А. Б. Жеглов, Х. Курке, Геометрические свойства коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 5, 61–106

DOI: 10.4213/sm8429

УДК 517.957+512.72+512.71

А. Б. Жеглов, Х. Курке

Геометрические свойства коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных

В статье продолжается исследование алгебро-геометрических свойств коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных. В частности, начато изучение наиболее простых, а также некоторых известных примеров квантовых алгебраически вполне интегрируемых систем с точки зрения недавнего обобщения теории Сато, принадлежащего первому автору. Дано полное описание спектральных данных для класса "тривиальных" коммутативных алгебр и усовершенствованы геометрические свойства, полученные ранее для класса известных примеров коммутативных алгебр. Определено некоторое отображение ограничения из пространства модулей когерентных пучков на поверхности с фиксированным полиномом Гильберта в аналогичное пространство модулей на дивизоре (и поверхность, и дивизор – компоненты спектральных данных). Построено несколько явных примеров спектральных данных и соответствующих им алгебр коммутирующих (пополненных) операторов, получены интересные примеры поверхностей, не изоморфных никаким спектральным поверхностям (максимальных) коммутативных колец дифференциальных операторов в частных производных ранга 1. Наконец, доказано, что всякое коммутативное кольцо дифференциальных операторов в частных производных, нормализация которого изоморфна кольцу полиномов $k[u,t]$, получается с помощью преобразования Дарбу из кольца дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Библиография: 39 названий.

Ключевые слова: коммутирующие дифференциальные операторы, квантовые интегрируемые системы, пространства модулей когерентных пучков, преобразование Дарбу.

DOI: 10.4213/sm8429

§ 1. Введение

1.1. В настоящей работе мы продолжаем исследование алгебро-геометрических свойств коммутативных колец дифференциальных операторов в частных производных от двух переменных (для краткости будем называть их кольцами ДО), начатое в статьях [1], [2]. Всюду здесь мы работаем над полем k нулевой характеристики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00178-а, № 13-01-00664) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-581.2014.1).

Напомним один из известных и очень сложных вопросов, возникающих в теории алгебраически интегрируемых систем: как строить явные примеры коммутирующих колец ДО, удовлетворяющих определенным условиям интегрируемости, или как классифицировать такие кольца? (Более подробное изложение истории вопроса см. в [2; введение].) Этот вопрос можно переформулировать еще следующим образом. В работе [3] был определен квантовый аналог классического определения интегрируемой гамильтоновой системы. Квантовой вполне интегрируемой системой (КВИС) на алгебраическом многообразии X авторы называли пару (Λ, θ), где Λ – неприводимое n-мерное аффинное алгебраическое многообразие, а $\theta\colon \mathscr{O}_\Lambda \to D(X)$ – вложение алгебр (алгебра $D(X)$ дифференциальных операторов на X здесь выступает в качестве квантового аналога пуассоновой алгебры $\mathscr{O}(T^*X)$).

По определению КВИС $S = (\Lambda, \theta)$ называется алгебраически интегрируемой, если она доминируется другой КВИС S' ранга 1 (подробности определений см. в [3]), где ранг КВИС – размерность пространства формальных решений системы

$$\theta(g)\psi = g(\lambda)\psi, \qquad g \in \mathscr{O}_\Lambda,$$

в общей точке X. Эти определения в работе [3] были также обобщены на случай интегрируемых систем на формальном полидиске. В этом случае $X = \mathrm{Spec}(k[[x_1, x_2, \dots, x_n]])$, а символы $\mathscr{O}_X$, $k(X)$, $D(X)$ обозначают соответственно $k[[x_1, \dots, x_n]]$, $k((x_1, \dots, x_n))$, $\mathscr{O}_X[\partial_1, \dots, \partial_n]$, где $\partial_i = \partial/\partial x_i$. В этой ситуации при $n = 1$ благодаря работам И. М. Кричевера [4], [5] известна даже классификация всех алгебраически интегрируемых коммутативных подалгебр $B = \theta(\Lambda) \subset D(X)$ в терминах спектральных данных. В статье [3] был установлен критерий алгебраической интегрируемости КВИС в терминах соответствующей дифференциальной группы Галуа.

1.2. В настоящей работе мы продолжаем исследовать геометрические свойства коммутативных подколец ДО в алгебре $D = k[[x_1, x_2]][\partial_1, \partial_2]$ (ограничение $n = 2$ кажется нам в принципе несущественным, но для общего случая необходимо проделать некоторую работу по обобщению ряда утверждений из предыдущих статей). Напомним, что даже в этом случае до сих пор не известна классификация алгебраически интегрируемых (в вышеуказанном смысле) коммутативных подалгебр в терминах спектральных данных, хотя известна классификация коммутативных подалгебр в пополненном кольце дифференциальных операторов (см. работу [1], а также обсуждение в [2; введение]) в терминах модифицированных геометрических данных Паршина (эти данные включают в себя алгебраическую проективную поверхность, обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор, регулярную на дивизоре и поверхности точку, пучок без кручения на поверхности и некоторые данные тривиализации). Более того, до сих пор известно лишь относительно небольшое число таких алгебр. Вероятно, первые нетривиальные (в некотором смысле; см. обсуждение ниже) примеры появились в работах [6]–[8]. Эти примеры были связаны с квантовыми (деформированными) системами Калождеро–Мозера (ср. [9]). Позже идеи этих конструкций были развиты в серии статей (см., например, [10]–[12]) для построения других примеров (подробности и другие ссылки см., например, в обзоре [13]; ср. также [3], [14], [15]). Упомянем также, что идея строить свободные модули

Бейкера–Ахиезера (модули, состоящие из собственных функций кольца ДО) развивалась разными авторами (см., например, [16], [17], [13]) для построения явных примеров коммутативных матричных колец ДО.

В работах [1], [2] были исследованы некоторые свойства вышеупомянутых геометрических данных. В частности, все алгебраически интегрируемые коммутативные кольца ДО соответствуют геометрическим данным ранга 1, где X – коэно-маколеева поверхность, C – рациональная кривая с индексом самопересечения $C^2 = 1$, $\mathscr{F}$ – пучок без кручения ранга 1, коэно-маколеев вдоль C. В этой статье мы усиливаем последнее свойство, а именно, мы показываем, что пучок $\mathscr{F}$ для всякой коммутативной подалгебры ДО (удовлетворяющей, как и в работе [2], некоторым достаточно слабым условиям) коэно-маколеев на всей поверхности X (теорема 4).

Коэно-маколеевы когерентные пучки без кручения ранга 1, появляющиеся как пучки из геометрических данных, классифицирующих коммутативные подалгебры (пополненных) операторов с фиксированной спектральной поверхностью, параметризуются пространством модулей, которое является открытой подсхемой проективной схемы, параметризующей полустабильные пучки с фиксированным полиномом Гильберта (см. замечание 15). Мы определяем в нашей работе отображение ограничения ζ из этого пространства модулей в пространство модулей когерентных пучков без кручения ранга 1 на кривой C (см. п. 2.4 и замечание 15) и формулируем гипотезу о том, что это – сюръективный морфизм (замечание 15). Изучение этого пространства модулей важно для нахождения новых примеров алгебраически интегрируемых систем или для классификации коммутативных алгебр ДО. Мы надеемся вернуться к этому вопросу в следующих работах.

Отметим, что это пространство модулей может служить неким аналогом якобиана кривой в контексте классической теории КП. Напомним, что в работе [18] А. Н. Паршин предложил рассматривать многомерный аналог иерархии КП, который после некоторой модификации оказывается связан с алгебраическими поверхностями и пучками без кручения на них и даже с более широким классом геометрических данных, состоящих из проколотых лент и пучков без кручения на них, если число переменных равно двум (см. [19], [20; введение]). В статье [20] мы описали геометрическую структуру схемы Пикара проколотой ленты. Эта схема имеет хорошую групповую структуру и тоже может служить неким аналогом якобиана кривой в контексте классической теории КП. Так, например, на этой схеме определены обобщенные потоки КП (потоки, определяемые многомерной иерархией). Неудобство схемы Пикара проколотой ленты заключается в ее бесконечномерности. В отличие от этой схемы пространство модулей, упомянутое выше, является конечномерным. Обобщенные потоки КП также определены на нем. Несложно показать, что оно вкладывается в схему Пикара проколотой ленты.

Исследуя уже существующие примеры вышеупомянутых коммутативных алгебр, мы доказываем теорему 6 об алгебраически интегрируемых коммутативных кольцах ДО, чьи аффинные спектральные поверхности рациональны. Такие кольца фигурировали, например, в статьях [10]–[12], [15]. В примерах из этих статей нормализации аффинных спектральных поверхностей изоморфны аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$. В работе [15] авторы указали метод построения новых нетривиальных примеров коммутативных колец ДО с помощью преобразования Дарбу. Мы доказываем в теореме 6, что все кольца с таким свойством аффинной спектральной поверхности получаются с помощью преобразования Дарбу из колец ДО с постоянными коэффициентами. Заодно мы получаем геометрическое описание некоторого замыкания $\mathbb{A}^2$ (см. теорему 5): замыкание $\mathbb{A}^2$, чей "бесконечно удаленный" дивизор – обильный неприводимый $\mathbb{Q}$-Картье дивизор с индексом самопересечения 1, изоморфно $\mathbb{P}^2$. Вероятно, этот результат можно доказать с помощью классических методов алгебраической геометрии, используя старые известные результаты Дж. Морроу [21] или относительно свежие результаты Х. Кожимы и Т. Такахаши [22] (мы благодарны М. Гизатуллину и Т. Бандман за указание на эти работы), однако мы используем вместо этого некоторые наши идеи из теории пунктированных лент (риббонов) и/или, как альтернативу, конструкцию обобщенного отображения Кричевера–Паршина.

Вспоминая классификацию коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов, естественно сформулировать вопрос: всегда ли существуют примеры алгебраически интегрируемых коммутативных колец ДО, чьи спектральные поверхности изоморфны данной? Мы приводим здесь два контрпримера (примеры 1 и 2) для аффинной и проективной спектральных поверхностей.

Другой естественный вопрос, возникающий при изучении коммутативных колец (в том числе пополненных) операторов: как описать те алгебры, которые состоят из операторов, не зависящих от x_1 или x_2? Мы называем такие алгебры "тривиальными", поскольку их можно легко построить, беря коммутативные подалгебры операторов от одной переменной и добавляя дифференцирование по другой переменной. Как ни странно, геометрия соответствующих спектральных геометрических данных не так уж тривиальна. Мы даем описание (теорема 7) таких "тривиальных" алгебр в терминах геометрических данных.

Наконец, мы приводим примеры поверхностей (примеры 2 и 3), для которых можно описать все пучки из вышеупомянутого пространства модулей и вычислить все соответствующие им кольца коммутирующих (пополненных) операторов. Все такие кольца оказываются "тривиальны".

1.3. Краткое содержание статьи таково.

В п. 2.1 мы напоминаем основные определения геометрических данных из работы [1] и также даем альтернативные определения этих данных.

В п. 2.2 мы напоминаем конструкцию пар Шура, ассоциированных с геометрическими данными.

В п. 2.4 мы определяем отображение ограничения ζ и доказываем несколько технических лемм.

В п. 2.5 мы напоминаем основные определения и свойства пополненного кольца дифференциальных операторов, напоминаем теорему классификации из [1] и доказываем дополнительные технические леммы, необходимые в оставшейся части статьи.

В п. 2.6 мы напоминаем и доказываем некоторые свойства пар Шура, соответствующих геометрическим данным с фиксированным полиномом Гильберта у пучка. Наиболее важные свойства отображения ζ сформулированы в предложении 3. В этом пункте мы также формулируем гипотезу об отображении ζ.

В § 3 мы доказываем теоремы о свойстве коэно-маколеевости, замыкании плоскости и преобразовании Дарбу.

В § 4 мы приводим описание "тривиальных" алгебр и примеры.

Часть настоящей работы была создана во время визита первого автора в Берлинский университет им. Гумбольдта, осуществленного в рамках программы им. В. Вернадского МГУ-ДААД (Referat 325-paw, Kennziffer A/12/89240). Другая часть работы была создана в Институте математики общества Макса Планка в Бонне во время визита первого автора (1–30 сентября 2013 г.). Автор выражает глубокую признательность институту за отличные рабочие условия.

