V. G. Zhuravlev, A. A. Yudin, Random walks on plane crystallographic groups, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2001, Volume 276, 204–218

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

**В. Г. Журавлев, А. А. Юдин**

# СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА ПЛОСКИХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУППАХ

## Введение

**1.** Первоначально математическая постановка задачи о случайном блуждании – физической задачи о диффузии – броуновском движении – относилась к блужданиям по простой кубической решетке $\mathbb{Z}^d$ размерности $d$. Только для малых размерностей $d \leqslant 2$ блуждания оказались возвратными: с вероятностью 1 точка возвращается в начало и при этом бесконечно много раз ( проблема Пойа).

**2.** Для общей группы $G$ (необязательно коммутативной) задача формулируется следующим образом. Пусть $\mu$ – вероятностная мера на счетной группе $G$ и $Y_1$, $Y_2, \dots$ – независимые одинаково $\mu$-распределенные случайные величины со значениями из $G$. Последовательность $X_0 = g_0$, $X_1 = Y_1 g_0, \dots, X_n = Y_n \cdots Y_1 g_0, \dots$ называется случайным блужданием на группе $G$ с началом в точке $g_0 \in G$. Блуждание возвратное, если с вероятностью 1 какое-то из $X_1, \dots, X_n \dots$ окажется равным $X_0$. Избегая тривиальных случаев, предполагаем, что исходная группа $G$ совпадает с порождаемой $\operatorname{supp}\mu$ подгруппой $G_\mu$, т.е. любой элемент из $G_\mu$ есть произведение конечного числа элементов из носителя меры $\mu$.

Когда группа $G$ возвратная или, другими словами, когда $G$ допускает возвратное блуждание?

**3.** Ближе всего к $\mathbb{Z}^d$ находятся кристаллографические группы $G = G^d$ (см. [2–4] для $d = 2, 3$ и $d \geqslant 4$; также см. книгу для физиков [5]). Они содержат нормальные подгруппы трансляций $G_{tp}$, абстрактно (без использования метрики) изоморфные $\mathbb{Z}^d$ с конечными фактор-группами $F = G/G_{tp}$. Это свойство позволяет факторизовать блуждания по кристаллографической группе на

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 99-01-00070).

блуждания 1) по трансляционной группе $G_{tp} \approx \mathbb{Z}^d$ и 2) по конечной точечной группе $F$. В предлагаемой работе приводится метод, последовательно использующий характеристические функции и матрицы вероятностей перехода из теории конечных цепей Маркова. Возникает резольвента

$$R(z,a) = (E - zT(a))^{-1}, \quad |z| \leqslant 1, \quad a \in [0,1), \tag{1}$$

где

$$T(a) = \sum_{i=1}^{s} p_i T_{g_i}(a)$$

– порождающий оператор, $g_1, \ldots, g_s$ – образующие группы $G$, $\mu = \{p_i\}_{i=1}^s$ – распределение вероятностей, $T_{g_i}(a)$ – функциональные аналоги матриц перехода. Если обозначить $F_i$ вероятность возвращения в точку $g_i$, то выполняется формула

$$\operatorname{diag}(F_1, \ldots, F_s) = E - \left[\operatorname{diag} \int_0^1 \cdots \int_0^1 R(1,a)\, da\right]^{-1}. \tag{2}$$

Свойство группы $G$ быть возвратной зависит от локального поведения резольвенты (1) в окрестности $a = 0$ при $z = 1$.

**4.** Применение формулы (2) к двумерным кристаллографическим группам $G = G^2_{kp}$ [2], [3] (из них только $p1 \approx \mathbb{Z}^2$ коммутативная, см. таблицу 1) показывает, что все они возвратные. В последнем столбце таблицы 1 указано зависит или нет возвратность случайного блуждания по группе $G$ от выбора вероятностной меры $\mu = \{p_i\}_{i=1}^s$ при условии $G = G_\mu$.

