пропускание отверстия, конечная формула имеет вид:

$$T = \frac{\pi k_0^2 K_0(0) g g_{cyl}}{k_{sp}^2} + (\cos(k_0 d) - 1). \tag{15}$$

Далее приведем алгоритм расчета. Резонансная фаза плазмонной волны на границе цилиндра определяется уравнением (9). Подставляя в него резонансное значение фазы волны, вычисленное из дисперсионного соотношения, получаем уравнение, связывающее волновые векторы  $k_0$ ,  $k_{sp}$ , а также геометрические и материальные параметры волноводной (плазмонной) структуры:

$$a(d) = \arctan\left(-\frac{\epsilon_2 k_1}{\epsilon_1 k_2} i\right) = k_1 d + \frac{1}{2k_1 d} \left( \frac{(\epsilon_2 k_1)^2}{(\epsilon_2 k_1)^2 - (\epsilon_1 k_2)^2} \right). \tag{16}$$

Из этого уравнения определяется волновой вектор плазмонов. Непосредственный численный расчет спектра пропускания структуры в цикле осложнен неявным заданием значения  $k_{sp}$ . Здесь применялся следующий алгоритм вычислений в программе MATLAB: задать двумерную сетку переменных  $k_0$ ,  $k_{sp}$ ; рассчитать функцию  $T(k_0, k_{sp})$  для каждой пары значений  $k_0$ ,  $k_{sp}$ ; с помощью функции `contour` ( $k_0, T, Z=0$ ) построить график контура трехмерной поверхности, задаваемый условием:

$$Z = \arctan\left(\frac{\epsilon_2 k_1}{\epsilon_1 k_2} i\right) + k_1 d + \frac{1}{2k_1 d} \left( \frac{(\epsilon_2 k_1)^2}{(\epsilon_2 k_1)^2 - (\epsilon_1 k_2)^2} \right).$$

На рис. 3 показана зависимость пропускания фотодетектора с метаслоем и без него. Данные расчета полупроводниковой структуры взяты из работы [18], формула расчета пропускания металлической пленки с цилиндрическими отверстиями следует из (13 – 15).

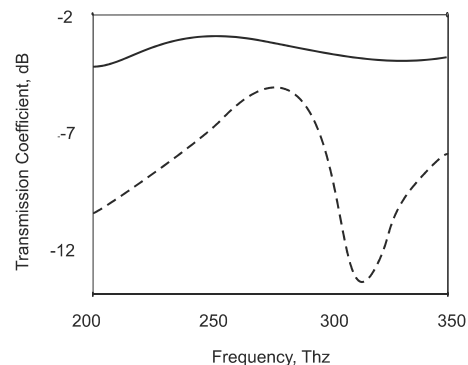


Рис. 3. Участок спектра пропускания электромагнитных волн фотодетектором на полупроводниковой слоистой основе с квантовыми ямами (черная сплошная линия), а также аналогичной структуры с напыленной на внешний слой перфорированной цилиндрическими отверстиями золотой пленкой (пунктирная линия). Параметры структуры: радиус отверстия – 60 нм, толщина пленки – 100 нм, диэлектрическая проницаемость полупроводниковой гетероструктуры – 11, для расчета диэлектрической проницаемости металла использовалась модель Друде, параметры металла:  $\omega_{pl} = 9 \text{ эВ}$ ,  $\tau = 25 \text{ фс}$

Поглощение в среде с коэффициентом поглощения  $k$  на отрезке пути длиной  $l$  рассчитывается по закону Бугера–Ламберта:

$$G = 1 - \exp(-kl).$$

В цилиндрическом отверстии поглощение равно:

$$G_1 = 1 - \exp(-\text{Im}(k_{sp})2\delta).$$

Поглощение также происходит при распространении на внешней плоской грани металлического слоя плоских плазмонных волн, вытекающих из внешней круглой границы отверстия. Постоянная распространения, равная волновому вектору вытекающих плазмонов, сохраняется.

Считая, что поглощение происходит при распространении плазмонных волн в отверстии и на выходной границе (резонанс на входной границе не дает вклад в пропускание структуры [11]), определим долю энергии, локализованную вблизи указанных металлodieлектрических границ раздела сред. Это первая часть энергии (в пересчете на единичную энергию падающей волны), локализованная на плоской границе пленки, как в случае пленки с отверстием, так и в его отсутствие:  $T_1 = (1 + (\alpha^2 - 1) \cos^2(k_{z1} \delta))^{-1}$ . Вторая часть энергии в области поглощения – это энергия, локализованная на цилиндрической границе отверстия:  $T_2 = (1 + (\alpha^{-2} - 1) \cos^2(a(d)))^{-1}$ . Поглощение в отверстии рассчитывается как  $T_2 \times G_1$ , поглощение на плоской границе пленки  $T_1$ , поскольку плазмонная волна на бесконечности полностью затухает.