Второй автор благодарит кафедру дифференциальной геометрии и приложений МГУ за гостеприимство во время его научного визита в мае 2012 г., во время которого появились некоторые идеи этой работы.

Авторы также признательны Игорю Бурбану, Антонио Лафаче и Денису Осипову за их постоянный интерес к работе и многочисленные стимулирующие обсуждения.

§ 2. Предварительные сведения

В настоящей работе мы, как правило, используем стандартные обозначения из алгебраической геометрии; см., например, книгу [23]. Мы также используем некоторые обозначения из наших предыдущих работ [1], [2].

На двумерном локальном поле $k((u))((t))$ мы будем рассматривать следующее дискретное нормирование ранга 2 $\nu\colon k((u))((t))^* \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$:

$$\nu(f)=(m,l), \quad \text{если} \quad f=t^l u^m f_0, \qquad \text{где} \quad f_0\in k[[u]]^*+tk((u))[[t]].$$

(Здесь $k[[u]]^*$ обозначает группу обратимых элементов кольца $k[[u]]$.) Мы также определим дискретное нормирование ранга 1:

$$\nu_t(f)=l.$$

2.1. Геометрические данные. В этом пункте мы напомним определения из работ [1], [2]; некоторые из них немного изменены, чтобы несколько упростить изложение и избежать объяснения некоторых технических деталей.

Напомним, что для любого n-мерного неприводимого проективного многообразия X над полем k и для любых дивизоров Картье $E_1,\dots,E_n\in \operatorname{Div}(X)$ определен индекс пересечения $(E_1\cdots E_n)\in\mathbb{Z}$ (см., например, [24], [25; п. 1.1]). Пусть $(E^n)=(E\cdots E)$ – индекс самопересечения дивизора Картье $E\in\operatorname{Div}(X)$ на X, $\mathscr{F}$ – когерентный пучок на X. Согласно асимптотической теореме Римана–Роха (см. [25; п. 1.1.D]) эйлерова характеристика $\chi\bigl(X,\mathscr{F}\bigotimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X(mE)\bigr)$ – полином степени $\leqslant n$ от m со старшим членом

$$\chi\biggl(X,\mathscr{F}\bigotimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_X(mE)\biggr)=\operatorname{rk}(\mathscr{F})\cdot\frac{(E^n)}{n!}\cdot m^n+O(m^{n-1}), \tag{2.1}$$

где rk обозначает ранг пучка.

Определено также отображение циклов: $\mathrm{Z}\colon \mathrm{Div}(X)\to \mathrm{WDiv}(X)$ из группы дивизоров Картье в группу дивизоров Вейля на X (см. [2; приложение A]). Если $E_1, E_2 \in \mathrm{Div}(X)$ таковы, что $\mathrm{Z}(E_1)=\mathrm{Z}(E_2)$, то индексы самопересечения равны: $(E_1^n)=(E_2^n)$ (см. [2; п. 2.4]).

Отображение циклов Z при ограничении на полугруппу эффективных дивизоров Картье $\mathrm{Div}^+(X)$ инъективно; образ лежит в полугруппе эффективных дивизоров Вейля $\mathrm{WDiv}^+(X)$, не содержащихся в сингулярном локусе. Будем говорить, что эффективный дивизор Вейля C на X, не содержащийся в сингулярном локусе, есть $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X, если $lC\in \mathrm{Im}\big(\mathrm{Z}|_{\mathrm{Div}^+(X)}\big)$ для некоторого целого $l>0$.

Определение 1. Пусть C – $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X. Определим *индекс самопересечения* (C^n) на X по формуле

$$(C^n)=(G^n)/l^n, \tag{2.2}$$

где $G=lC$ – дивизор Картье для некоторого целого $l>0$.

Отметим, что если $l>0$ – минимальное целое, при котором lC является дивизором Картье, то для любого другого $l'>0$ с тем же свойством имеем $l\mid l'$. Следовательно, используя свойство $(E_1^n)=m^n(E_2^n)$ для любых $E_1=mE_2$, $E_2\in \mathrm{Div}(X)$, $m\in\mathbb{Z}$, получаем, что формула (2.2) не зависит от выбора подходящего l.

Определение 2. Набор $(X, C, P, \mathscr{F}, \pi, \varphi)$ будем называть *геометрическими данными ранга* r, если он состоит из следующих объектов (где мы фиксируем кольцо $k[[u,t]]$ для всех объектов).

1) X – приведенная неприводимая проективная алгебраическая поверхность, определенная над полем k.
2) C – приведенный неприводимый обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X.
3) $P\in C$ – замкнутая k-точка, регулярная на C и на X.
4) $\pi\colon \widehat{\mathscr{O}}_P\to k[[u,t]]$ – локальный гомоморфизм локальных k-алгебр, удовлетворяющий следующему свойству. Если f – локальное уравнение кривой C в точке P, то $\pi(f)k[[u,t]]=t^rk[[u,t]]$, и индуцированное отображение $\pi\colon \widehat{\mathscr{O}}_{C,P}=\widehat{\mathscr{O}}_P/(f)\to k[[u]]=k[[u,t]]/(t)$ – изоморфизм. (Определение π не зависит от выбора подходящего f. Кроме того, из этого определения следует, что π – вложение, $k[[u,t]]$ – свободный $\widehat{\mathscr{O}}_P$-модуль ранга r относительно π. Более того, для любого элемента g из максимального идеала $\mathscr{M}_P$ кольца $\mathscr{O}_P$ такого, что элементы g и f порождают $\mathscr{M}_P$, имеют место равенства $\nu(\pi(f))=(0,r)$, $\nu(\pi(g))=(1,0)$.)
5) $\mathscr{F}$ – квазикогерентный пучок без кручения на X.
6) $\varphi\colon \mathscr{F}_P\hookrightarrow k[[u,t]]$ – вложение $\mathscr{O}_P$-модулей, удовлетворяющее следующим условиям для всякого $n\geqslant 0$ (отметим, что согласно п. 4) этого определения $k[[u,t]]$ – $\mathscr{O}_P$-модуль относительно π). Согласно п. 2) существует минимальное натуральное число d такое, что $C'=dC$ – очень обильный дивизор на X. Пусть $\gamma_n\colon H^0(X,\mathscr{F}(nC'))\hookrightarrow \mathscr{F}(nC')_P$ обозначает вложение (это вложение, поскольку $\mathscr{F}(nC')$ – квазикогерентный пучок без кручения на X). Пусть $\varepsilon_n\colon \mathscr{F}(nC')_P\to\mathscr{F}_P$ обозначает естественный изоморфизм $\mathscr{O}_P$-модулей, заданный умножением на элемент $f^{nd}\in\mathscr{O}_P$,

где $f \in \mathscr{O}_P$ выбран, как в п. 4). Пусть $\tau_n\colon k[[u,t]] \to k[[u,t]]/(u,t)^{ndr+1}$ обозначает естественный эпиморфизм колец. Мы требуем, чтобы отображение

$$\tau_n \circ \varphi \circ \varepsilon_n \circ \gamma_n\colon H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \to k[[u,t]]/(u,t)^{ndr+1}$$

было изоморфизмом. (Эти условия на отображение φ не зависят от выбора подходящего элемента f.)

Замечание 1. Ранг пучка больше или равен рангу геометрических данных; ср. [2; замечание 3.3]. Если пучок $\mathscr{F}$ когерентен и ранга 1, то π – изоморфизм, и φ индуцирует изоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{\mathscr{F}_P} \simeq k[[u,t]]$; см. [1; замечание 3.7]. Заметим, что любые две тривиализации $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2\colon \widehat{\mathscr{F}_P} \simeq k[[u,t]]$ отличаются умножением на элемент $a \in k[[u,t]]^*$. В некоторых случаях условия на отображение φ в последнем пункте определения можно переписать в чисто алгебро-геометрическом смысле; см. предложение 3 ниже.

2.1.1. *Альтернативное определение геометрических данных.* В этом пункте мы предлагаем альтернативное определение геометрических данных. Это определение может показаться специалистам более “геометрическим”.

Введем следующие обозначения:
$T = \operatorname{Spec} k[[u,t]] \supset T_1 = \operatorname{Spec} k[[u]]$ (схема, определенная уравнением $t=0$),
$O = \operatorname{Spec}(k) \in T_1$,
$R = k[[u,t]]$, $\mathscr{M} = (u,t) \subset R$.

Определение 3. *Геометрические данные* (ранга r) – это тройка $(X, j, \mathscr{F})$, где X – неприводимая проективная поверхность,

$$j\colon T \to X$$

– доминантный k-морфизм, и $\mathscr{F} \subset j_*\mathscr{O}_T$ – квазикогерентный подпучок, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $j_*(T_1) = C \subset X$ – кривая[1] (автоматически неприводимая) и $P = j(O)$ – точка, регулярная в C и в X;
2) $T_1 \times_X \{P\} = \{O\}$, $T \times_X C = rT_1$ (расслоенное произведение здесь – подсхема в T и rT_1 – эффективный дивизор Картье в T), число r называется рангом тройки $(X, j, \mathscr{F})$;
3) существует эффективный очень обильный дивизор Картье $C' \subset X$ с циклом $Z(C') = dC$, и для всех $n > 0$ индуцированное отображение (вложением $\mathscr{F} \subset j_*\mathscr{O}_T$)

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathscr{F}(nC')) &\to H^0(X, j_*\mathscr{O}_T(nC')) = H^0(T, \mathscr{O}_T(ndrT_1)) \\ &= Rt^{-ndr} \to Rt^{-ndr}/\mathscr{M}^{ndr+1}t^{-ndr} \end{aligned} \tag{2.3}$$

— изоморфизм.

Доказательство эквивалентности двух определений мы оставляем читателю.

[1] Обозначение: для морфизма нётеровых схем $f\colon X \to Y$ и замкнутой подсхемы $Z \subset X$ через $f_*Z \subset Y$ мы обозначаем замкнутую подсхему, определенную идеалом $\ker(\mathscr{O}_Y \xrightarrow{f^*} f_*\mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_Z)$.

Замечание 2. Для геометрических данных выполняются следующие свойства:

1) C – $\mathbb{Q}$-Картье дивизор и $C^2 = (C' \cdot C)/d = (C')^2/d^2$;

2) $H^0(X, \mathscr{F}) \simeq k$ (в силу п. 3) определения 3), поэтому имеется естественное вложение $\mathscr{O}_X \subset \mathscr{F}$;

3) $\mathscr{F}$ – пучок без кручения на X, и если $\mathscr{F}$ когерентен, то

$$\mathrm{rk}(\mathscr{F})(C^2) = r^2.$$

Действительно, для $\mathscr{F}$ имеем

$$\chi(\mathscr{F}(nC')) = \frac{(ndr+1)(ndr+2)}{2}.$$

Если $\mathscr{F}$ когерентен ранга m, то $\mathscr{F} \sim \mathscr{O}_X^m$ ($\sim$ означает, что старшие члены полиномов Гильберта пучков совпадают). Для любого когерентного пучка $\mathscr{G}$ на X функция $\chi(\mathscr{G}(nC'))$ полиномиальна степени $\dim(\mathscr{G}) = l$ с положительным старшим коэффициентом ($\in \mathbb{Z}/l!$), так что $\chi(\mathscr{F}(nC')) \sim m\chi(\mathscr{O}_X(nC'))$ и $n^2d^2r^2/2 = m(C')^2/2$.

Предложение 1. *Если вложение $\mathscr{O}_{X,P} \to \mathscr{F}_P$ – изоморфизм, то $r = 1$. Далее, $\mathscr{O}_X = \mathscr{F}$, если и только если $X = \mathbb{P}^2$ и C – прямая в $\mathbb{P}^2$.*

Доказательство. Если C задается уравнением $f = 0$ в малой окрестности точки P (по п. 1) определения 3) кольцо $\mathscr{O}_{X,P}$ регулярно и $\mathscr{O}_{C,P} = \mathscr{O}_{X,P}/f\mathscr{O}_{X,P}$), то $fR = t^rR$ (в силу п. 2)) и $\mathscr{F}(nC')_P = (\mathscr{F}_P)_{f^{nd}}$. В силу п. 3) имеем

$$Rt^{-ndr} = H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \oplus \mathscr{M}^{ndr+1}t^{-ndr},$$

так что

$$Rt^{-ndr} = \mathscr{F}_P t^{-nd} + \mathscr{M}^{ndr+1}t^{-ndr},$$

и если $\mathscr{F}_P = \mathscr{O}_{X,P}$, то получаем $R = k[[u, t^r]] + \mathscr{M}^{ndr+1}$ (для доказательства мы можем предполагать, что u, t^r – порождающие идеала $\widehat{\mathscr{M}_{X,P}} = \mathscr{M}_{X,P}\widehat{\mathscr{O}}_{X,P}$). Это возможно только при $r = 1$. Если $\mathscr{O}_X = \mathscr{F}$, то мы получаем канонические базисы для всех групп $H^0(X, \mathscr{O}_X(nC'))$ вида v_{ij}, $0 \leqslant i \leqslant i+j \leqslant nd$, и $v_{ij}v_{hm} = v_{i+h,j+m}$ в $H^0(X \setminus C, \mathscr{O}_X) =: A$ (v_{ij} соответствует элементу u^it^j при изоморфизме в п. 3)). Таким образом, $A = k[x, y]$ с $x = v_{10}$, $y = v_{01}$ (и тогда $v_{ij} = x^iy^j$).