**5.** Моделью в статье выбрана некоммутативная группа $G = pgg$,порождаемая двумя перпендикулярными скользящими отражениями $O$,$P$ с кодом

$$(P * O)^2 = (P^{-1} * O)^2 = E.$$

Ее фактор-группа $F = pgg/G_{tp}$ имеет порядок 4 (см. таблицу 1). Геометрически случайное блуждание на группах $G = G^d_{kp}$ удобно представлять как блуждание на ориентированных графах. Для группы $pgg$ вершины графа суть вершины решетки $\mathbb{Z}^2$. Из каждой вершины выходят горизонтальное $O$-ребро и вертикальное

$P$-ребро. В начале координат,отвечающему единичному элементу $E$, ребра представляют обычный репер. Движение на один шаг вдоль любого ребра меняет направление другого на противоположное. Пусть частица совершает случайные блуждания по графу группы $pgg$ с вероятностями перехода $p_1$ по $O$-ребру и $p_2$ по $P$-ребру.

Таблица 1

| No. | Обозначение группы | Сингония | Коммутативность | Порядок группы $F$ | Количество образующих | Зависимость от $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $p1$ | общая | комм. | 1 | 4 | зависит |
| 2 | $p2$ | –”– | некомм. | 2 | 3 | не зав. |
| 3 | $pm$ | прям. | –”– | 2 | 4 | зависит |
| 4 | $pg$ | –”– | –”– | 2 | 4 | –”– |
| 5 | $cm$ | –”– | –”– | 2 | 3 | –”– |
| 6 | $pmm$ | –”– | –”– | 4 | 4 | не зав. |
| 7 | $pmg$ | –”– | –”– | 4 | 3 | –”– |
| 8 | $pgg$ | –”– | –”– | 4 | 2 | –”– |
| 9 | $cmm$ | –”– | –”– | 4 | 3 | –”– |
| 10 | $p4$ | квадр. | –”– | 4 | 2 | –”– |
| 11 | $p4$ | –”– | –”– | 8 | 3 | –”– |
| 12 | $p4g$ | –”– | –”– | 8 | 2 | –”– |
| 13 | $p3$ | гекс. | –”– | 3 | 3 | –”– |
| 14 | $p3m1$ | –”– | –”– | 6 | 3 | –”– |
| 15 | $p31m$ | –”– | –”– | 6 | 2 | –”– |
| 16 | $p6$ | –”– | –”– | 6 | 2 | –”– |
| 17 | $p6m$ | –”– | –”– | 12 | 3 | –”– |

В п. 2.5 доказана следующая теорема:

**Теорема.** *Случайное блуждание по графу группы $pgg$ возвратно тогда и только тогда, когда его вероятности перехода удовлетворяют условию $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$ или, что равносильно, условию $pgg = pgg_\mu$ для меры $\mu = \{p_1, p_2\}$.*

На матрицах утверждение о возвратности случайного блуждания принимает следующую формулировку. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$

независимо принимают значения

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

с вероятностями $p_1$ и $p_2$, $p_1 + p_2 = 1$. Если $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$, то в последовательности матриц $X_1 = Y_1, \ldots, X_n = Y_n \cdots Y_1, \ldots$ с вероятностью 1 встречается единичная матрица $E$, причем это происходит бесконечно часто.

**6.** Используемый для группы $G = pgg$ метод матричных характеристических функций непосредственно распространяется на кристаллографические группы $G = G^d_{kp}$ любой размерности $d$ [4]. Он позволяет выразить формулой (3) вероятности возвращения через резольвенту $R(z, a)$ (2). Однако применение формулы (3), скажем, к 230 трехмерным пространным группам $G^3_{kp}$ возможно только для нескольких исключительных простых групп, близких к группе $G \approx \mathbb{Z}^3$. Дальнейшее продвижение видится на пути диагонализации резольвенты $R(z, a)$ с использованием неприводимых представлений федоровских групп [6], но это задача уже другой статьи.