Поглощение энергии плазмонов в отверстии и на плоской границе в рамках их свободного пробега, то есть для всей структуры, определяется выражением:

$$G_{tot} = 1 - \frac{\exp(-2 \text{Im}(k_{sp} \delta))(1 + (\alpha^2 - 1) \cos^2(k_{z1} \delta))}{2 + (\alpha^2 - 1) \cos^2(k_{z1} \delta) + (\alpha^{-2} - 1) \cos^2(a(d))}. \quad (17)$$

На рис. 4 приведен график зависимости поглощения фотодетектора с напыленным металлическим слоем, построенный по формуле (17), и без него [18]. Максимумы на первом из графиков отвечают соответственно резонансов в цилиндрическом отверстии и плоском металлическом слое.

Сравнение результатов двух графических иллюстраций расчетов спектров пропускания и поглощения фотодетектора – по аналитической формуле и численного (соответствующие рисунки в работе [18]), приводит к заключению: аналитический расчет дает более тонкие и высокие минимумы в пропускании (максимумы в спектре поглощения), а их положение на двух графиках совпадает:  $k_0 \approx 300$  ТГц. Анализ графиков, приведенных в настоящей статье и статье [18], свидетельствует о достоверности результатов теоретических расчетов пропускания и поглощения слоистой структуры со слоем, перфорированным цилиндрическим отверстием.

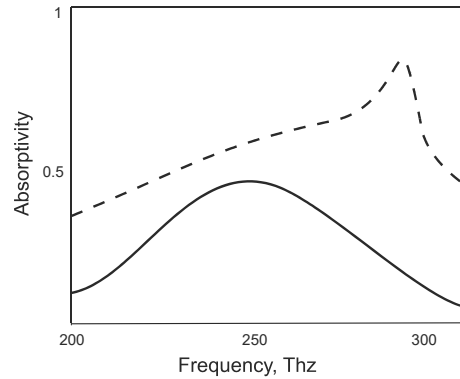


Рис. 4. Участок спектра поглощения электромагнитных волн фотодетектором на полупроводниковой слоистой основе с квантовыми ямами (сплошная линия), а также аналогичной структуры с напыленной на внешний слой перфорированной цилиндрическими отверстиями золотой пленкой (пунктирная линия). Параметры структуры: радиус отверстия – 60 нм, толщина пленки – 100 нм, диэлектрическая проницаемость полупроводниковой гетероструктуры – 11, для расчета диэлектрической проницаемости металла использовалась модель Друде, параметры металла:  $\omega_{pl} = 9$  эВ,  $\tau = 25$  фс

#### 4. Линза на основе тонкой золотой пленки, перфорированной цилиндрическими отверстиями

Оптические приборы и устройства способны управлять светом, изменяя его амплитуду, фазу и частоту. Для достижения нужного результата в формировании оптической картины регулируется интенсивность и направление излучения. В результате наложения контролируемых волн формируется интерференционная картина, где фаза и интенсивность каждого компонента играет свою роль.

Управление светом в оптических системах осуществляется посредством преобразования электромагнитных волн оптическими элементами: рефракционными (линза, призма) и дифракционными (дифракционные решетки, зонные пластины, голографические пластины). Среди недостатков рефракционных оптических элементов нужно отметить искажения, вносимые дисперсией материалов, дифракционных – искажения оптической картины, вносимые нежелательными дифракционными максимумами.

Действие рефракционных и дифракционных оптических элементов без искажений может осуществляться нужным образом сформированными метаповерхностями. Например, в линзе на основе золотой пленки, перфорированной цилиндрическими отверстиями, цилиндрические полости разного диаметра располагались по линиям концентрических окружностей [20]. Интервал фазы, перекрываемый изменением радиуса отверстия от 50 нм до 100 нм, составил  $[0, 2.5]$ . Необходимый интервал:  $[0, 2\pi]$ . Чтобы работал половинный интервал, отверстия располагались в нечетных зонах Френеля. В работе [20] рассчитана зависимость скачка фазы рассеянной волны в интервале  $[0, 2.5]$ , а не  $[0, \pi]$ , что связано с трудностями расчета. Здесь приведен расчет также для интервала

[0, 2, 5], поскольку проводится графический анализ двух результатов. Трудностей для расчета половинного интервала в представленной в настоящей статье теории нет.