Так как

$$X = \mathrm{Proj}\biggl(\bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(X, \mathscr{O}_X(nC'))\biggr) = \mathrm{Proj}\biggl(\bigoplus_{n \geqslant 0} A_n s^n\biggr),$$

где $A_n = \sum_{i+j \leqslant nd} kx^iy^j$, мы получаем (подстановкой $x = x'/z$, $y = y'/z$, $s = z^d$)

$$\bigoplus_{n \geqslant 0} A_n s^n = k\bigl[(x')^i(y')^jz^k \mid i+j+k = m\bigr],$$

т.е. X – вложенная отображением Веронезе степени d плоскость $\mathbb{P}^2$. Так как $C^2 = 1$, получаем что C – прямая.

2.2. Ассоциированные пары Шура. Для геометрических данных $(X, C, P, \mathscr{F}, \pi, \varphi)$ ранга r определим пару подпространств

$$W, A \subset k[[u]]((t)),$$

где A – фильтрованная подалгебра в $k[[u]]((t))$ и W – фильтрованный A-модуль, следущим образом (ср. [1; определение 3.15]).

Пусть f^d – локальная порождающая идеала $\mathscr{O}_X(-C')_P$, где $C' = dC$ – очень обильный дивизор Картье (см. определение 2, п. 6)). Тогда $\nu(\pi(f^d)) = (0, r^d)$ в кольце $k[[u,t]]$ и, следовательно, $\pi(f^d)^{-1} \in k[[u]]((t))$. Таким образом, имеются естественные вложения для любого $n > 0$

$$H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \hookrightarrow \mathscr{F}(nC')_P \simeq f^{-nd}(\mathscr{F}_P) \hookrightarrow k[[u]]((t)),$$

где последнее вложение – это вложение $f^{-nd}\mathscr{F}_P \overset{\varphi}{\hookrightarrow} f^{-nd}k[[u,t]] \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (ср. определение 2, п. 6)). Следовательно, определено вложение

$$\chi_1 \colon H^0(X \setminus C, \mathscr{F}) \simeq \varinjlim_{n>0} H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \hookrightarrow k[[u]]((t)).$$

Определим

$$W \overset{\mathrm{def}}{=} \chi_1(H^0(X \setminus C, \mathscr{F})).$$

Аналогично определяется вложение $H^0(X \setminus C, \mathscr{O}) \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (и мы будем также обозначать его χ_1). Определим $A \overset{\mathrm{def}}{=} \chi_1(H^0(X \setminus C, \mathscr{O}))$.

Из этой конструкции следует, что

$$A \subset k[[u']]((t')) \subset k[[u]]((t)), \tag{2.4}$$

где $t' = \pi(f)$, $u' = \pi(g)$ (см. также определение 2, п. 4)). Таким образом, на A определена фильтрация A_n, индуцированная фильтрацией $t'^{-n}k[[u']][[t']]$ на пространстве $k[[u']]((t'))$:

$$A_n = A \cap t'^{-n}k[[u']][[t']] = A \cap t^{-nr}k[[u]][[t]]. \tag{2.5}$$

Имеется изоморфизм $X \simeq \operatorname{Proj}(\widetilde{A})$, где $\widetilde{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n s^n$ (см. также [1; леммы 3.3, 3.6, теорема 3.3]). Аналогичная фильтрация определена на пространстве $W \subset k[[u]]((t))$:

$$W_n = W \cap t^{-nr}k[[u]][[t]], \tag{2.6}$$

и опять[2] $\mathscr{F} \simeq \operatorname{Proj}(\widetilde{W})$, где $\widetilde{W} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n s^n$. Заметим, что

$$W_{nd} \simeq H^0(X, \mathscr{F}(nC'))$$

по определению 2, п. 6), и по конструкции отображения χ_1.

---

[2]Здесь и далее мы используем нестандартное обозначение Proj для квазикогерентного пучка, ассоциированного с градуированным модулем. Если M – фильтрованный модуль, то мы используем обозначение $\widetilde{M} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i s^i$ для модуля Риса; для колец Риса обозначение аналогично.

2.2.1. *Ассоциированные пары Шура для альтернативных геометрических данных.* Ту же пару подпространств (W, A) можно определить также в терминах альтернативного определения геометрических данных. А именно, каждой тройке $(X, j, \mathscr{F})$ мы сопоставляем пару (A, W), $A \subset R[t^{-1}] = k[[u]]((t))$, $W \subset R[t^{-1}]$, где $A = H^0(X \setminus C, \mathscr{O}_X) \simeq \varinjlim_{n>0} H^0(X, \mathscr{O}_X(nC'))$ вложено посредством отображения

$$j^*\colon H^0(X, \mathscr{O}_X(nC')) \to H^0(X, j_*\mathscr{O}_T(nC')) = H^0(X, j_*\mathscr{O}_T(ndrT_1)) = R \cdot t^{-ndr}$$

и аналогично определяется W для $\mathscr{F} \subset j_*\mathscr{O}_T$; A – фильтрованное подкольцо с фильтрацией $A_n = A \cap R \cdot t^{-nr}$ и W – фильтрованный A-модуль с фильтрацией $W_n = A \cap R \cdot t^{-nr}$.

Пара (A, W) определяет тройку $(X, j, \mathscr{F})$, где X и $\mathscr{F}$ определяются так же, как выше, и морфизмы $j\colon T \to X$, $\mathscr{F} \subset j_*\mathscr{O}_T$ определяются через вложения $A \subset k[[u]]((t))$, $W \subset k[[u]]((t))$.

2.3. Категория геометрических данных. В этом пункте мы напоминаем определение категории $\mathscr{Q}$ геометрических данных из работы [1] и даем альтернативное определение. Формально этот пункт в нашей статье нужен лишь для понимания содержания теоремы 3. Однако мы решили написать его для полноты картины.

Определение 4. Определим *категорию $\mathscr{Q}$ геометрических данных* следующим образом:

1) множество объектов –
$$Ob(\mathscr{Q}) = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \mathscr{Q}_r,$$
где $\mathscr{Q}_r$ обозначает множество геометрических данных ранга r;

2) морфизм
$$(\beta, \psi)\colon [(X_1, C_1, P_1, \mathscr{F}_1, \pi_1, \varphi_1)] \to [(X_2, C_2, P_2, \mathscr{F}_2, \pi_2, \varphi_2)]$$
двух объектов состоит из морфизма поверхностей $\beta\colon X_1 \to X_2$ и гомоморфизма $\psi\colon \mathscr{F}_2 \to \beta_*\mathscr{F}_1$ пучков на X_2 таких, что:

(a) $\beta\big|_{C_1}\colon C_1 \to C_2$ – морфизм кривых и $\beta^{-1}(X_2 \setminus C_2) = X_1 \setminus C_1$;

(b) $\beta(P_1) = P_2$;

(c) существует непрерывный изоморфизм k-алгебр $h\colon k[[u,t]] \to k[[u,t]]$ (в естественной линейной топологии, в которой база окрестностей нуля порождена степенями максимального идеала) такой, что
$$h(u) = u \mod ((u^2) + (t)), \qquad h(t) = t \mod ((ut) + (t^2)),$$
и коммутативна диаграмма
$$\begin{tikzcd} H^0(X_2 \setminus C_2, \mathscr{O}_2) \arrow[r, "\beta^\sharp"] \arrow[d, "\chi_2"] & H^0(X_1 \setminus C_1, \mathscr{O}_1) \arrow[d, "\chi_1"] \\ k[[u]]((t)) \arrow[r, "\widehat{h}"] & k[[u]]((t)), \end{tikzcd}$$
где $\widehat{h}$ обозначает естественное расширение отображения h до автоморфизма k-алгебры $k[[u]]((t))$;

(d) существует изоморфизм $k[[u,t]]$-модулей $\xi\colon k[[u,t]] \simeq h_*(k[[u,t]])$ (который задается умножением на обратимый элемент $\xi \in k[[u,t]]^*$) такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^0(X_2 \setminus C_2, \mathscr{F}_2) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\chi_2"] & H^0(X_2 \setminus C_2, \beta_*\mathscr{F}_1) = H^0(X_1 \setminus C_1, \mathscr{F}_1) \arrow[d, "\chi_1"] \\ k[[u]]((t)) \arrow[r, "\widehat{\xi}"] & h_*(k[[u]]((t))) = k[[u]]((t)). \end{tikzcd}$$

2.3.1. *Альтернативное определение категории.* Можно дать альтернативное определение категории следующим образом. Множество объектов определяется, как и раньше, т.е. объект из $\mathscr{Q}_r$ – тройка $(X, j, \mathscr{F})$ ранга r.

Определим морфизм двух объектов $(X_1, j_1, \mathscr{F}_1) \to (X_2, j_2, \mathscr{F}_2)$ как пару (β, ψ), где $\beta\colon X_1 \to X_2$ – доминантный морфизм поверхностей, $\psi\colon \mathscr{F}_2 \to \beta_*\mathscr{F}_1$ – морфизм квазикогерентных пучков, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $(\beta^{-1}C_2)_{\mathrm{red}} = C_1$;
2) существует $h \in \mathrm{Aut}_k(T)$ такой, что $h_*(T_1) = T_1$,

$$h^*(u) = u \mod ((u^2) + (t)), \qquad h^*(t) = t \mod ((ut) + (t^2)),$$

и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "h"] & X_1 \arrow[d, "\beta"] \\ T \arrow[r, "j_2"] & X_2; \end{tikzcd}$$

3) существует $\xi \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{O}_T)$ (т.е. элемент из R^*) такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{F}_2)_{P_2} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\cap"] & (\mathscr{F}_1)_{P_1} \arrow[d, "\cap"] \\ R \arrow[r, "\xi"] & R. \end{tikzcd}$$

Композиция со вторым морфизмом (β', ψ') определяется как

$$(\beta', \psi') \circ (\beta, \psi) = \bigl(\beta'\beta, (\beta')_*(\psi)\psi'\bigr).$$

Замечание 3. Отметим, что, вообще говоря, морфизм пар $\beta\colon (X_1, C_1) \to (X_2, C_2)$ индуцирует вложение $H^0(X_2 \setminus C_2, \mathscr{O}_{X_2}) \hookrightarrow H^0(X_1 \setminus C_1, \mathscr{O}_{X_1})$, если и только если $(\beta^{-1}C_2)_{\mathrm{red}} = C_1$.

В этом утверждении часть “если” очевидна; докажем его в обратную сторону. Без ограничения общности пусть $d > 0$ – такое целое, что $C_1' = dC_1$, $C_2' = dC_2$ – эффективные очень обильные дивизоры Картье. Тогда $\beta^*C_1' = mC_2' + E$, где либо $E = 0$, либо E – эффективный дивизор Картье.

Если $A = H^0(X_1 \setminus C_1, \mathscr{O}_{X_1})$, $q = H^0(X_1 \setminus C_1, \mathscr{O}_{X_1}(-E))$ (таким образом, q – обратимый идеал), то

$$\mathrm{Spec}(A) = X_1 \setminus C_1, \qquad \mathrm{Spec}\biggl(\bigcap_n q^{-n}\biggr) = X_1 \setminus \beta^{-1}(C_2).$$

Если $B = H^0(X_2 \setminus C_2, \mathscr{O}_{X_2})$, то $A \subset \bigcap_n q^{-n}$, и модуль $\bigcap_n q^{-n}$ конечен над B. Если $B \subset A$, то из точной последовательности

$$0 \to A/B \to \Big(\bigcap_n q^{-n}\Big)/B \to \Big(\bigcap_n q^{-n}\Big)/A \to 0$$

следует, что $\big(\bigcap_n q^{-n}\big)$ должен быть конечным A-модулем, что ведет к противоречию, если $E \neq 0$.