Авторы благодарят профессора В. Г. Рау, привлекшего их внимание к кристаллографическим группам.

## §1. Кристаллографическая группа $pgg$

**1.1.** Рассуждение проведем для группы $G = pgg$. В обозначении $g$ – от английского слова “glide” – скольжение. Она порождается тремя матрицами (см. [3, с. 119, 120])

$$u_1 = \left(\begin{array}{cc:c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline & & 1 \end{array}\right), \quad u_2 = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hdashline & & 1 \end{array}\right),$$

$$u_3 = \left(\begin{array}{cc:c} -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline & & 1 \end{array}\right) \tag{1.1}$$

и подгруппой трансляций $G_{tp}$, состоящей из матриц

$$t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & t_1 \\ 0 & 1 & \vdots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Группа $G$ действует на точки $(x_1, x_2)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad M \in G.$$

$G_{tp}$ можно отождествить с образами $(0,0)$ – квадратной решеткой $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[(1,0),(0,1)]$. Матрицы (1.1) задают: $u_1$ – центральную симметрию относительно $(0,0)$, $u_2$ – скользящее отображение вдоль оси $ox_1$ на вектор $(1/2, 0)$, $u_3$ – осевую симметрию относительно прямой $x_1 = 1/2$. Группа $G = pgg$ под No. 8 из Таблицы 1 относится к прямоугольной сингонии (фундаментальная область $\mathcal{F}_{tp}$ для $G_{tp}$ – прямоугольник). Избегая дробей в (1.1), удобно считать $\mathcal{F}_{tp}$ квадратом со стороной длины 2, сдвинуть начало координат в $(1,0)$ и заменить $u_3$ на

$$u_2' = u_2 u_1 \begin{pmatrix} 1 & & \vdots & 0 \\ & 1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь $O = u_2$ и $P = u_2'$ становятся скользящими отображениями на 1 вдоль осей координат.

На рис. 1a заштрихована фундаментальная область $\mathcal{F}$ всей группы $G$, а $\mathcal{F}_{tp}$ состоит из 4-х экземпляров $\mathcal{F}$. Если знать разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$, представленное на рис. 1a, то сразу можно получить матрицы (3) для $O$ и $P$.

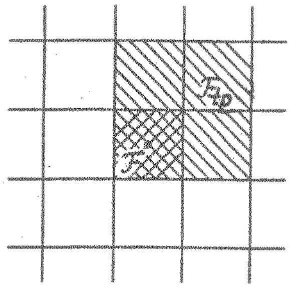


Рис. 1a

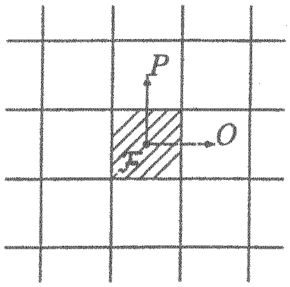



Рис. 1b.

**1.2.** Связь между случайными блужданиями на группе $G$ и плоскости $\mathbb{R}^2$ становится очевидной при рассмотрении графа группы. Если оси симметрий для $O$ и $P$ оставить неподвижными, то граф получится запутанным, т.к. вершины графа, соединенные ребрами, будут удалены друг от друга. Поэтому переходим к пассивным преобразованиям, когда вместо точек двигается система координат, и на месте $(0,0)$ – жирная точка на рис. 1 – поместим единицу $E$ из $G$.

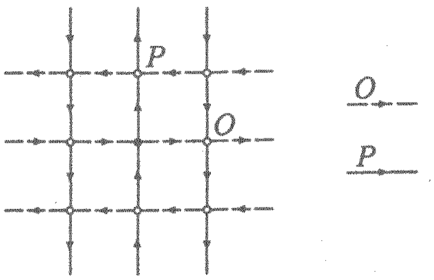
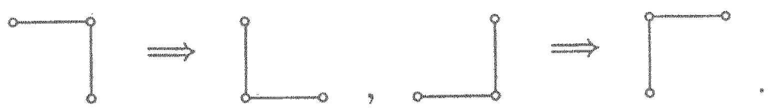



Рис. 2.

