С. Я. Новиков, Е. М. Семёнов, Ф. Л. Эрнандес, Строго сингулярные вложения, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 85–87

DOI: 10.4213/faa182

для всех знаков $\vartheta_k = \pm 1$, $k = 1, \ldots, n$, матриц Адамара $\mathscr{H}_n \in \mathscr{H}_n^{\mathrm{all}}$ и натуральных чисел $n \in \mathscr{N}_H$.

С помощью $\varrho^{(n)}$ и ϱ_n можно охарактеризовать пространства, изоморфные l_1.

Теорема 14. *Пусть X — банахово пространство с нормированным субсимметрическим базисом (φ_k) с единичной константой субсимметричности. Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *пространство X изоморфно l_1*;

(ii) *существует константа $\varepsilon > 0$, такая, что $\varrho^{(n)}/(n2^n) \geqslant \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, где ε не зависит от n*;

(iii) *существует константа $\delta > 0$, такая, что $\varrho_n/(n\sqrt{n}) \geqslant \delta$ для всех $n \in \mathscr{N}_H$, где δ не зависит от n.*

Автор выражает глубокую признательность проф. Н. Н. Вахания и С. А. Чобаняну за внимание и обсуждение полученных результатов.

Литература

1. *Vakhania N., Kvaratskhelia V.* Bull. Georgian Acad. Sci., **160**, No. 2, 201–203 (1999). **2.** *Vakhania N., Kvaratskhelia V.* Bull. Georgian Acad. Sci., **162**, No. 2, 199–202 (2000). **3.** *Vakhania N., Kvaratskhelia V.* Bull. Georgian Acad. Sci., **163**, No. 3 (2001). **4.** *Холл М.* Комбинаторика. Мир, М., 1970. **5.** *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. Связь, М., 1979. **6.** *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces I. Sequence spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977. **7.** *Diestel J., Jarchow H., Tonge A.* Absolutely summing operators. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. **8.** *Day M. M.* Normed linear spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.

Институт вычислительной математики
им. Н. И. Мусхелишвили АН Грузии

Поступило в редакцию
27 октября 2000 г.
В переработанном виде
27 августа 2001 г.

УДК 517.982

Строго сингулярные вложения*

© 2002. С. Я. Новиков, Е. М. Семенов, Ф. Л. Эрнандес

Оператор A, действующий из банахова пространства E в банахово пространство F, называется *строго сингулярным* или *оператором Като*, если никакое его сужение на бесконечномерное подпространство $B \subset E$ не является изоморфизмом [1, Sec. 2.c]. Оператор A, действующий из банаховой решетки E в банахово пространство F, называется *дизъюнктно строго сигулярным*, если никакое его сужение на бесконечномерное подпространство, порожденное системой дизъюнктных элементов, не является изоморфизмом [2].

Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется *перестановочно-инвариантным* (r.i.) или *симметричным*, если

1) из неравенства $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для всех $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

*Работа второго автора была частично поддержана РФФИ, грант 98-01-00044, и фондом «Университеты России», грант 3667, а третьего автора — DGIES (Испания), грант PB 97-0240.

2) из равноизмеримости функций $x(t)$ и $y(t)$ и $y \in E$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$ ([3, Sec. 2.a] или [4, разд. 2.4]).

Аналогично (с очевидными изменениями) определяется симметричное пространство на $[0, \infty)$.

Следуя [3], мы будем предполагать, что E сепарабельно или изоморфно сопряженному к некоторому сепарабельному пространству. Изложению теории r.i.-пространств посвящены монографии [3, 4, 16].

Настоящая работа посвящена изучению вопроса, когда для пары вложенных r.i.-пространств $E \subset F$ тождественный оператор, действующий из E в F, строго сингулярен. Это означает, что для любого бесконечномерного подпространства $B \subset E$ нормы пространств E и F не эквивалентны на B. Очевидно, что строго сингулярное вложение пары r.i.-пространств является дизъюнктно строго сингулярным. Обратное утверждение не имеет места. Например, если $1 \leqslant p < q < \infty$, то вложение $L_q \subset L_p$ дизъюнктно строго сингулярно, но не строго сингулярно. Действительно, в силу неравенства Хинчина нормы пространств L_q и L_p эквивалентны на линейной оболочке системы Радемахера $r_n(t) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi t$.

Если E — r.i.-пространство и $\|1\|_E = 1$, то справедливы вложения $L_\infty \subset E \subset L_1$ и для всех $x \in L_\infty$ выполняются неравенства $\|x\|_{L_1} \leqslant \|x\|_E \leqslant \|x\|_{L_\infty}$ [4, теорема 2.4.1]. В [5] было доказано, что вложение $L_\infty \subset E$ строго сингулярно для любого r.i.-пространства $E \neq L_\infty$. Этому утверждению предшествовала теорема А. Гротендика о том, что вложение $L_\infty \subset L_p$ строго сингулярно для любого $p \in [1, \infty)$ [6]. В действительности это свойство характеризует L_∞ в классе r.i.-пространств. Более точно, если r.i.-пространство E отлично от L_1 и всякое вложение $E \subset F$ строго сингулярно для любого r.i.-пространства $F \neq E$, то $E = L_\infty$ [7].