Замечание 4. Условие на $h^*(u)$, $h^*(t)$ из п. 2) альтернативного определения важно для того, чтобы установить категорную эквивалентность с категорией пар Шура из работы [1]. Дело в том, что автоморфизмы вида $h^*(u) = c_1u$, $h^*(t) = c_2t$, примененные к паре Шура, приводят (после применения квазиобратного функтора из [1; теорема 3.3]) к геометрическим данным с пучком $\mathscr{F}$, отличным от пучка данных исходной пары Шура (т.е. к данным, не изоморфным исходным). Этот эффект был известен уже в классической теории КП как действие скейлингового преобразования (см. [26; § 4, § 7]).

2.4. Отображение ограничения ζ. Чтобы построить отображение ζ, упоминавшееся во введении, нам нужно будет распространить конструкции из предыдущего пункта на более широкое множество пучков. Пусть X, C, C', P и $\mathscr{O}_{X,P} \subset R$ (для вложения π или для морфизма $j\colon T \to X$) обозначают то же, что и прежде. Пусть также $A \subset k[[u]]((t)) = R[t^{-1}]$ строится так же, как и выше. Начнем со следующего замечания.

Замечание 5. Заметим, что мы можем построить похожие пространства $W_n, \widetilde{W}$ для любых пучков без кручения $\mathscr{F}$ (а не только для пучков из геометрических данных), для которых дополнительно определено вложение $\mathscr{O}_P$-модулей $\mathscr{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$. Наиболее важный для нас пример таких пучков с вложением – когерентные коэно-маколеевы пучки без кручения ранга 1 (или даже более общие когерентные пучки $\mathscr{F}$ локально свободные ранга 1 в точке P), где мы дополнительно предполагаем, что ранг данных $r = 1$ (т.е. вложение π задает изоморфизм $\mathscr{O}_{X,P} \simeq R$).

В этом случае слой $\mathscr{F}_P$ – свободный $\mathscr{O}_P$-модуль. Пусть $\varphi'\colon \mathscr{F}_P \simeq \mathscr{O}_P$ – некоторая тривиализация; мы можем определить вложение φ как композицию тривиализации φ' с изоморфизмом π. Заметим, что при выборе другой тривиализации пучка $\mathscr{F}$ новое пространство W будет отличаться от старого умножением на элемент $a \in k[[u,t]]^*$, а кольцо A не изменится. Отметим также, что свойство $W_{nd} \simeq H^0(X, \mathscr{F}(nC'))$ может не выполняться для произвольных пучков.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения. Если $W \subset R[t^{-1}]$ – A-модуль, то определена фильтрация $W_n = t^{-nr}R \cap W$ (совместимая с фильтрацией на A) и, как следствие, определены $\widetilde{A}$-модули

$$\widetilde{A}(i) \quad (\widetilde{A}(i)_k = \widetilde{A}_{k+i}), \qquad \widetilde{W}(i) \quad (\widetilde{W}(i)_k = \widetilde{W}_{k+i})$$

и квазикогерентные пучки на X

$$\mathscr{B}_i = \mathrm{Proj}(\widetilde{A}(i)), \qquad \mathscr{F}_i = \mathrm{Proj}(\widetilde{W}(i)),$$

причем $\mathscr{B}_i \subset \mathscr{B}_{i+1}$, $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_{i+1}$. Заметим следующее.

1) $\mathscr{B}_{id} \simeq \mathscr{O}_X(iC')$, и если W происходит из геометрических данных, то $\mathscr{F}_{id} \simeq \mathscr{F}(iC')$. В общем случае $\mathscr{F}_{nd} \simeq \mathscr{F}_0(dC')$, поскольку по [27; предложение 2.4.7] имеем

$$\mathscr{F}_{nd} = \mathrm{Proj}(\widetilde{W}(nd)) \simeq \mathrm{Proj}(\widetilde{W}^{(d)}(n)),$$
$$\mathrm{Proj}(\widetilde{W}^{(d)}(n)) \simeq \mathrm{Proj}(\widetilde{W}^{(d)})(n) \simeq \mathscr{F}_0(nC')$$

для любого n.
2) Если $\mathscr{F}$ – квазикогерентный пучок с вложением $\mathscr{F} \subset j_*\mathscr{O}_T$ (эквивалентно $\mathscr{F}_P \subset R$), индуцирующим вложение $W = H^0(X \setminus C, \mathscr{F}) \subset R[t^{-1}]$, то $\mathscr{F}(iC') \subseteq \mathscr{F}_{id}$.
3) Если $\mathscr{F}$ – квазикогерентный пучок без кручения и если $\mathscr{F}_P$ – свободный модуль ранга 1, то существует вложение $\mathscr{F}_P \subset R$ (определенное выбором образующего при изоморфизме $\mathscr{F}_P \simeq \mathscr{O}_{X,P} \subset R$). Получающиеся пучки $\mathscr{F}_i$ не зависят от выбора образующего с точностью до изоморфизма, согласованного с вложениями $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_{i+1}$.
4) Из свойств (2.4), (2.5) следует, что пучки

$$\mathscr{B}_i/\mathscr{B}_{i-1} \simeq \mathrm{Proj}\biggl(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{i+n}/A_{i+n-1}\biggr),$$
$$\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i-1} \simeq \mathrm{Proj}\biggl(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{i+n}/W_{i+n-1}\biggr)$$

являются когерентными пучками[3] без кручения на $C \simeq \mathrm{Proj}(\mathscr{B}_0/\mathscr{B}_{-1})$.

Определение 5. Для любого пучка без кручения $\mathscr{F}$, для которого дополнительно определено вложение $\mathscr{O}_P$-модулей $\mathscr{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$, определим *отображение* (отображение “ограничения”) *из множества пучков* без кручения на поверхности X в множество пучков без кручения на кривой C следующим образом:

$$\zeta\colon \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_0/\mathscr{F}_{-1}. \tag{2.7}$$

Замечание 6. Для пучков $\mathscr{F}$, удовлетворяющих свойству

$$W_{nd} \simeq H^0(X, \mathscr{F}(nC'))$$

для всех $n \gg 0$, имеется изоморфизм $\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}_0$ в силу [28; лемма 9] и [23; гл. 2, пример 5.9]. Если $\mathscr{F}$ – пучок без кручения ранга 1, локально свободный в точке P, то по замечанию 5 для другого выбора тривиализации в P имеются

[3] Мы подразумеваем здесь и далее в похожих ситуациях обратные образы фактор-пучков на C. Заметим, что эти обратные образы канонически изоморфны пучкам $\mathrm{Proj}\bigl(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{i+n}/A_{i+n-1}\bigr)$, $\mathrm{Proj}\bigl(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{i+n}/W_{i+n-1}\bigr)$, где градуированные модули рассматриваются как $\mathscr{B}_0/\mathscr{B}_{-1}$-модули. Действительно, для любого $f \in A_d$ и для любого градуированного $\widetilde{A}$-модуля M имеется изоморфизм модулей $(M \otimes_{\widetilde{A}} (\mathscr{B}_0/\mathscr{B}_{-1}))_{(f)} \simeq M_{(f)} \otimes_{\widetilde{A}_{(f)}} (\mathscr{B}_0/\mathscr{B}_{-1})_{(f)}$, откуда следует, что обратные образы пучков $\mathscr{B}_i/\mathscr{B}_{i-1}$, $\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i-1}$ изоморфны пучкам $\mathrm{Proj}(M)$, $\mathrm{Proj}(N)$ на C, где $M = \bigl(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{i+n}/A_{i+n-1}\bigr) \otimes_{\widetilde{A}} (\mathscr{B}_0/\mathscr{B}_{-1})$, $N = \bigl(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{i+n}/W_{i+n-1}\bigr) \otimes_{\widetilde{A}} (\mathscr{B}_0/\mathscr{B}_{-1})$. Но модули M, N изоморфны $\mathscr{B}_0/\mathscr{B}_{-1}$-модулям $\bigl(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{i+n}/A_{i+n-1}\bigr)$, $\bigl(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{i+n}/W_{i+n-1}\bigr)$.

изоморфизмы $\mathcal{F}'_k \simeq \mathcal{F}_k$ для всех k. Таким образом, в этом случае определение ζ не зависит от тривиализации. На самом деле в этом случае ζ зависит лишь от пучка $\mathcal{F}$ (см. замечание 8 ниже).

С другой стороны, для любого пучка без кручения $\mathcal{F}$ и любого $m > 0$ имеются точные последовательности

$$0 \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-mC') \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')) \to 0.$$

Поэтому обратный образ пучка $\mathcal{F}_0$ на схеме $(C, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')))$ (где i: $C \hookrightarrow X$ обозначает вложение) изоморфен обратному образу пучка $\mathcal{F}_0/\mathcal{F}_{-md}$.

Всюду далее мы будем обозначать обратный образ пучка $\mathcal{F}$ на схеме $(C, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')))$ через $\mathcal{F}\big|_{mC'}$.

Отметим, что схема $(C, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')))$ неприводима, так как кривая C неприводима. Поэтому нильрадикал кольца $\widetilde{A}/\widetilde{A}(-md)$ прост. Снова из формул (2.4), (2.5) следует, что $\mathrm{Ass}(\widetilde{W}/\widetilde{W}(-md))$ совпадает с этим нильрадикалом. Следовательно, пучок $\mathcal{F}_0\big|_{mC'}$ имеет чистую размерность 1 (ср. [29; с. 3]), поскольку любое ограничение ненулевого сечения $a \in \mathcal{F}_0\big|_{mC'}(U)$ (где U – произвольное открытое подмножество в C) на меньшее открытое подмножество не обращается в нуль. А значит, для любого пучка без кручения ранга 1, локально свободного в точке P, пучок $\mathcal{F}\big|_{mC'} \subset \mathcal{F}_0\big|_{mC'}$ имеет чистую размерность 1.

Отметим еще, что для любого пучка без кручения $\mathcal{F}$ такого, что его ограничения $\mathcal{F}\big|_{mC'}$ на схеме $(C, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')))$ имеют чистую размерность 1, имеет место следующее свойство.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{F}$ – пучок без кручения на X, для которого дополнительно определено вложение $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$, удовлетворяющее следующему условию: если $w \in W_{nd}$, то $w \in f^{-nd}(\mathcal{F}_P)$. Допустим, что его ограничения $\mathcal{F}\big|_{mC'}$ имеют чистую размерность 1 для всех $m > 0$.*

Тогда $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq W_{nd}$ для всех $n \geqslant 0$.

Замечание 7. Условие на вложение $\mathcal{O}_P$-модулей из леммы 1 выполняется, например, для всех пучков без кручения ранга 1, локально свободных в точке P (см. замечание 5), и для когерентных пучков ранга r из геометрических данных (где r совпадает с рангом данных), поскольку $\mathcal{O}_P$ – регулярное факториальное кольцо. Другие примеры см. в теореме 4.

Доказательство. По определению пространства W

$$W_{nd} = \{w \in W \mid f^{nd}w \in k[[u]][[t]]\} = \{w \in W \mid \nu_t(f^{nd}w) \geqslant 0\}.$$

Также по определению $\chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(nC'))) \subset W_{nd}$. Пусть $w \in W_{nd}$, $w \neq 0$. Покажем, что $w \in \chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$. Имеем

$$w \in \chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(mC'))$$

для некоторого m. Так как $\mathcal{F}$ – пучок без кручения и C' – дивизор Картье, имеют место вложения

$$\chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(kC')) \subset \chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(nC')))$$

для всех $k \leqslant n$. Предположим, что $m > n$. Допустим обратное:

$$w \notin \chi_1(H^0(X, \mathscr{F}(nC')).$$

Пусть $b \in H^0(X, \mathscr{F}(mC'))$ обозначает прообраз w: $w = \chi_1(b)$.