На графе (см. рис. 2) кружочки изображают элементы группы $G$ ($\bullet$ – единица $E$, ближайшие $\circ$ – элементы $O$, $P$), а направленные ребра – умножение слева на соответствующий элемент $O$ или $P$. Из рис. 2 видно, что $G$ порождается двумя скользящими отображениями $O$ и $P$. Кратчайшие к $E$ циклы задают код группы $G = pgg$

$$(PO)^2 = (P^{-1}O)^2 = E. \tag{1.2}$$

Таким образом, задача о случайном блуждании на группе $G$ или в матричном виде – задача из п. 5. введения – сведена к ориентированному блужданию на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$. Код (1.2) задает эволюцию случайных траекторий с помощью двух простейших преобразований



**1.3.** Таблица 1 содержит основные характеристики всех семнадцати плоских кристаллографических групп. Сингония – это форма фундаментальной области $\mathcal{F}_{tp} = \mathbb{R}^2/G_{tp}$ подгруппы трансляций $G_{tp}$ из $G$. Порядок точечной группы $F \approx G/G_{tp}$ указывает на сколько фундаментальных областей $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2/G$ разбивается область $\mathcal{F}_{tp}$. Он же совпадает с количеством трансляционно различных вершин графа $G$. Для группы $G = pgg$ порядок $|F|$ равен 4 (см. рис. 1а и рис. 2).

Таблица 1 показывает, что условие $|F| \geqslant 2$ равносильно некоммутативности группы $G$.

В шестом столбце указано количество образующих группы $G$. Так, для изоморфной $\mathbb{Z}^2$ группы $G = p1$ образующих 4: $g_1 = (1,0)$, $g_2 = g_1^{-1} = (-1,0)$, $g_3 = (0,1)$, $g_4 = g_3^{-1} = (0,-1)$; код $g_1g_2 = g_3g_4 = E$, $g_1g_3 = g_3g_1$; любой элемент $g \in G$ представим в виде произведения элементов $g_1, \dots, g_4$. Для группы $G = pgg$ образующие – две скользящие симметрии $O$ и $P$ (см. рис. 2). Следовательно, по определению, для образующих $g_1, \dots, g_s \in G$ допускаются только неотрицательные степени $g_i^m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Наконец, поясним зависимость от распределения вероятностей $\mu = \{p_i\}_{i=1}^s$, $p_1 + \dots + p_s = 1$, $p_i > 0$. Как сказано в п. 5. введения, свойство возвратности случайного блуждания на группе $G = pgg$ не зависит от выбора распределения $\mu$. Напротив, чтобы для группы $G = p1$ блуждание было возвратным необходима и достаточна симметричность $\mu : p_1 = p_2$ и $p_3 = p_4$. Граф $G = p1$ получается из графа группы $G = pgg$ (рис. 2) заменой всех ребер на двунаправленные. Поэтому становится понятным, что симметричность $\mu$ исключает дрейф траекторий. Доказательству же первого утверждения посвящается следующий параграф.

## §2. Блуждание по решеткам с периодическим распределением вероятностей перехода

**2.1.** Частица совершает случайные блуждания на графе группы $G = pgg$ (см. рис. 2). Из каждой вершины возможны два исхода, отвечающие отображениям $O$ и $P$ с вероятностями $p_1$ и $p_2$ соответственно, $p_1 + p_2 = 1$. Ограничение $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$ пока не предполагается. Подгруппе трансляций $G_{tp} \subset G$ отвечает подрешетка

$$M = 2 \cdot \mathbb{Z}^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\; 2)\right\} \tag{2.1}$$

основной решетки $L = \mathbb{Z}^2$ из вершин графа $G$.