Обозначим через G замыкание пространства L_∞ в пространстве Орлича L_M, где $M(u) = e^{u^2} - 1$. Норма в G вводится следующим образом:

$$\|x\|_G = \inf \left\{ \lambda : \lambda > 0, \int_0^1 e^{(x(t)/\lambda)^2}\, dt \leqslant 2 \right\}.$$

Пусть E — r.i.-пространство. Для того чтобы нормы

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n \right\|_E, \qquad \|c\|_{l_2}$$

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы $E \supset G$ ([8] или [3, Theorem 2.b.4]). Обозначим через $[r_n] = [r_n]_E$ подпространство в E, порожденное системой Радемахера.

Теорема 1. *Пусть E — r.i.-пространство. Для того чтобы вложение $E \subset L_1$ было не строго сингулярным, необходимо и достаточно, чтобы $E \supset G$.*

Достаточность условия $E \supset G$ была показана выше. Необходимость доказывается значительно сложнее и использует результаты работ [9–12, 3–5]. Теорема 1 была сформулирована как гипотеза в [13], однако попытки доказать ее предпринимались и ранее; более слабые результаты содержатся в [13–15].

Следствие 2. *Пусть E — r.i.-пространство. Если нормы пространств E и L_1 эквивалентны на некотором бесконечномерном подпространстве, то $[r_n]_E \cong [r_n]_{L_1} \cong l_2$.*

Как видно из доказательства теоремы 2.b.4 из [3], условия $E \supset G$ и

$$\sup_n n^{-1/2} \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k \right\|_E < \infty$$

эквивалентны.

Теорема 1 и следствие 2 говорят об экстремальных свойствах пространства G и системы Радемахера. Следующее утверждение показывает, что теорема 1 описывает также и характеристическое свойство пространства L_1.

Теорема 3. *Пусть E, F — r.i.-пространства, $L_\infty \subset E \subset F \subset L_1$, $E \neq L_\infty$, $F \neq L_1$. Существует такое r.i.-пространство F_1, что*

1) *$F_1 \subset F$ и это вложение не является дизъюнктно строго сингулярным*;
2) *$E \not\subset F_1$.*

С помощью теоремы 1 и техники Кадеца–Пелчинского [17] доказывается

Теорема 4. *Пусть E, F — r.i.-пространства, $E \subset F$ и E сепарабельно. Вложение $E \subset F$ строго сингулярно тогда и только тогда, когда оно дизъюнктно строго сингулярно и нормы пространств E, F не эквивалентны на подпространстве, порожденном системой Радемахера.*

Естественный вопрос о существенности условия сепарабельности пространства E в теореме 4 остался открытым. Однако теорему 4 удалось применить для решения задачи о строгой сингулярности вложения пространств $\exp L_p$, которые, как известно, несепарабельны. Для любого $p > 0$ функция $e^{|u|^p}$ выпукла для достаточно больших u. Поэтому существует выпуклая на всей оси функция $M_p(u)$, эквивалентная $e^{|u|^p}$ при $|u| \geqslant 1$. Пространство Орлича, порожденное функцией $M_p(u)$, обозначается через $\exp L_p$.

Следствие 5. *Пусть $0 < p < q < \infty$. Вложение $\exp L_q \subset \exp L_p$ строго сингулярно тогда и только тогда, когда $q > 2$.*

Используя результаты работы [7], нетрудно показать, что вложение $\exp L_q \subset \exp L_p$ дизъюнктно строго сингулярно для любых $0 < p < q < \infty$.

Литература

1. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces I. Sequence Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1977. **2.** *Garsia del Amo A., Hernandez F. L., Ruiz C.* Proc. Roy. Soc. Edinburg. Sect. A, 126, 1011–1026 (1996). **3.** *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces II. Function Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1979. **4.** *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978. **5.** *Новиков С. Я.* Матем. заметки, **62**, №4, 549–563 (1997). **6.** *Grothendieck A.* Canad. J. Math., **6**, 158–160 (1954). **7.** *Garsia del Amo A., Hernandez F. L., Sanchez V. M., Semenov E. M.* J. London Math. Soc., **62**, 239–252 (2000). **8.** *Rodin V. A., Semenov E. M.* Anal. Math., **1**, 207–222 (1975). **9.** *Aldous D. J.* Trans. Amer. Math. Soc., **267**, 445–463 (1981). **10.** *Dor L.* Ann. of Math., **102**, 463–474 (1975). **11.** *Dacunha-Castelle D., Krivine J.-L.* Israel J. Math., **26**, 330–351 (1977). **12.** *Raunaud Y.* Illinois J. Math., **39**, 212–250 (1995). **13.** *Montgomery-Smith S., Semenov E. M.* Positivity, **4**, 397–402 (2000). **14.** *Токарев Е. В.* Функц. анализ и его прил., **13**, вып. 2, 93–94 (1979). **15.** *Novikov S. Ya.* Collect. Math., **44**, 211–215 (1993). **16.** *Johnson W. B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L.* Memoirs Amer. Math. Soc., **217** (1979). **17.** *Kadec M. I., Pelczynski A.* Studia Math., **21**, 161–176 (1961/1962).

Самарский государственный университет
Воронежский государственный университет
Universidad Complutence, Madrid

Поступило в редакцию
24 октября 2000 г.