Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. С. Филиппычев, Б. Н. Четверушкин, Об одном способе осреднения уравнений диффузного типа по энергиям фотонов,
*Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1976, том 16, номер 6, 1601–1605

https://www.mathnet.ru/zvmmf6068

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
16 января 2026 г., 13:16:16

при следующих ограничениях на управляющую функцию:

$$\iint\limits_G H(x, y)\,dx\,dy = 0.7,$$

$$0 \leqslant H(x, y) \leqslant 1, \qquad x \in [0.2,\ 0.8], \qquad H(x, y) \equiv 0, \qquad x \notin [0.2,\ 0.8].$$

Для реализации метода задача аппроксимировалась с точностью $O(h^2)$ при $h = h_x = h_y = 0.1$.

При решении этой задачи были опробованы различные прямоугольные области варьирования $\omega_{ij}$, в том числе и области, примыкающие двумя сторонами к верхнему и нижнему участкам границы Г. В результате численного анализа оказалось, что наилучшая скорость уменьшения функционала соответствует полосе варьирования: за 15 *мин* счета на ЭВМ БЭСМ-6 значение функционала в этом случае уменьшилось на ~10%. В качестве начального приближения было выбрано распределение $H(x, y)$ в виде трапеции, причем значение функционала для него было приблизительно вдвое больше соответствующего оптимальному распределению $H(x, y)$ в классе трапеций.

В заключение авторы выражают благодарность А. Ф. Кононенко, А. В. Гулину и А. П. Фаворскому за полезные обсуждения.

*Поступила в редакцию 27.01.1975*
*Переработанный вариант 17.11.1975*

**Цитированная литература**

1. *Л. М. Дегтярев, А. А. Самарский, А. П. Фаворский.* Численное решение внутренних стационарных задач электродинамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, 10, № 6, 67—73.
2. *Н. Н. Моисеев.* Численные методы в теории оптимальных систем. М., «Наука», 1971.
3. *У. И. Зангвилл.* Нелинейное программирование. М., «Сов. радио», 1973.
4. *И. А. Ватель, А. Ф. Кононенко.* Об одной численной схеме решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, 10, № 1, 67—73.
5. *Ж. Л. Лионс.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972.
6. *Ф. Л. Черноусько, Н. В. Баничук.* Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973.
7. *А. А. Самарский.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.

---

УДК 517.9 : 533.9

# ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА ПО ЭНЕРГИЯМ ФОТОНОВ

*Д. С. ФИЛИППЫЧЕВ, Б. Н. ЧЕТВЕРУШКИН*

*(Москва)*

Рассматривается способ осреднения уравнений диффузионного типа по энергиям фотонов. Осреднение проводится для разностной формы записи этих уравнений.

1. В [1–5] рассмотрено применение метода замороженных коэффициентов для численного решения кинетических уравнений и задач радиационной газовой динамики (р.г.д.). При этом сложное, зависящее от многих переменных кинетическое уравнение заменяется на сравнительно простые уравнения. Однако коэффициенты

этих простых уравнений являются нелинейными функционалами от решения кинетического уравнения.

При использовании метода замороженных коэффициентов кинетическое уравнение считается на каком-то шаге $j$ по времени. На этом же шаге с помощью решения кинетического уравнения вычисляются коэффициенты простых уравнений. На последующих $N_j$ шагах необходимые величины (обычно плотность и поток) определяются из решения простых уравнений с замороженными по времени коэффициентами. Успех той или иной реализации метода зависит от того, насколько удачно выбраны коэффициенты.

В нашей статье предлагается сравнительно простой вариант метода замороженных коэффициентов для решения задач р.г.д. Метод применяется для осреднения по энергиям фотонов. Рассмотрение проведем на примере сферически-симметричной задачи.