Распределение $\mu = \{p_1, p_2\}$ задает переходную функцию случайного блуждания

$$p^1(x, y) = p(x, y),$$

равную вероятности перехода за 1 шаг из точки $x \in L$ в точку $y \in L$ и периодическую $\mathrm{mod}\;\; L$:

$$p(x + m, y + m) = p(x, y) \quad \text{для любого} \quad m \in M. \tag{2.2}$$

Фактор-группа $L/M = L(\mathrm{mod}\, M)$ состоит из четырех представителей

$$i = (i_1, i_2) : \bar{1} = (0, 0),\ \bar{2} = (1, 0),\ \bar{3} = (0, 1),\ \bar{4} = (1, 1). \tag{2.3}$$

Ввиду периодичности (2.2) функции $p(x, y)$, она полностью определяется значениями вероятностей переходов

$$p(i, i + ((-1)^{i_2}, 0)) = p_1, \quad p(i, i + (0, (-1)^{i_1})) = p_2 \tag{2.4}$$

для всех $i$ из (2.3). Если $j$ не совпадает ни с одним из (2.3), то $p(i, j) = 0$.

**2.2.** Введем еще $p^n(x, y)$ – вероятности перехода за $n$ шагов из $x \in L$ в $y \in L$. Они удовлетворяют разностному уравнению

$$p^n(x, y) = p_1 p^{n-1}(x, y - ((-1)^{y_2}, 0)) + p_2 p^{n-1}(x, y - (0, (-1)^{y_1})) \tag{2.5}$$

для $n \geqslant 1$, а для $n = 0$

$$p^0(x, y) = \delta_{xy} \text{ – символ Кронекера.} \tag{2.6}$$

Для $p^n(x,y)$ определим преобразование Фурье

$$p^n(i,j;a) = \sum_{\substack{y\in L\\ y\equiv j\,(\mathrm{mod}\ M)}} p^n(i,y)e(ay) \tag{2.7}$$

– аналог характеристической функции. Сравнение $y \equiv j\,(\mathrm{mod}\ M)$ означает, что $y$ принадлежит классу смежности $j+M, e(x) = \exp(2\pi i x)$, $ay = a\cdot y = a_1y_1 + a_2y_2$ – скалярное произведение $a=(a_1,a_2)$ и $y=(y_1,y_2)$ из $\mathbb{R}^2$. Сумма в (2.7) конечная и проблемы со сходимостью не возникает. Используя разностное уравнение (2.5) для $n \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}
p^n(i,j;a) = p_1 &\sum_{\substack{y\in L\\ y\equiv j\,(\mathrm{mod}\ M)}} p^{n-1}(i, y-((-1)^{j_2},0))e(ay)+\\
&+p_2 \sum_{\substack{y\in L\\ y\equiv j\,(\mathrm{mod}\ M)}} p^{n-1}(i, y-(0,(-1)^{j_1}))e(ay) =\\
&= p_1e(a((-1)^{j_2},0)) \sum_{\substack{y'\in L\\ y'\equiv j'\,(\mathrm{mod}\ M)}} p^{n-1}(i,y')e(ay')+\\
&+p_2e(0,a((-1)^{j_1})) \sum_{\substack{y''\in L\\ y''\equiv j''\,(\mathrm{mod}\ M)}} p^{n-1}(i,y'')e(ay''),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
j' &= j+(1,0), \quad j' \equiv j - ((-1)^{j_2},0)\,(\mathrm{mod}\ M),\\
j'' &= j+(0,1), \quad j'' \equiv j - (0,(-1)^{j_1})\,(\mathrm{mod}\ M).
\end{aligned}$$

Отсюда и из определения преобразований Фурье (2.7) для $p^n(i,j;a)$ вытекает разностное уравнение

$$\begin{aligned}
p''(i,j;a) =&p_1e(a((-1)^{j_2},0))p^{n-1}(i,j';a)+\\
&+p_2e(a(0,(-1)^{j_1}))p^{n-1}(i,j'';a)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