Существует окрестность $U(P)$ точки P, где обильный дивизор Картье C' определен элементом f^d. Так как $w \in W_{nd}$, мы получаем $w \in f^{-nd}(\mathscr{F}_P)$, так что $b\big|_{U(P)} \in \Gamma(U(P), \mathscr{F}(nC'))$ и $b\big|_{U(P)} \neq 0$ (так как $\mathscr{F}$ – пучок без кручения). Теперь мы можем выписать коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & & b \arrow[r, hook] \arrow[d] & H^0\big(C, \mathscr{F}(mC')\big|_{(m-n)C'}\big) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(U(P), \mathscr{F}(nC')) \arrow[r] & \Gamma(U(P), \mathscr{F}(mC')) \arrow[r, "\alpha"] & H^0\big(U(P) \cap C, \mathscr{F}(mC')\big|_{(m-n)C'}\big),
\end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки – вложения. Действительно, правая стрелка является вложением, поскольку $\mathscr{F}(mC')\big|_{(m-n)C'}$ имеет чистую размерность 1 по предположению.

Но $\alpha(b) = 0$; противоречие. Таким образом, $b \in H^0(X, \mathscr{F}(nC'))$.

В силу [2; следствие 3.1] все пучки $\mathscr{F}$ ранга 1, происходящие из геометрических данных из определения 2, являются коэно-маколеевыми вдоль C. Из определения 2, п. 6) следует, что все такие пучки обладают свойством $\mathscr{O}_X \subset \mathscr{F}$, $P \notin \operatorname{Supp}(\mathscr{F}/\mathscr{O}_X)$.

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{F}$ – пучок без кручения ранга 1 на X. Предположим, что $\mathscr{F}$ коэно-маколеев вдоль C.*

Тогда для некоторой тривиализации $\widehat{\varphi}$: $\widehat{\mathscr{F}_P} \simeq k[[u,t]]$ (см. замечание 5)

$$W_{nd} \simeq H^0(X, \mathscr{F}(nC'))$$

для всех $n \geqslant 0$, или, эквивалентно, $\mathscr{F}_0 \simeq \mathscr{F}$.

Доказательство сразу следует из замечаний 6, 7 и леммы 1, так как $\mathscr{F}$ локально свободен в P.

Замечание 8. Если $\mathscr{F}$ – пучок без кручения ранга 1 и локально свободен в P, то $\zeta(\mathscr{F}) \simeq i^*(\mathscr{F})$, где i обозначает то же отображение, что и в замечании 6. Действительно, $\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}_0$ по лемме 1, замечаниям 6, 7. Используя рассуждения из сноски 3, получаем $i^*(\mathscr{F}_0) \simeq \operatorname{Proj}\big(\widetilde{W} \otimes_{\widetilde{A}} (\widetilde{A}/\widetilde{A}(-1))\big)$. Легко видеть, что $(\widetilde{A}/\widetilde{A}(-1))$-модули $\big(\widetilde{W} \otimes_{\widetilde{A}} (\widetilde{A}/\widetilde{A}(-1))\big)$ и $\big(\widetilde{W}/\widetilde{W}(-1) \otimes_{\widetilde{A}} (\widetilde{A}/\widetilde{A}(-1))\big)$ изоморфны. Но опять же из рассуждений сноски 3 имеем

$$i^*(\mathscr{F}_0/\mathscr{F}_{-1}) \simeq \operatorname{Proj}\bigg(\widetilde{W}/\widetilde{W}(-1) \otimes_{\widetilde{A}} (\widetilde{A}/\widetilde{A}(-1))\bigg).$$

Следствие. *Для любого $k \geqslant 0$ имеются изоморфизмы $H^0(X, \mathscr{F}_k(nC')) \simeq W_{nd+k}$ при всех $n \geqslant 0$.*

Доказательство очевидно.

2.5. Коммутативные кольца операторов. Здесь мы будем иметь дело в основном с коммутативными k-алгебрами ДО $B \subset D = k[[x_1, x_2]][\partial_1, \partial_2]$, удовлетворяющими следующему условию:

$$\text{B содержит такие операторы P, Q с постоянными старшими символами, что пересечение характеристических дивизоров операторов P, Q пусто.} \tag{2.8}$$

Напомним, что символ $\sigma(P)$ оператора $P \in D$ называется постоянным, если $\sigma(P) \in k[\xi_1, \xi_2]$. Характеристический дивизор задается как дивизор нулей $\sigma(P)$ в $\mathbb{P}_k^{n-1}$. Он инвариантен относительно k-линейных замен координат $x_1, \dots, x_n$. Напомним также, что всякий оператор Q из кольца B, удовлетворяющего свойству (2.8), имеет постоянный старший символ (см., например, [2; лемма 2.1]) и что все такие кольца – конечно порожденные k-алгебры размерности Крулля 2 (см., например, [2; теорема 2.1]).

В работе [1] было показано, что такие алгебры являются частью более широкого множества коммутативных k-алгебр $B' \subset \widehat{D}$, и все алгебры из этого множества могут быть классифицированы в терминах геометрических данных из п. 2.1. Чтобы объяснить, что происходит, нам придется напомнить несколько определений и утверждений из [1].

Определение 6. Определим *функцию порядка на кольце* $k[[x_1, x_2]]$ по правилу

$$\operatorname{ord}_M(a) = \sup\{n \mid a \in (x_1, x_2)^n\}.$$

Определение 7 (см. [1; п. 2.1.5]). Определим *кольцо*:

$$\widehat{D}_1 = \biggl\{ a = \sum_{q \geqslant 0} a_q \partial_1^q \mid a_q \in k[[x_1, x_2]] \text{ и для любого } N \in \mathbb{N} \text{ существует } n \in \mathbb{N} \\ \text{такое, что } \operatorname{ord}_M(a_m) > N \text{ для любого } m \geqslant n \biggr\}. \tag{2.9}$$

Определим *пополнение кольца ДО*:

$$\widehat{D} = \widehat{D}_1[\partial_2], \qquad \widehat{E}_+ = \widehat{D}_1((\partial_2^{-1})).$$

Определение 8 (см. [1; определение 2.12]). Скажем, что оператор $P \in \widehat{D}$ *имеет порядок* $\operatorname{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$, если $P = \sum_{s=0}^{l} p_s \partial_2^s$, где $p_s \in \widehat{D}_1$, $p_l \in k[[x_1, x_2]][\partial_1] = D_1$, и $\operatorname{ord}(p_l) = k$ (здесь ord обозначает обычный порядок в кольце дифференциальных операторов D_1). В этой ситуации будем говорить, что оператор P имеет старший коэффициент 1, если старший коэффициент p_l равен 1.

Скажем, что оператор $Q = \sum q_{ij} \partial_1^i \partial_2^j \in \widehat{E}_+$ *удовлетворяет условию* $(A_1(m))$, если $\operatorname{ord}_M(q_{ij}) \geqslant i + j - m$ для всех (i, j).

Оператор $P \in \widehat{D}$, $P = \sum p_{ij} \partial_1^i \partial_2^j$ с $\operatorname{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$ *удовлетворяет условию* (A_1), если он удовлетворяет $(A_1(k + l))$.

Определение 9 (см. [1; определение 2.18]). Кольцо $B \subset \widehat{D}$ коммутирующих операторов называется *квазиэллиптическим*, если оно содержит два оператора P, Q со старшим коэффициентом 1 и $\operatorname{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\operatorname{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$ для некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$.

Кольцо B называется 1-*квазиэллиптическим*, если P, Q удовлетворяют условию (A_1).

Определение 10 (см. [1; определение 3.4]). Коммутативные 1-квазиэллиптические кольца $B_1, B_2 \subset \widehat{D}$ *эквивалентны*, если существует обратимый оператор $S \in \widehat{D}_1$ вида $S = f + S^-$, где $S^- \in \widehat{D}_1\partial_1$, $f \in k[[x_1, x_2]]^*$, такой, что $B_1 = SB_2S^{-1}$.

Определение 11 (см. [1]). Подпространство $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ называется 1-*пространством*, если существует базис w_i в W такой, что w_i удовлетворяют условию (A_1) для всех i (мы отождествляем здесь и далее кольцо $k[z_1^{-1}]((z_2))$ с кольцом $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ через отождествления $z_1 \leftrightarrow \partial_1^{-1}$, $z_2 \leftrightarrow \partial_2^{-1}$).

Используя отождествление $z_1 \leftrightarrow \partial_1^{-1}$, $z_2 \leftrightarrow \partial_2^{-1}$, мы можем расширить определение функции порядка ord_Γ из определения 8 на поле $V = k((z_1))((z_2))$. Используя антилексикографический порядок на группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, определим младший член $LT(a)$ произвольного ряда a из V как моном в a минимального порядка.

Определение 12 (см. [30]). *Носитель k-подпространства W из пространства V* – k-подпространство $\mathrm{Supp}(W)$ в пространстве V, порожденное элементами $\mathrm{LT}(a)$ для всех $a \in W$.

Определение 13 (см. [1; определение 3.2]). Будем говорить, что пара подпространств (A, W), где $A, W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$, A – k-алгебра с единицей и $W \cdot A \subset W$, – это 1-*пара Шура*, если A, W – 1-пространства и $\mathrm{Supp}(W) = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$.

Будем говорить, что 1-пара Шура – 1-*квазиэллиптическая пара Шура*, если A – 1-квазиэллиптическое кольцо.

Рассмотрим кольцо
$$\widehat{E}_+ = \widehat{D}_1((\partial_2^{-1})).$$
Оно действует на пространстве $k[z_1^{-1}]((z_2))$ посредством изоморфизма
$$\widehat{E}_+/(x_1, x_2)\widehat{E}_+ \simeq k[z_1^{-1}]((z_2)),$$
который снабжает это пространство структурой правого $\widehat{E}_+$-модуля.

Определение 14 (см. [1; определение 3.3]). Оператор $T \in \widehat{E}_+$ называется *допустимым*, если он обратим, имеет порядок нуль и $T\partial_1T^{-1}$, $T\partial_2T^{-1} \in k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$. Множество всех допустимых операторов обозначается Adm.

Оператор $T \in \widehat{E}_+$ называется 1-*допустимым*, если он допустим и удовлетворяет условию (A_1) (определение условия (A_1) для операторов из $\widehat{E}_+$ дословно такое же, как для операторов из $\widehat{D}$). Множество всех 1-допустимых операторов обозначается как Adm_1.

Две 1-пары Шура (A, W) и (A', W') эквивалентны, если $A' = T^{-1}AT$ и $W' = WT$, где T – допустимый оператор.

Замечание 9. В работе [1] было введено более общее условие роста (A_α), $\alpha \geqslant 1$. В настоящей работе мы используем только условие (A_1). Это единственный случай, когда работают все классификационные теоремы (см. также теоремы далее по тексту) из [1].

Напомним еще одно понятие из [1].

Рассмотрим множество в $\widehat{E}_+$

$$\Pi = \bigl\{P \in \widehat{E}_+ \mid \exists\, m \in \mathbb{Z}_+ \text{ такое, что } P \text{ удовлетворяет } (A_1(m))\bigr\}.$$

Это ассоциативное подкольцо с единицей (см. [1; следствие 2.2]).

Отметим, что $\Pi \supset D$. Напомним, что по [1; леммы 2.10, 2.11] любое 1-квазиэллиптическое кольцо B принадлежит Π.

Замечание 10. В силу [1; лемма 2.11] любые два оператора с постоянными коэффициентами L_1, L_2 вида

$$L_1 = \partial_1 + \sum_{q=1}^{\infty} v_q \partial_2^{-q}, \qquad L_2 = \partial_2 + \sum_{q=1}^{\infty} u_q \partial_2^{-q}$$

и удовлетворяющие условию (A_1) получаются с помощью сопряжения $L_1 = S^{-1}\partial_1 S$, $L_2 = S^{-1}\partial_2 S$, где $S = 1 + S^- \in k[[x_1,x_2]][\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ – обратимый 1-допустимый оператор.

С другой стороны, как легко проверить, для оператора

$$T_0 = c_0 \exp(c_1 x_2 \partial_1) \exp(c_2 x_2 + c_3 x_1) \in \widehat{D}_1, \tag{2.10}$$

где $c_0, c_1, c_2, c_3 \in k$, имеем

$$T_0^{-1}\partial_1 T_0 = \partial_1 + c_3, \qquad T_0^{-1}\partial_2 T_0 = \partial_2 + c_1\partial_1 + c_1 c_3 + c_2.$$

Таким образом, любой 1-допустимый оператор может быть записан в виде $T = ST_0$.