Заменим уравнение переноса света

$$\mu\frac{\partial I_k}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I_k}{\partial\mu}+\varkappa_k I_k=2\sigma_k\varkappa_k T^4, \tag{1}$$

$$0\leqslant r\leqslant r_N,\qquad I_k(r_N,\mu)=I_k^-(\mu),\qquad \mu\leqslant 0,$$

системой уравнений квазидиффузии [1], которую сразу запишем в разностном виде относительно функций $\varphi_k=D_kU_k$, $Y_k=r^2W_k$:

$$\begin{gathered}Y_{k,\,i+1}-Y_{ki}+(A_k\varphi_k)_{i+0.5}=F_{k,\,i+0.5},\qquad (B_k\varphi_k)_{i+0.5}-(G_k\varphi_k)_{i-0.5}+Y_{ki}=0,\\ Y_0=0,\qquad Y_N=r_N^2C_k\varphi_N,\qquad i=1,2,\ldots,N.\end{gathered} \tag{2}$$

В (1) и (2) использовались следующие обозначения [1, 3, 6]: $\mu$ — косинус угла между направлением полета фотона и радиусом $r$, $I_k$ — интенсивность излучения в $k$-й группе $\nu\in[\nu_k,\ \nu_{k+1}]$, $\varkappa_k$ — коэффициент поглощения, $T$ — температура,

$$\sigma_k=T^{-4}\int\limits_{\nu_{k-1}}^{\nu_k} I_{\nu p}\,d\nu,$$

где $I_{\nu p}$ — спектральная интенсивность излучения черного тела, $U_k$ и $W_k$ — плотность и поток энергии излучения, $C_k$, $D_k$ — коэффициенты квазидиффузии, определяемые из решения кинетического уравнения:

$$D_k=\int\limits_{-1}^{1}\mu^2 I_k(r,\mu,t)\,d\mu\left[\int\limits_{-1}^{1} I_k(r,\mu,t)\,d\mu\right]^{-1},$$

$$C_k=\int\limits_{-1}^{1}\mu I_k(r_N,\mu,t)\,d\mu\left[\int\limits_{-1}^{1} I_k(r_N,\mu,t)\,d\mu\right]^{-1}.$$

Мы не будем выписывать здесь коэффициенты $A_k$, $B_k$, $G_k$, $F_k$, конкретный вид которых зависит от той или иной формы разностной записи уравнений квазидиффузии. Напомним лишь, что эти коэффициенты зависят от сетки по радиусу $r_i$ и групповых коэффициентов поглощения $\varkappa_k$.

Просуммируем систему уравнений (2) по $k$. При этом получим уравнения

$$\begin{gathered}Y_{i-1}-Y_i+f^1_{i+0.5}\varphi_{i+0.5}=F_{i+0.5},\qquad f_i^2\varphi_{i+0.5}-f_i^3\varphi_{i-0.5}+Y_i=0,\\ Y_0=0,\qquad Y_N=r_N^2C\varphi_N.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
f_i^1 &= \sum_{k=1}^{N_k} (A_k\varphi_k)_{i+0.5} \left[ \sum_{k=1}^{N_k} (\varphi_k)_{i+0.5} \right]^{-1},\\
f_i^2 &= \sum_{k=1}^{N_k} (B_k\varphi_k)_{i+0.5} \left[ \sum_{k=1}^{N_k} (\varphi_k)_{i+0.5} \right]^{-1},\\
f_i^3 &= \sum_{k=1}^{N_k} (G_k\varphi_k)_{i-0.5} \left[ \sum_{k=1}^{N_k} (\varphi_k)_{i-0.5} \right]^{-1},\\
C &= \sum_{k=1}^{N_k} (C_kU_k)_N \left[ \sum_{k=1}^{N_k} (\varphi_k)_N \right]^{-1},\\
\varphi_{i+0.5} &= \sum_{k=1}^{N_k} (D_kU_k)_{i+0.5}, \qquad Y_i = r_i^2 \sum_{k=1}^{N_k} W_{ki},\\
F_{i+0.5} &= \sum_{k=1}^{N_k} (F_k)_{i+0.5}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что на каждом временно́м слое коэффициенты $A_k$, $B_k$, $G_k$ и $F_k$ — известные функции температуры.