для $n \geqslant 1$. Если же $n=0$ и $i$, $j$ из списка (2.3), то в силу (2.6)

$$p^0(i,j;a) = \delta_{ij}e(ai). \tag{2.9}$$

Уравнение (2.8) и формула вероятностей переходов (2.4) побуждают ввести матрицы

$$T_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & e(a(1,0)) & \vdots & & \\ e(a(1,0)) & 0 & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & 0 & e(a(-1,0)) \\ & & \vdots & e(a(-1,0)) & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} & & \vdots & e(a(0,1)) & 0 \\ & & \vdots & 0 & e(a(0,-1)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e(a(0,1)) & 0 & \vdots & & \\ 0 & e(a(0,-1)) & \vdots & & \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Обозначим $P^n(a) = (p^n(i,j;a))$ квадратную матрицу четвертого порядка, элементы которой пронумерованы согласно соглашению (2.3). Теперь разностное уравнение (2.8) перепишется в компактной матричной форме

$$P^n(a) = P^{n-1}(a) \cdot T(a), \quad n \geqslant 1, \tag{2.11}$$

с матрицей

$$T(a) = p_1 T_1(a) + p_2 T_2(a). \tag{2.12}$$

При $n = 0$

$$P^0(a) = E(a) = \operatorname{diag}\Big(e(a(0,0)), \dots, e(a(1,1))\Big) \tag{2.13}$$

– диагональная матрица. Теперь, как принято в теории случайных блужданий по решеткам [7], построим производящую (матричную) функцию

$$P(a,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(a) z^n, \quad |z| < 1.$$

Из (2.11) и (2.13) для нее выведем явную формулу

$$P(a,z) = P^0(a) \cdot R(a,z), \quad \text{где} \quad R(a,z) = (E - zT(a))^{-1} \tag{2.14}$$

– резольвента матрицы $T(a)$, $E$ – единичная матрица четвертого порядка.

**2.3.** Повторим все построения для $f^n(x,y)$ – вероятности перехода из $x$ в $y$ впервые на $n$-ом шаге. Считаем $f^0(x,y)=0$. Эти вероятности связаны с $p^n(i,y)$ соотношениями

$$p^n(i,y)=\sum_{0\leqslant l\leqslant n} f^l(i,y)p^{n-l}(y,y), \quad n\geqslant 1,$$

или в терминах характеристических функций (2.7)

$$p^n(i,j;a)=\sum_{0\leqslant l\leqslant n} f^l(i,j;a)p^{n-l}(j,j), \quad n\geqslant 1, \tag{2.15}$$

при этом полагаем

$$f^n(i,j;a)=\sum_{\substack{y\in L\\ y\equiv j \pmod M}} f^n(i,y)e(ay), \quad n\geqslant 1,$$

и $f^0(i,j;a)=0$. Продолжая по аналогии, введем квадратные матрицы размера четыре $F^n(a)=(f^n(i,j;a))$ и диагональные матрицы

$$P^n=(\delta_{ij}p^n(j,j)), \quad n\geqslant 1, \quad P^0=E$$

(см. (2.6)) с нумерацией элементов (2.3). Соотношение (2.15) суть координатная запись матричного уравнения типа свертки

$$P^n(a)=\sum_{0\leqslant l\leqslant n} F^l(a)\cdot P^{n-l}, \quad n\geqslant 1,$$

где $F^0(a)=0$. Умножим его на $z^n$ и просуммируем по $n=1,2,3,\ldots$. Получим

$$P(a,z)-P^0(a)=F(a,z)\cdot P(z) \tag{2.16}$$

– произведение производящих функций

$$F(a,z)=\sum_{l=1}^{\infty} F^l(a)z^l, \quad P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} P^n z^n.$$