Теорема 1 (см. [1; теорема 3.2]). *Существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных 1-квазиэллиптических пар Шура (A, W) с носителем $\mathrm{Supp}(W) = \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \mid i, j \geqslant 0\rangle$ и классами эквивалентных 1-квазиэллиптических колец коммутирующих операторов $B \subset \widehat{D}$.*

Доказательство теоремы конструктивно; пространства A и W получаются следующим образом: $A = S^{-1}BS$, $W = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]S$, где S – оператор со старшим коэффициентом 1 специального типа, удовлетворяющий условию (A_1). Он определяется по паре нормализованных операторов из B (см. [1; п. 2.3.4] или определение ниже) с помощью аналога теоремы Шура в размерности 1 (см. [1; лемма 2.11]).

Определение 15. Будем говорить, что коммутирующие операторы $P, Q \in \widehat{E}_+$ со старшим коэффициентом 1 и с порядками $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0,k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1,l)$ *почти нормализованы*, если

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=-\infty}^{k-1} p_s \partial_2^s, \qquad Q = \partial_1\partial_2^l + \sum_{s=-\infty}^{l-1} q_s \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \widehat{D}_1$.

Будем говорить, что P, Q *нормализованы*, если

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=-\infty}^{k-2} p_s \partial_2^s, \qquad Q = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=-\infty}^{l-1} q_s \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \widehat{D}_1$.

Напомним, что по [1; лемма 2.10] любые два коммутирующих оператора порядков $(0,k)$ и $(1,l)$ могут быть нормализованы с помощью сопряжения с обратимым оператором $S \in \widehat{D}_1$. Пространство A из теоремы 1 зависит лишь от выбора пары нормализованных операторов из B и не зависит от выбора оператора S из [1; лемма 2.11]. Если выбрать другую пару нормализованных операторов из B, то получающаяся пара Шура из теоремы 1 будет эквивалентна исходной. Следующая лемма проясняет структуру элементов в кольце, обладающем парой нормализованных операторов, а также в любом эквивалентном ему кольце.

Лемма 3. (i) *Если кольцо $B \subset \Pi \cap \widehat{D}$ коммутирующих операторов содержит пару нормализованных операторов P, Q порядков*

$$\operatorname{ord}_\Gamma(P) = (0,k), \quad \operatorname{ord}_\Gamma(Q) = (1,l), \qquad k > 0,$$

то у всех операторов в B старшие коэффициенты постоянны, т.е. если $L = \sum_{s=0}^N l_s \partial_2^s$, то l_N – оператор с постоянными коэффициентами. В частности, $l_N \in D_1$ (т.е. имеет конечный порядок).

Более того, любой оператор $P' \in B$ порядка $\operatorname{ord}_\Gamma(P') = (0,m)$ *имеет вид*

$$P' = \sum_{s=0}^{m} p'_s \partial_2^s, \qquad \text{где } p'_m \in k \text{ и } p'_{m-1} \text{ имеет постоянные коэффициенты,}$$

и любой оператор $Q' \in B$ порядка $\operatorname{ord}_\Gamma(Q') = (1,n)$ *имеет вид*

$$Q' = \sum_{s=0}^{n} q'_s \partial_2^s, \qquad \text{где } q'_n = c_1\partial_1 + c_0, \quad c_0, c_1 \in k.$$

(ii) *Если $B' = S^{-1}BS$, где $S \in \widehat{D}_1$, – эквивалентное* 1*-квазиэллиптическое кольцо, содержащее пару нормализованных операторов P', Q' порядков*

$$\operatorname{ord}_\Gamma(P') = (0,k'), \quad \operatorname{ord}_\Gamma(Q') = (1,l'), \qquad k' > 0,$$

то S имеет вид

$$S = c_0 \exp(c_1 x_2 \partial_1) \exp(c_2 x_2 + c_3 x_1) \in \widehat{D}_1,$$

где $c_0, c_1, c_2, c_3 \in k$ (ср. замечание 10).

Доказательство. (i) Имеем

$$0 = [P, P'] = k\partial_2(p'_m)\partial_2^{k+m-1} + k\partial_2(p'_{m-1})\partial_2^{k+m-2} + [p_{k-2}, p'_m]\partial_2^{k+m-2} + \text{члены младшей степени}. \tag{2.11}$$

Следовательно, $\partial_2(p'_m)=0$, т.е. p'_m не зависит от x_2. Тогда

$$0=[Q,P']=[\partial_1,p'_m]\partial_2^{m+l}+[\partial_1,p'_{m-1}]\partial_2^{l+m-1}+[q_{l-1},p'_m]\partial_2^{l+m-1} \\ +\text{члены младшей степени.} \tag{2.12}$$

Отсюда получаем $[\partial_1,p'_m]=0$ и, следовательно, p'_m должен быть оператором с постоянными коэффициентами. Таким образом, $p'_m\in D_1$ (и, очевидно, эти рассуждения работают для любого оператора из B). Так как $\mathrm{ord}_\Gamma(P')=(0,m)$, то p'_m – константа, и так как $\mathrm{ord}_\Gamma(Q')=(1,n)$, то q'_n должен быть многочленом первой степени. Но тогда из (2.12) получаем $[\partial_1,p'_{m-1}]=0$, т.е. p'_{m-1} не зависит от x_1, и из (2.11) получаем $\partial_2(p'_{m-1})=0$, т.е. p'_{m-1} должен быть оператором с постоянными коэффициентами.

(ii) Имеем $P'=S^{-1}\widetilde{P}S$, $Q'=S^{-1}\widetilde{Q}S$ для некоторых операторов $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}\in B$. Так как S обратим, мы, очевидно, имеем

$$S=c\in k^*\mod(x_1,x_2).$$

Следовательно, так как по п. (i) старшие члены операторов $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ – операторы с постоянными коэффициентами, должно быть $\mathrm{ord}_\Gamma(\widetilde{P})=(0,k')$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(\widetilde{Q})=(1,l')$. Из замечания 10 мы знаем, что существует оператор S_0 вида $\exp(cx_1)$ такой, что $S_0^{-1}\widetilde{q}_{l'}S_0=\partial_1$ (здесь $\widetilde{q}_{l'}$ – линейный многочлен с постоянными коэффициентами). Тогда, очевидно, оператор $S'=SS_0^{-1}$ не зависит от x_1. Таким образом, $S=S'S_0$.

Из замечания 9 мы знаем, что $\widetilde{P},\widetilde{Q}\in\Pi$, и из п. (i) мы знаем, что $\widetilde{p}_{k'}$, $\widetilde{p}_{k'-1}$ – операторы с постоянными коэффициентами (и $\widetilde{p}_{k'}=\partial_2^{k'}$). Таким образом, S' имеет вид

$$S'=\exp(F(x_2,\partial_1)),$$

где F – многочлен от x_2, ∂_1. Этот многочлен линеен, если и только если $\widetilde{p}_{k'-1}$ линеен. Но если он не линеен, то оператор $(S')^{-1}\widetilde{P}S'$ не будет удовлетворять условию (A_1) (так как $\widetilde{P}$ удовлетворяет (A_1) при некоторых (k,l)); противоречие. Значит, он линеен, что и требовалось доказать.

Замечание 11. Из леммы 3 непосредственно следует, что если B содержит пару нормализованных операторов, то любое эквивалентное ему кольцо B', содержащее пару нормализованных операторов, получается из B сопряжением на оператор специального вида, и это сопряжение эквивалентно линейной замене переменных

$$\partial_2\mapsto\partial_2+c\partial_1+b,\qquad\partial_1\mapsto\partial_1+d, \tag{2.13}$$

где $c,b,d\in k$. Пара Шура, соответствующая такому кольцу B', будет также эквивалентна паре, соответствующей B.

Обратно, если взять произвольную пару Шура (A,W) в данном классе эквивалентности, то соответствующее кольцо B строится как $B=SAS^{-1}$, где S теперь определяется из аналога теоремы Сато (см. теорему 2 ниже). Если (A',W') – эквивалентная пара Шура, то $A'=T^{-1}AT$, $W'=WT$ для некоторого 1-допустимого оператора T, который может быть записан в виде (см. замечание 10) $T=T'T_0$, где T_0 имеет вид, как в (2.10), и $T'=1+T^-$, где

$T^- \in \widehat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$. Теперь нетрудно видеть, что соответствующий пространству W' оператор Сато из теоремы 2 есть $S' = T_0^{-1}ST'T_0$. Тогда соответствующее кольцо $B' = S'A'(S')^{-1} = T_0^{-1}BT_0$, т.е. оно получается из B линейной заменой (2.13). Оно будет автоматически содержать пару нормализованных операторов.

Чтобы найти пару нормализованных операторов в данном кольце B, иногда нужно заменить B на эквивалентное кольцо (см. [1; лемма 2.10]).

Теорема 2 (см. [1; теорема 3.1]). *Пусть W – k-подпространство $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ с носителем $\mathrm{Supp}(W) = W_0$. Пусть $\{w_{i,j},\ i,j \geqslant 0\}$ – базис в W, однозначно определяемый свойством $w_{i,j} = z_1^{-i}z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, где $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$. Предположим, что все элементы $w_{i,j}$ удовлетворяют условию (A_1).*

Тогда существует единственный оператор $S = 1 + S^-$, удовлетворяющий условию (A_1), где $S^- \in \widehat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, такой, что $W_0S = W$.

Пары Шура из теоремы 1 взаимно однозначно соответствуют парам подпространств в пространстве $k[[u]]((t))$ посредством изоморфизма

$$\psi_1\colon k[z_1^{-1}]((z_2)) \cap \Pi \simeq k[[u]]((t)), \qquad z_2 \mapsto t, \quad z_1^{-1} \mapsto ut^{-1}, \tag{2.14}$$

где $k[z_1^{-1}]((z_2)) \cap \Pi$ обозначает k-подпространство, порожденное рядами, удовлетворяющими условию (A_1) (см. [1; следствие 3.3]). Мы будем обозначать эти пары теми же буквами (A, W). Очевидно, что $W \cdot A \subset W$.

Определение 16 (см. [1; определения 3.5, 3.6]). Для кольца $A \subset k[[u]]((t))$ определим числа

$$N_A = \text{НОД}\ \bigl\{\nu_t(a) : \nu(a) = (0, *),\ a \in A\bigr\},$$

где $*$ обозначает любое значение нормирования. Определим

$$\widetilde{N}_A = \text{НОД}\ \{\nu_t(a) :\ a \in A\}.$$

Будем говорить, что кольцо A *вполне допустимо*, если существует элемент $a \in A$ с $\nu(a) = (1, *)$ и $\widetilde{N}_A = N_A$.

Определение 17 (см. [1; определение 3.8]). Для 1-квазиэллиптического коммутативного кольца $B \subset \widehat{D}$ определим числа $\widetilde{N}_B$, N_B равными числам $\widetilde{N}_A$, N_A, где A – кольцо, соответствующее B, по теореме 1 (после применения изоморфизма (2.14)). Будем говорить, что B *вполне допустимо*, если A вполне допустимо.

Для вполне допустимого кольца B определим ранг B как

$$\mathrm{rk}(B) = N_B = \widetilde{N}_B.$$

Замечание 12. Если кольцо B в определении 17 – кольцо ДО, то числа $\widetilde{N}_B$, N_B и ранг можно определить так же, как в определении 16:

$$N_B = \text{НОД}\ \{\mathrm{ord}(Q) : \mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (0, *),\ Q \in B\}.$$

Определим

$$\widetilde{N}_B = \text{НОД}\ \{\mathbf{ord}(Q) : Q \in B\},$$

где **ord** обозначает обычный порядок в кольце D.

Аналогично, B вполне допустим, если существует элемент $Q \in B$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1,*)$ и $\widetilde{N}_B = N_B$. Его ранг $\mathrm{rk}(B) = N_B = \widetilde{N}_B$.

Особо отметим, что ранг кольца B, определенный как $N_B = \widetilde{N}_B$, меньше либо равен рангу пучка общих собственных функций операторов из B (ср. [2; замечание 2.3]; именно это определение ранга обычно используется в различных статьях). Это следует из [2; предложения 3.3, 3.2, теорема 2.1].

Мы будем пользоваться обозначением $\mathbf{rk}(B)$ для ранга во втором смысле.

Теорема 3 (см. [1; теорема 3.4]). *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентных* 1*-квазиэллиптических вполне допустимых конечно порожденных колец операторов в* $\widehat{D} \cap \Pi$ *ранга* r *и множеством классов изоморфных геометрических данных* $\mathscr{M}_r$ *ранга* r.