Предлагается следующий алгоритм решения:

а) на некотором временно́м шаге $t=t^j$ решается кинетическое уравнение (1) и уравнения квазидиффузии (2) и определяются коэффициенты $D_k(t^j)$, $C(t^j)$, $f^1(t^j)$, $f^2(t^j)$, $f^3(t^j)$;

б) на остальных $N_j$ шагах $U$ и $Y$ определяются из решения осредненной системы уравнений квазидиффузии (3);

в) вновь на шаге $j+N_j$ происходит пересчет кинетического уравнения.

2. В качестве примера рассматривалось решение системы уравнения переноса и уравнения энергии

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3} \varkappa_k(U_k-4\sigma_kT^4),\\
&\mu\frac{\partial I_k}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I_k}{\partial\mu} + \varkappa_kI_k = 2\sigma_k\varkappa_kT^4,\\
&U_k = \int_{-1}^{1} I_k\,d\mu, \qquad 0\leqslant r\leqslant 3, \quad I_k(3,\mu)=0,\\
&\varepsilon=aT, \qquad a=1, \qquad k=1,2,3.
\end{aligned}
$$

Вид коэффициентов поглощения задавался выражениями $\varkappa_1=0.5\,T+1$, $\varkappa_2=0.7\,T-0.2$, $\varkappa_3=0.6\,T-0.2$. Начальное распределение температуры выбиралось в виде

$$
T = \begin{cases} 10, & 0\leqslant r\leqslant 1,\\ 1, & 1<r\leqslant 3. \end{cases}
$$

Расчет этой задачи проводился двумя способами:

1) на каждом шаге по времени $U_k$ определялось из многогрупповой системы (5); это решение принималось за эталонное $T_{эт}$;

2) многогрупповая система уравнений (5) решалась один раз на несколько временных шагов для определения коэффициентов $D_k$, $C$, $f^1$, $f^2$, $f^3$, на остальных временных шагах плотность излучения определялась из системы уравнений (3).

В наших расчетах пересчет коэффициентов поглощения происходит один раз на 10 шагов по времени. Максимальное расхождение двух решений происходило вначале, когда имелся резкий перепад температур. На 10-м шаге (1-й шаг, где происходил повторный пересчет кинетического уравнения) относительная ошибка в определении температуры $\delta_T=(T_{эт}-T)/T_{эт}$ составила 0.3—0.4% и лишь в точке первоначального скачка 1.8%. С течением времени эта погрешность уменьшалась.

Рассмотрим решение той же задачи, но с другими коэффициентами поглощения, резко зависящими от температуры:

$$\varkappa_k = T\left[1+\left(1-\frac{1.9989}{T^5}\right)(k-1)+\left(1-\frac{k-2}{T}\right)\right].$$

Коэффициенты поглощения в первоначально холодной зоне отличаются на несколько порядков от коэффициентов поглощения в горячей зоне. Такая сильная зависимость коэффициентов поглощения от параметров среды характерна для некоторых задач р.г.д.

Для того чтобы учесть сильную зависимость коэффициентов поглощения, несколько видоизменим предложенный способ расчета. Не решая кинетическое уравнение или многогрупповую систему уравнений квазидиффузии, будем пересчитывать на каждом шаге дробно-линейные функционалы $f^1$, $f^2$, $f^3$, которые зависят от коэффициентов поглощения.

Процедура нахождения коэффициентов $f^1$, $f^2$, $f^3$ следующая. Решим на шаге $j$ кинетическое уравнение (1) и заморозим на протяжении $N_j$ шагов $U_k$, $D_k$, $C_k$. Коэффициенты $f^1$, $f^2$, $f^3$ будем определять на каждом временно́м шаге по формулам (4). Они будут зависеть от времени через $A_k$, $B_k$, $G_k$, которые, в свою очередь, зависят от изменения коэффициентов поглощения.