Из (2.16) вытекает следующее представление

$$F(a,z)=(P(a,z)-P^0(a))\cdot P(z)^{-1}, \quad |z|<1. \tag{2.17}$$

**2.4.** Для обеих частей из (2.17) вычислим обратные преобразования Фурье. Используя обозначение (2.13), можем записать

$$\iint\limits_0^1 F(a,z)E(-a)\,da = \iint\limits_0^1 (P(a,z) - P^0(a))P(z)^{-1}E(-a)\,da =$$
$$= \left[\iint\limits_0^1 P(a,z)E(-a)\,da - E\right] P(z)^{-1}$$

поскольку матрицы $P(z)$ и $E(-a)$ диагональные и $E(-a) = P^0(a)^{-1}$. Левая часть равна

$$F(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(f^l(i,j)\Big)_{4\times 4} z^l, \tag{2.18}$$

а для вычисления правой части воспользуемся формулой (2.14). Тогда для производящей матричной функции (2.18) получим интегральное представление

$$F(z) = \left[\iint\limits_0^1 E(a)R(z,a)E(-a)\,da - E\right] P(z)^{-1}. \tag{2.19}$$

Функцию $P(z)$ можно записать в виде

$$P(z) = \operatorname{diag}\left[\iint\limits_0^1 P(a,z)E(-a)\,da\right]. \tag{2.20}$$

Здесь символ $\operatorname{diag} A$ обозначает матрицу с диагональными элементами, как у матрицы $A$, и с нулевыми остальными элементами. В двух последних формулах участвует один и тот же интеграл

$$J(z) = \iint\limits_0^1 E(a)R(z,a)E(a)^{-1}\,da. \tag{2.21}$$

Если использовать это обозначение и (2.20), то докажем нужную нам формулу

$$F(z) = (J(z) - E)(\operatorname{diag} J(z))^{-1}. \tag{2.22}$$

Поскольку мы интересуемся вероятностями возвращения частицы в исходную точку, то достаточно рассмотреть только диагональ $\operatorname{diag} F(z)$. Взятие диагонали в (2.22) упрощает последнюю формулу

$$\operatorname{diag} F(z) = E - (\operatorname{diag} I(z))^{-1}, \tag{2.23}$$

где

$$I(z) = \iint\limits_0^1 (E - zT(a))^{-1} da. \tag{2.24}$$

**Замечание.** Приведенное доказательство формулы (2.23) носит общий характер и не зависит от выбора кристаллографической группы $G$. Более того, даже групповое происхождение и размерность группы для этой формулы несущественно. Она применима к случайным блужданиям по решетке $L$, для которых вероятности переходов $p(x, y)$ периодичны $\operatorname{mod} M$

$$p(x+m, y+m) = p(x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in L,\ m \in M. \tag{2.25}$$

При этом накладывается ограничение, что подрешетка $M \subset L$ имеет конечный индекс в $L$. В случае $M = L$ формула (2.23) общеизвестна [7]. По аналогии с [7] формулу (2.23) можно было выписать сразу. Формула (2.23) также применима к блужданиям по решетке в присутствии периодически расположенных ловушек [8].

**2.5.** По определению производящей функции $F(z)$ (2.18) ее первый диагональный элемент равен

$$F_{11}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f^n(\bar{1}, \bar{1}) z^n, \tag{2.26}$$

где согласно соглашению (2.3) $\bar{1} = (0, 0)$ и $f^n(\bar{1}, \bar{1})$ – вероятность первого возвращения частицы в изначальную точку $(0, 0)$ на $n$-ом шаге. Интерпретация $F_{11}(1)$ очевидна: $F_{11}(1)$ – вероятность того, что частица когда-либо возвратится в $(0, 0)$. Вспоминая граф группы $G = pgg$ (см. рис. 2), нетрудно заметить совпадение вероятностей $F_{11}(1) = F_{22}(1) = F_{33}(1) = F_{44}(1)$ возвращения во все четыре точки из списка (2.3). Поэтому ограничимся вычислением вероятности $F_{11}(1)$.