В настоящей статье представлен результат расчета зависимости фазы рассеяния света на отверстии от его радиуса, произведенный по формулам предлагаемой теории.

Используем уравнение (16) для определения волнового вектора плазмонов. В условиях плазмонного резонанса ( $\tan(a(d)) = -i \times \epsilon_1 k_2 / \epsilon_2 k_1$ ) интенсивность света, прошедшего через отверстие, много меньше интенсивности света, излучаемого плазмонами. Поэтому разность фаз рассеянной отверстием и падающей на него волны практически полностью определяется формулой:

$$\varphi = \operatorname{Re} \left( \arctan \left( \frac{\epsilon_2 k_1}{\epsilon_1 k_2} i \right) \right). \quad (18)$$

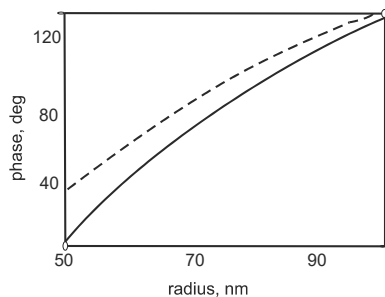


Рис. 5. График зависимости изменения фазы электромагнитной волны при рассеянии её на цилиндрическом отверстии [20], сплошная линия, рассчитанный по формуле (18), пунктирная линия. Параметры структуры: диэлектрическая проницаемость граничащей с пленкой среды 1: 1,5; длина волны излучения – 531 нм, для расчета диэлектрической проницаемости металла использовалась модель Друде, параметры металла:  $\omega_{pl} = 9 \text{ эВ}$ ,  $\tau = 25 \text{ фс}$

На рис. 5 представлен результат расчета. Сравнительный анализ графиков на рис. 5 приводит к выводу: графики не демонстрируют полного совпадения, хотя кривые подобны. Несовпадение, по-видимому, можно объяснить разным моделированием диэлектрической проницаемости металла, к вариации параметров которого график, рассчитанный по формуле (18), чувствителен.

### Выводы

В статье представлена теория рассеяния электромагнитной волны на цилиндрическом отверстии в тонкой металлической пленке. Для расчета применен принцип Гюйгенса–Френеля. В силу крайней малости отверстия в рассматриваемой физико-математической модели металлическая часть пленки, которая и вносит существенный вклад в поле за пленкой, бесконечна и является почти сплошной. Для такого рассмотрения конечные формулы (6–7) плазмонного вклада в поле за экраном верны на любом расстоянии от отверстия.

В статье рассчитаны графики спектров пропускания и поглощения рассматриваемой структуры, а также зависимости фазы рассеянной волны от радиуса цилиндрической полости. Близость графиков рассчитанных двумя методами (численным и аналитическим), свидетельствует о достоверности результатов теоретического анализа модели цилиндрического отверстия в металлической пленке, представленного в настоящей статье.

### References

- [1] Remnev MA, Klimov VV. Metasurfaces: a new look at Maxwell's equations and new ways to control light. *Physics–Uspekhi* 2018; 61(2): 157-190. DOI: 10.3367/UFNe.2017.08.038192.
- [2] Hsiao HH, Chu CH, Tsai DP. Fundamentals and applications of metasurfaces. *Small Methods* 2017; 1(4): 1600064.
- [3] Zhang XG, Yu Q. Polarization-controlled dual-programmable metasurfaces. *Adv Sci* 2020; 7(11): 1903382. DOI: 10.1002/advs. 201903382.
- [4] Nikolaev NA, Rybak AA, Kuznetsov SA. Application of metasurface-based low-pass filters for improving THz-TDS characteristics. *J Phys Conf Ser* 2020; 1461: 012118. DOI: 10.1088/1742-6596/1461/1/012118.
- [5] Heng H, Wang R. Electromagnetic resonant properties of metal-dielectric-metal (MDM) cylindrical microcavities. *Photonics Sens* 2017; 7(2): 148-156.
- [6] de Abajo FJG. Light transmission through a single cylindrical hole in a metallic film. *Opt Express* 2002; 10(25): 1475-1484.
- [7] Sommerfeld A. Über die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes. *Analen der Physik* 1899; 303(2): 233-290.
- [8] Davidovich MV, Nefedov IS. Space-time dispersion and waveguide properties of two-dimensional periodic rod metallic photonic crystals [In Russian]. *JETP* 2014; 145(5): 771-786.
- [9] Grishina NV, Eremin YuA, Svshnikov AG. Analysis of spectral scattering properties of a nano-hole in a film [In Russian]. *VMU. Physics. Astronomy* 2009; 1: 32-36.
- [10] Born M, Wolf E. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. ISBN: 0-521-64222-1.
- [11] Zyablovsky AA, Pavlov AA, Klimov VV, Pukhov AA, Dorofeenko AV, Vinogradov AP, Lisyansky AA. Extraordinary passage of light through a metal film perforated with a lattice of subwavelength holes [In Russian]. *JETP* 2017; 152(2): 211-226. DOI:10.7868/S0044451017080016.
- [12] Anyutin AP. Plasmon Resonances in Circular and Elliptic Nanocylinders Made of Premium Metals. *Journal of Communications Technology and Electronics* 2021; 66(3): 259-265. DOI:10.1134/S1064226921030025.
- [13] Selina NV, Tumayev EN. Propagation of electromagnetic wave in Pendry lens. *Nanotechnol Russ* 2016; 11(5-6): 349-354. DOI: 10.1134/S1995078016030149.
- [14] Selina NV. Light transmission of a thin metal screen with an infinite array of periodic nanoslits. *Opt Spectrosc* 2019; 127: 700-705. DOI: 10.1134/s0030400x19100266.
- [15] Selina N. Solution of Maxwell's equations for cylindrical symmetry waveguides. *J Appl Math Phys* 2020; 8(5): 753-765. DOI: 10.4236/jamp.2020.85058.
- [16] Selina NV. Quasi-one-dimensional cylindrical surface plasmon-polaritons [In Russian]. *Nanostructures. Mathematical Physics and Modeling* 2018; 18(1): 45-64.