Задача с сильным изменением коэффициентов поглощения решалась двумя способами: 1) на каждом шаге решалось многогрупповое кинетическое уравнение; 2) $U_k$, $D_k$, $C_k$ определялись один раз на 10 шагов по времени. Максимальное отклонение $\delta_T$ двух решений на 10-м шаге в районе первоначального скачка не превышало 2%, на 100-м шаге $\delta_T$ не превышало 0.8%.

Хорошее совпадение двух решений могло быть связано с тем, что шаг по времени выбирался слишком малым. В этом случае решение многогрупповой задачи с увеличенным шагом по времени должно давать такие же небольшие отклонения по сравнению с эталонным решением.

Задача с сильноменяющимися коэффициентами решалась в многогрупповом приближении, но с десятикратно увеличенным шагом по времени. Максимальное отклонение на 10-м шаге составило 17%, на 100-м шаге 12%, что значительно превышает погрешности, полученные с использованием коэффициентов $f^1$, $f^2$, $f^3$.

Приведенные расчеты показывают применимость метода замороженных коэффициентов для осреднения по энергиям фотонов.

Предлагаемые методы естественным образом переносятся на случай, когда перенос излучения рассматривается в диффузионном приближении, в том числе и для многомерных по пространству задач.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А. А. Самарскому и В. Я. Гольдину за проявленный интерес к работе.

*Поступила в редакцию 20.01.1975*

**Цитированная литература**

1. *В. Я. Гольдин.* Квазидиффузионный метод решения кинетическогго уравнения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, № 4, № 6, 1078—1087.
2. *В. Я. Гольдин, Г. В. Данилова, Б. Н. Четверушкин.* Приближенный метод расчета нестационарного кинетического уравнения. В сб. «Вычисл. методы в теории переноса». М., Атомиздат, 1969, 50—58.
3. *В. Я. Гольдин, Б. Н. Четверушкин.* Методы расчета переноса излучения в однородных задачах низкотемпературной плазмы. Препринт ИПМ № 12, 1970.
4. *И. В. Немчинов.* Об осредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач. Прикл. матем. и механ., 1970, 34, № 4, 706—721.
5. *В. Я. Гольдин, Б. Н. Четверушкин.* Методы решения одномерных задач радиационной газовой динамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, 12, № 4, 990—1001.
6. *Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер.* Физика ударных волн и высокотемпературных газодинамических явлений. М., «Наука», 1966.


---

УДК 518:517.9:533.9

# О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

*А. Д. ГАДЖИЕВ, О. С. ШИРОКОВСКАЯ*

*(Челябинск)*

Предложен конечно-разностный метод решения двумерного уравнения переноса в криволинейных координатах.

## § 1

Для системы с осевращательной симметрией решается стационарное уравнение переноса [1]

$$\Omega\nabla N + \left(\alpha + \frac{\lambda}{v}\right) N = \frac{\beta}{4\pi}\int\limits_S N(\mathbf{r}, \Omega')\, d\Omega' \tag{1.1}$$

для определения наибольшего собственного значения $\lambda$ и соответствующей ему собственной функции распределения нейтронов.

Записанное в криволинейных координатах $r(x, y)$, $y$, $\psi$, $\mu$ уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{a}{r_x}\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{b}{r}\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\eta}{r\sin y}\frac{\partial N}{\partial \psi} + \left(\alpha + \frac{\lambda}{v}\right) N = \tag{1.2}$$

$$= \frac{\beta}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} N(x, y, \psi, \mu)\, d\mu,$$

или в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial x} r^2 a \sin y N + \frac{\partial}{\partial y} r r_x b \sin y N - \frac{\partial}{\partial \psi} r r_x \eta N + r^2 r_x \left(\alpha + \frac{\lambda}{v}\right) \sin y N = \tag{1.3}$$

$$= \frac{\beta}{2\pi} r^2 r_x \sin y \int\limits_0^{\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} N(x, y, \psi, \mu)\, d\mu.$$