Начнем с вычисления определителя $d(z,a)$ матрицы (см. (2.12) и (2.10))

$$D(z,a) = E - zT(a) =$$

$$= -\begin{pmatrix} -1 & zp_1e(a_1) & zp_2e(a_2) & 0 \\ zp_1e(a_1) & -1 & 0 & zp_2e(-a_2) \\ zp_2e(a_2) & 0 & -1 & zp_1e(-a_1) \\ 0 & zp_2e(-a_2) & zp_1e(-a_1) & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Для определителя $d(z,a)$ и минора $d_{11}(z,a)$ имеем

$$\begin{gathered} d(z,a) = 1-(p_1^2(e(2a_1)+e(-2a_1))+p_2^2(e(2a_2)+e(-2a_2)))z^2+ \\ +(p_1^2-p_2^2)^2z^4 = 1-2(p_1^2c(2a_1)+p_2^2c(2a_2))z^2+(p_1-p_2)^2z^4, \end{gathered} \tag{2.28}$$

где использовано сокращение $c(x) = \cos(2\pi x)$ (см. (2.7), и

$$d_{11}(z,a) = 1-(p_1^2e(-2a_1)+p_2^2e(-2a_2))z^2. \tag{2.29}$$

Поэтому первый диагональный элемент $I_{11}(z)$ из (2.24) равен

$$I_{11}(z) = \iint\limits_0^1 \frac{d_{11}(z,a)}{d(z,a)}\,da = \iint\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{d_{11}(z,a/2)}{d(z,a/2)}\,da.$$

Если в $I_{11}(z)$ положить $z=1$, то видим, что интеграл

$$I_{11}(1) = \frac{1}{2}\iint\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{1-p_1^2e(-a_1)-p_2^2e(-a_2)}{p_1^2(1-c(-a_1))+p_2^2(1-c(-a_2))}\,da_1da_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{1-(p_1^2c(a_1)+p_2^2c(a_2))}{p_1^2(1-c(a_1))+p_2^2(1-c(a_2))}\,da_1da_2 > 0.$$

расходится тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$p_1 > 0 \text{ и } \ p_2 > 0. \tag{2.30}$$

Из формулы (2.23) для $F_{11}(z)$ и $I_{11}(z)$ вытекает соотношение

$$F_{11}(z) = 1 - \frac{1}{I_{11}(z)}$$

и поэтому $F_{11}(1) = 1$ равносильно (2.30). Итак доказана

**Теорема.** *Случайное блуждание по графу плоской кристаллографической группы $G=pgg$ (см. рис. 2) возвратно только и если только вероятности переходов $p_1$ и $p_2$ удовлетворяют условию* (2.30).

**Следствие.** *Группа $G = pgg$ возвратная и свойство возвратности случайного блуждания на данной группе не зависит от распределения вероятностей $\mu = \{p_1, p_2\}$ с условием $G_\mu = G$, т.е. с условием* (2.30).

## Литература

1. H. Kesten, *Contributions to probability theory, II,* Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967.
2. Г. Кокстер, У. Мозер, *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп,* М., 1980.
3. Н. П. Жидков, Б. М. Щедрин, *Геометрия кристаллического пространства,* Изд-во Московского ун-та, 1988.
4. R. Schwarzenberger, *N–dimensional crystallography,* Pitman, San Francisco–London–Melbourne, 1980.
5. Б. К. Вайнштейн, *Современная кристаллография,* т. 1, М., 1979.
6. О. В. Ковалев, *Неприводимые и индуцированные представления и копредставления федоровских групп,* М., 1986.
7. E. W. Montroll, *Random walks in multidimensional spaces, especially on periodic lattices,* J. Soc. Indust. Appl. Math. **4** (1956), 241–260.
8. E. W. Montroll, *Random walks on lattices,* J. Math. Phys. **10**, No. 5 (1969) 753–767.

Владимирский
государственный
педагогический
университет
e-mail: zhuravl@vgpu.elcom.ru
e-mail: aayudin@vgpu.elcom.ru

Поступило 12 февраля 2001 г.