Если имеется кольцо $B \subset D$ коммутирующих ДО, удовлетворяющее свойству (2.8), то по [1; лемма 2.6, предложение 2.4] (ср. также с началом п. 3.1 в [1]) существует линейная замена переменных, делающая это кольцо 1-квазиэллиптическим вполне допустимым. Более того, как следует из доказательств этих утверждений, почти все линейные замены переменных сохраняют свойство кольца быть 1-квазиэллиптическим вполне допустимым. В частности, для почти всех линейных замен выполняется следующее дополнительное свойство операторов P, Q из определения 9:

$$\begin{aligned}
\sigma(P) &= \xi_2^k + \sum_{q=1}^{k} h_q \xi_1^q \xi_2^{k-q}, \qquad h_k \neq 0, \\
\sigma(Q) &= \xi_1 \xi_2^l + \sum_{q=2}^{l+1} c_q \xi_1^q \xi_2^{l+1-q}, \qquad c_{l+1} \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Замечание 13. Из конструкции в [1; § 3], объясняющей соответствие между геометрическими данными и 1-квазиэллиптическими вполне допустимыми кольцами, следует, что кольцо после такой линейной замены переменных соответствует данным с теми же поверхностью и дивизором, но, возможно, с другими пучком, точкой P и тривиализациями π, φ (ср. также с замечанием 4 и [2; теорема 2.1, предложение 3.3]).

Замечание 14. Если кольцо ДО B является 1-квазиэллиптическим вполне допустимым, то, очевидно, существуют два оператора P, Q, как в определении 9, с $k = l + 1 = \mathrm{ord}(P)$. В этой ситуации, повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.10, п. 1 в [1], можно увидеть, что существуют некоторые $\beta \in k$ и $f \in k[[x_1, x_2]]^*$ такие, что операторы $f^{-1}(P + \beta Q)f$, $f^{-1}Qf$ нормализованы (в смысле [1; определение 2.19]). Значит, в классе эквивалентности кольца B мы можем найти кольцо ДО с парой нормализованных операторов.

Как показывают рассуждения из замечания 11, всякая пара Шура, эквивалентная паре Шура, ассоциированной с B, соответствует кольцу B', получающемуся из B линейной заменой переменных (2.13). Таким образом, B' – тоже кольцо ДО.

Упомянем здесь еще одно замечательное свойство 1-квазиэллиптических подколец ДО, заключающееся в “чистоте” таких колец.

Предложение 2 (см. [1; предложение 3.1]). *Пусть* $B \subset D \subset \widehat{D}$ – 1-*квазиэллиптическое кольцо коммутирующих ДО. Тогда любое кольцо коммутирующих операторов* $B' \subset \widehat{D}$ *такое, что* $B' \supset B$, – *это кольцо ДО, т.е.* $B' \subset D$.

2.6. Пары Шура, риббоны и пространство модулей. Напомним, что в классической теории КП хорошо известны геометрические данные, классифицирующие коммутативные кольца обыкновенных дифференциальных операторов. Эти данные состоят из проективной кривой над полем k плюс линейное расслоение (или пучок без кручения, если кривая особа) плюс еще некоторые дополнительные данные (неособая точка p кривой плюс формальный локальный параметр в p и формальная тривиализация пучка в p). Так же определено отображение, ставящее в соответствие каждому такому набору пару подпространств (A, W) ("пару Шура") в пространстве $V = k((z))$, где $A \supsetneq k$ – k-подалгебра, стабилизирующая W в V: $A \cdot W \subset W$, а W – точка бесконечномерного грассманиана Сато (подробности см., например, в [31]). Это отображение обычно называется в литературе отображением Кричевера. В работах [32], [28] (см. также [33]) А. Н. Паршин определил аналог отображения Кричевера, который сопоставляет геометрическим данным (которые в этих работах включали в себя коэно-маколееву поверхность, обильный дивизор Картье, регулярную точку и векторное расслоение) пару подпространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ (с аналогичными свойствами) в двумерном локальном поле $k((u))((t))$, ассоциированном с флагом (поверхность, дивизор, точка). Он показал, что на таких данных это отображение инъективно. В работах [28], [33] была также дана некоторая комбинаторная конструкция. Эта конструкция позволяла вычислять группы когомологий векторных расслоений в терминах этих подпространств, а также позволяла восстановить геометрические данные по паре $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$. Разница между этим новым отображением Кричевера–Паршина и отображением Кричевера в том, что последнее отображение биективно.

Чтобы расширить отображение Кричевера–Паршина и сделать его биективным, мы ввели в работе [34] новые геометрические объекты под названием "формальные пунктированные ленты" (будем называть их для краткости "риббоны") и когерентные пучки без кручения на них, доопределили это отображение на множестве новых геометрических данных, включающих эти объекты, и показали, что существует биекция между множеством новых геометрических данных и множеством пар подпространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ (также называемых "обобщенными парами Шура"), удовлетворяющих некоторым комбинаторным условиям. Мы также показали, что по всяким геометрическим данным Паршина можно построить однозначно определенные геометрические данные с риббоном и что исходные данные Паршина восстанавливаются по новым данным с помощью упомянутой комбинаторной конструкции. В работе [2] мы расширили эту конструкцию на модифицированные данные Паршина из определения 2.

2.6.1. *Свойства отображения Кричевера в размерности* 1. Напомним сначала некоторые свойства классического отображения Кричевера для пучков без кручения ранга 1 (подробности см. в [35], [31]; мы будем пользоваться немного иными обозначениями, чем в этих статьях). В этом случае геометрические данные – это квинтет $(C, P, \mathscr{F}, u, \varphi)$, где C – проективная кривая, P – гладкая точка на кривой, $\mathscr{F}$ – пучок без кручения ранга 1, u – локальный параметр в точке P (в частности, задан изоморфизм $\pi\colon \widehat{\mathscr{O}}_{C,P} \simeq k[[u]]$) и $\varphi\colon \widehat{\mathscr{F}_P} \simeq k[[u]]$ – тривиализация. Очевидно, любые две такие тривиализации отличаются умножением на элемент $a \in k[[u]]^*$. Пара Шура $A, W \subset k((u))$ строится примерно так же, как в п. 2.1: A – образ группы $H^0(C \setminus P, \mathscr{O}_C)$ в пространстве $k((u))$ (который строится с помощью тривиализации π) и W – образ группы $H^0(C \setminus P, \mathscr{F})$ в пространстве $k((u))$ (который строится с помощью тривиализации φ). Если выбрать другую тривиализацию пучка $\mathscr{F}$, то новое пространство W будет отличаться от старого умножением на элемент $a \in k[[u]]^*$, а пространство A не изменится.

Имеются также следующие свойства в терминах пространств A, W:

$$\mathscr{F}(nP) \simeq \operatorname{Proj}(\widetilde{W}(n)), \tag{2.16}$$

где $\widetilde{W} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n s^n$, $W_n = W \cap u^n \cdot k[[u]]$;

$$H^0(C, \mathscr{F}) \simeq W \cap k[[u]], \qquad H^1(C, \mathscr{F}) \simeq \frac{k((u))}{W + k[[u]]}\,. \tag{2.17}$$

Напомним, что все пучки без кручения ранга 1 с фиксированной эйлеровой характеристикой представляют собой объединение орбит группы $\operatorname{Pic}^0(C)$. А именно (см. [26; § 6]), существуют максимальные пучки без кручения, т.е. пучки, не изоморфные прямым образам пучков без кручения на (частичной) нормализации кривой C и не максимальные. Если пучок максимален, то действие группы $\operatorname{Pic}^0(C)$ свободно на нем. Таким образом, любая орбита пучка без кручения ранга 1 – торсор над группой $\operatorname{Pic}^0(C')$, где C' – частичная нормализация C. У этого торсора определена топология, индуцированная топологией на $\operatorname{Pic}^0(C')$.

В дальнейшем нам понадобится следующий факт: если эйлерова характеристика пучка $\mathscr{F}$ на проективной кривой C равна $k \geqslant 0$, то существует плотное открытое подмножество V в орбите этого пучка такое, что для всякого $\mathscr{L} \in V$

$$\begin{aligned} H^1(C, \mathscr{L}) = 0, &\qquad h^0(C, \mathscr{L}) = k, \\ H^1(C, \mathscr{L}(-kP)) = 0, &\qquad H^0(C, \mathscr{L}(-kP)) = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

для некоторой точки $P \in C$. Этот факт можно доказать индукцией по k следующим образом. Для любого пучка без кручения $\mathscr{F}$ с эйлеровой характеристикой $k \geqslant 0$, любой фиксированной гладкой точки Q и $n \gg 0$ имеем $H^1(C, \mathscr{F}(nQ)) = 0$, $h^0(C, \mathscr{F}(nQ)) = k + n > 0$. Для любого фиксированного глобального сечения $a \in H^0(C, \mathscr{F}(nQ))$ существует плотное открытое подмножество $U \subset C$ такое, что для любой точки $P \in U$ образ при вложении a в $\mathscr{O}_{C,P}$ (при любом выборе тривиализации) обратим. Тогда из свойств (2.16) и (2.17) следует, что

$$h^0(C, \mathscr{F}(nQ - P)) = n + k - 1, \qquad H^1(C, \mathscr{F}(nQ - P)) = 0.$$

Тогда по индукции существует открытое подмножество $U' \subset C$ такое, что для любой точки $P \in U'$

$$\begin{gathered} H^0(C, \mathscr{F}(nQ - (n+k)P)) = 0, \qquad H^1(C, \mathscr{F}(nQ - (n+k)P)) = 0, \\ H^1(C, \mathscr{F}(n(Q - P))) = 0, \qquad h^0(C, \mathscr{F}(n(Q - P))) = k. \end{gathered}$$

Окончание доказательства теперь следует из [23; теорема 12.8] для морфизма $f\colon \operatorname{Pic}^0(C)\times C\to \operatorname{Pic}^0(C)$ и пучка Пуанкаре $\mathscr{P}$.

2.6.2. *Три свойства пары* $(\mathbb{A},\mathbb{W})$. Теперь мы напомним три свойства пары $(\mathbb{A},\mathbb{W})$. Сначала напомним (см., например, [34]), что k-подпространство W в $k((u))$ называется *фредгольмовым* подпространством, если

$$\dim_k W\cap k[[u]]<\infty,\qquad \dim_k \frac{k((u))}{W+k[[u]]}<\infty.$$

Для k-подпространства W в $k((u))((t))$ для $n\in\mathbb{Z}$ пусть

$$W(n)=\frac{W\cap t^n k((u))[[t]]}{W\cap t^{n+1}k((u))[[t]]}$$

– k-подпространство в $k((u))=\dfrac{t^n k((u))[[t]]}{t^{n+1}k((u))[[t]]}$.