- [17] Varshalovich DA, Moskalev AN, Khersonsky VK. Quantum theory of angular momentum [In Russian]. Leningrad: "Nauka" Publisher; 1975.
- [18] Liu H, Kang Y, Meng T, Tian C, Wei G. High photon absorptivity of quantum dot infrared photodetectors achieved by the surface plasmon effect of metal nanohole array. *Nanoscale Res Lett* 2020; 15: 98. DOI: 10.1186/s11671-020-03326-9.
- [19] Yakimov AI, Kiriyyenko VV, Armbrister VA, Dvurechenskiy AV. Selective amplification of the photocurrent of holes by surface plasmon-polaritons in layers of quantum dots Ge/Si. *JETP Lett* 2017; 105(7): 419-423. DOI. <https://doi.org/10.1134/S002136401707013X>.
- [20] Ishii S, Shalaev VM, Kildishev AV. Holey-metal lenses: sieving single modes with proper phases. *Nano Lett* 2013; 13: 159-163. DOI: 10.1021/nl303841n.

---

***Сведения об авторе***

**Селина Наталья Викторовна**, 1973 года рождения, в 1994 году окончила физический факультет Кубанского государственного университета, работает доцентом кафедры общей математики Кубанского государственного технологического университета. Область научных интересов: нанофотоника, наноплазмоника.  
E-mail: [selina\\_natalia@mail.ru](mailto:selina_natalia@mail.ru).

---

ГРНТИ: 29.31.27

*Поступила в редакцию 5 сентября 2022 г. Окончательный вариант – 5 февраля 2023 г.*

---

---

# Analytical approach to the problem of electromagnetic wave scattering by a cylindrical hole in a thin metal screen

N.V. Selina<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Kuban State Technological University, Russia, 350000, Krasnodar, Moskovskaya str. 2*

## *Abstract*

A method of analytical study of a metal film perforated by cylindrical nanoholes as the basis of a metasurface has been proposed. The formulas deduced completely determine the electromagnetic field of a wave scattered by the hole at any distance from the surface. The calculation of the transmission and absorption spectra of the studied structure, as well as the dependence of the phase of the scattered wave on the radius of the hole, is carried out using analytical formulas. The calculation results are consistent with the literature data for calculating the efficiency of a quantum photodetector and the phase change interval of light scattered by meta-atoms required for lens design.

**Keywords:** metal film with cylindrical nanoholes, plasmon resonance, meta-atom, metasurface.

**Citation:** Selina NV. Analytical approach to the problem of electromagnetic wave scattering by a cylindrical hole in a thin metal screen. *Computer Optics* 2023; 47(4): 548-558. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1218.

---

## *Author's information*

**Natalia Viktorovna Selina**, (b. 1973), graduated from Physics department of Kuban State University in 1994, works as an associate professor of General Mathematics department of the Kuban State Technological University. Research interests: nanophotonics, nanoplasmonics. E-mail: [selina\\_natalia@mail.ru](mailto:selina_natalia@mail.ru).

---

*Received September 5, 2022. The final version – February 5, 2023.*

---