2.6.3. *Первое свойство.* Оно заключается в следующем. Пусть пара $(\mathbb{A},\mathbb{W})$ является образом геометрических данных с риббоном, соответствующих некоторым геометрическим данным ранга 1 из определения 2 с когерентным пучком $\mathscr{F}$ ранга 1 (детали см. в [2; п. 3.5]). Напомним (см. определение (2.7), замечание 6), что для таких пучков без кручения ранга 1 мы определили отображение ζ (2.7). Тогда (см. доказательство теоремы 1 в [34])

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(nd)\simeq{}&\text{ образ квинтета } (C,P,\mathscr{O}_C(nC'),u,id) \text{ в } k((u))\\ &\text{при отображении Кричевера,}\end{aligned}\tag{2.19}$$

где $C'=dC$ – обильный дивизор Картье, как и выше (заметим, что $\mathscr{O}_C(nC')\simeq\zeta(\mathscr{O}_X(nC')))$, и

$$\begin{aligned}\mathbb{W}(nd+k)\simeq{}&\text{ образ квинтета } (C,P,\zeta(\mathscr{F}_k(nC')),u,\varphi)\\ &\text{при отображении Кричевера,}\end{aligned}\tag{2.20}$$

где $0\leqslant k<d$ и φ – некоторая тривиализация пучка $\zeta(\mathscr{F}_k(nC'))$ в точке P на C (заметим, что $\zeta(\mathscr{F}_k(nC'))\simeq(\mathscr{F}_k/\mathscr{F}_{k-1})(nC'))$. Из одномерной теории КП (см. (2.17)) имеем

$$\begin{aligned}&H^0(C,(\mathscr{F}_k/\mathscr{F}_{k-1})(nC'))\simeq\mathbb{W}(nd+k)\cap k[[u]],\\ &H^1(C,(\mathscr{F}_k/\mathscr{F}_{k-1})(nC'))\simeq k((u))/(\mathbb{W}(nd+k)+k[[u]]).\end{aligned}\tag{2.21}$$

2.6.4. *Второе свойство.* Оно заключается в следующем. Предположим, что пара $\mathbb{A},\mathbb{W}\in k((u))((t))$ происходит из геометрических данных ранга 1. Тогда

$$H^0(X,\mathscr{O}_X(nC'))\simeq\mathbb{A}\cdot t^{nd}\cap k[[u]]((t))\cap k((u))[[t]],\tag{2.22}$$

$$H^1(X,\mathscr{O}_X(nC'))\simeq\frac{\mathbb{A}\cdot t^{nd}\cap(k[[u]]((t))+k((u))[[t]])}{\mathbb{A}\cdot t^{nd}\cap k[[u]]((t))+\mathbb{A}\cdot t^{nd}\cap k((u))[[t]]},\tag{2.23}$$

$$H^2(X,\mathscr{O}_X(nC'))\simeq\frac{k((u))((t))}{\mathbb{A}\cdot t^{nd}+k[[u]]((t))+k((u))[[t]]}.\tag{2.24}$$

Для доказательства см. замечание 3 и лемму 1 в [20] (замечание 3 отсылает к доказательствам в статьях [33], [28], где C была дивизором Картье; в общем случае нетрудно усовершенствовать доказательства из этих статей; однако нам будет нужно это свойство лишь тогда, когда известно, что C – дивизор Картье). В частности, если C – дивизор Картье, то

$$\mathscr{O}_X(nC) \simeq \mathscr{O}_{X,n}, \qquad \zeta(\mathscr{O}_X(nC)) \simeq \mathscr{O}_C(nC) \tag{2.25}$$

для любого n (ср. замечание 6).

2.6.5. *Третье свойство.* Оно заключается в следующем.

$$\text{Если } A \text{ – кольцо Коэно–Маколея, то } A = \mathbb{A} \cap k[[u]]((t)), \tag{2.26}$$

где A, W – подпространства в $k[[u]]((t))$, строящиеся по геометрическим данным, как в п. 2.2. Это утверждение было доказано в [2; замечание 3.4]. Во введении к [2] было анонсировано (хотя и не очень точно) аналогичное свойство для пространства W:

$$W = \mathbb{W} \cap k[[u]]((t)).$$

Проясним его здесь.

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{F}$ – когерентный пучок без кручения ранга 1 на проективной поверхности X, определенной над несчетным алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что существует обильный неприводимый $\mathbb{Q}$-Картье дивизор $C \subset X$, не содержащийся в сингулярном локусе и такой, что $C^2 = 1$. Пусть $C' = dC$ – очень обильный дивизор Картье. Предположим, что выполняются следующие условия (см. замечание 5, определение (2.7)):*

$$\chi(X, \mathscr{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2},$$
$$H^0(C, \zeta(\mathscr{F}_k)(-(k+1)Q)) = H^1(C, \zeta(\mathscr{F}_k)(-(k+1)Q)) = 0$$

для гладкой точки $Q \in C$, $n \geqslant 0$, где $0 \leqslant k < d$.

Тогда:

(i) *существует точка $P \in C$, регулярная в C и в X, такая, что условия из п. 6) определения 2 выполняются для некоторой тривиализации $\widehat{\varphi}\colon \widehat{\mathscr{F}_P} \simeq k[[u,t]]$, т.е. гомоморфизмы*

$$H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \to k[[u,t]]/(u,t)^{nd+1}$$

являются изоморфизмами[4] *для всех $n \geqslant 0$;*

[4] Для читателя, предпочитающего альтернативное определение геометрических данных, этот пункт можно переформулировать так: существует морфизм $j\colon T \to X$ с $j(O) = P \in C \setminus (C^{\mathrm{sing}} \cup X^{\mathrm{sing}})$ и $j^{-1}(C) = T_1$ (т.е. $R = k[[u,t]] \simeq \widehat{\mathscr{O}}_{X,P}$, $R/tR \simeq \widehat{\mathscr{O}}_{C,P}$) такой, что для некоторого выбора порождающей $\mathscr{O}_{X,P}$-модуля $\mathscr{F}_P$ вложение $\mathscr{F} \hookrightarrow j_*\mathscr{O}_T$ (соответствующее изоморфизму $(j^*\mathscr{F})_O = R \otimes_{\mathscr{O}_{X,P}} \mathscr{F} \simeq \widehat{\mathscr{F}}_P$) удовлетворяет условию 3) определения 3, т.е. отображения $H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \to R \cdot t^{-nd}/\mathscr{M}^{nd+1} \cdot t^{-nd}$ суть изоморфизмы.

(ii) *для этой тривиализации*

$$W = \mathbb{W} \cap k[[u]]((t));$$

(iii) *для этой тривиализации*

$$H^1(X, \mathscr{F}) \simeq \frac{\mathbb{W} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])}{\mathbb{W} \cap k[[u]]((t)) + \mathbb{W} \cap k((u))[[t]]} = 0, \tag{2.27}$$

$$H^2(X, \mathscr{F}) \simeq \frac{k((u))((t))}{\mathbb{W} + k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]} = 0; \tag{2.28}$$

(iv) *пучок* $\mathscr{F}$ *коэно-маколеев на* X.

Доказательство. (i) Для любого пучка $\mathscr{F}_k$ и $m > 0$ имеются короткие точные последовательности

$$0 \to \zeta(\mathscr{F}_k) \to \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(mC')\big|_C \to \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} (\mathscr{O}_X(mC')\big|_C / \mathscr{O}_C) \to 0,$$

так как $\mathscr{O}_X(mC')\big|_C$ – обратимый пучок. Отсюда

$$H^1(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(mC')\big|_C) = 0$$

для всех $m \geqslant 0$. Так как $C^2 = 1$ (т.е. $\deg(\mathscr{O}_X(C')\big|_C) = d$), то по асимптотической теореме Римана–Роха имеем

$$\chi\bigl(\zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(mC')\big|_C\bigr) = h^0\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(mC')\big|_C\bigr) = md + k + 1. \tag{2.29}$$

Для каждого $m \geqslant 0$ по свойству (2.18) существует открытое подмножество U_m в C такое, что

$$\begin{aligned} &H^0\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(mC')\big|_C \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_C(-(md + k + 1)P)\bigr) \\ &\qquad = H^1\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(mC')\big|_C \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_C(-(md + k + 1)P)\bigr) = 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

для любой точки $P \in U_m$. Следовательно, так как основное поле несчетно, существует точка $P \in \bigcap_{m=0}^{\infty} U_m$, регулярная в C и в X, такая, что эти свойства выполняются для всех $m \geqslant 0$ и $0 \leqslant k < d$.

Так как для любого $n \geqslant 0$ по лемме 1 имеются вложения

$$\begin{aligned} W_{nd+k}/W_{nd+k-1} &\simeq H^0(X, \mathscr{F}_k(nC'))/H^0(X, \mathscr{F}_{k-1}(nC')) \\ &\hookrightarrow H^0\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(nC')\big|_C\bigr) \end{aligned}$$

и $\chi_1(H^0(X, \mathscr{F}(nC'))) \subset W_{nd}$ по определению, мы получаем, что для всех $n \gg 0$

$$\begin{aligned} h^0(X, \mathscr{F}(nC')) &= \chi(\mathscr{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2} \leqslant \dim_k(W_{nd}) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{n-1} h^0\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(mC')\big|_C\bigr) + h^0\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(nC')\big|_C\bigr). \end{aligned} \tag{2.31}$$

В силу (2.29) эти неравенства являются равенствами. Следовательно,

$$H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \simeq W_{nd}$$

для любого $n \gg 0$. Отсюда $\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}_0$ и

$$H^0(X, \mathscr{F}(nC')) \simeq W_{nd}, \qquad W_{nd+k}/W_{nd+k-1} \simeq H^0\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(nC')\big|_C\bigr) \tag{2.32}$$

для всех $n \geqslant 0$ по замечанию 6 и по лемме 1. Вместе с (2.30) это влечет, что условия из п. 6) определения 2 выполняются для некоторой тривиализации в точке P.

(ii) В силу (2.17) и (2.20) имеем

$$H^0\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(nC')\big|_C\bigr) \simeq \mathbb{W}(nd+k) \cap k[[u]].$$

Отсюда и из (2.32) следует, что $W = \mathbb{W} \cap k[[u]]((t))$.

(iii) Из предположения об эйлеровой характеристике пучка $\mathscr{F}$ и из (2.32) следует $h^1(X, \mathscr{F}) - h^2(X, \mathscr{F}) = 0$. Из (2.30) мы знаем, что

$$h^1\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(nC')\big|_C\bigr) = 0$$

для любого $0 \leqslant k < d$ и $n \geqslant 0$. Напомним, что имеются точные последовательности

$$0 \to \mathscr{F}_k \to \mathscr{F}_{k+1} \to \zeta(\mathscr{F}_{k+1}) \to 0$$

для любого $0 \leqslant k$. Тогда из длинной точной последовательности когомологий и из (2.32) получаем $H^1(X, \mathscr{F}_k) \simeq H^1(X, \mathscr{F}_{k+1})$ для любого $k \geqslant 0$. Значит, все эти группы равны нулю, так как $H^1(X, \mathscr{F}_{k+nd}) = H^1(X, \mathscr{F}_k(nC')) = 0$ для всех $n \gg 0$. Следовательно, $H^2(X, \mathscr{F}) = 0$. Из п. (ii) получаем

$$\mathbb{W} \cap \bigl(k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]\bigr) \subset \mathbb{W} \cap k[[u]]((t)) + \mathbb{W} \cap k((u))[[t]],$$

откуда

$$\frac{\mathbb{W} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])}{\mathbb{W} \cap k[[u]]((t)) + \mathbb{W} \cap k((u))[[t]]} = 0.$$

В силу (2.17) и (2.20) имеем

$$0 = H^1\bigl(C, \zeta(\mathscr{F}_k) \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_X(nC')\big|_C\bigr) \simeq \frac{k((u))}{\mathbb{W} + k[[u]]}$$

для всех $k \geqslant 0$. Следовательно,

$$\frac{k((u))((t))}{\mathbb{W} + k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]} = 0.$$

(iv) В силу [2; следствие 3.1] пучок $\mathscr{F}$ коэно-маколеев вдоль C. Те же рассуждения доказывают, что пучки $\mathscr{F}_k$ коэно-маколеевы вдоль C. Рассмотрим маколеевизацию $CM(\mathscr{F})$ пучка $\mathscr{F}$ (см. [2; приложение B]). Рассмотрим образ $W' = \chi_1\bigl(H^0(X \setminus C, CM(\mathscr{F}))\bigr)$ в $k[[u]]((t))$, где для определения χ_1 мы используем то же вложение φ пучка $\mathscr{F}$ (ср. п. 2.1). Заметим, что пучок

$CM(\mathscr{F})\big|_{mC'} = \mathscr{F}\big|_{mC'}$ имеет чистую размерность 1 для любого $m > 0$ (обозначения см. в замечании 6), так как $\mathscr{F}$ коэно-маколеев вдоль C. Тогда по лемме 1 имеем $H^0(X, CM(\mathscr{F})(nC')) \simeq W'_{nd}$ для всех $n \geqslant 0$.

Непосредственно из определения пучка Коэно–Маколея следует, что пучки $CM(\mathscr{F})_k$ коэно-маколеевы для всех k. Заметим, что $CM(\mathscr{F}_k) \simeq CM(\mathscr{F})_k$. Действительно, по определению маколеевизации имеем $CM(\mathscr{F}_k) \subset CM(\mathscr{F})_k$. Если $CM(\mathscr{F}_k) \not\simeq CM(\mathscr{F})_k$, то это значило бы, что

$$CM(\mathscr{F}_k)_{-k} \not\simeq (CM(\mathscr{F})_k)_{-k} \simeq CM(\mathscr{F}).$$

Но $CM(\mathscr{F}_k)_{-k} \simeq CM(\mathscr{F})$, так как $CM(\mathscr{F}_k)_{-k} \subset (CM(\mathscr{F})_k)_{-k} \simeq CM(\mathscr{F})$, и $CM(\mathscr{F}_k)_{-k}$ – коэно-маколеев пучок, содержащий $\mathscr{F}$ (ср. [2; замечание B.2]).

В частности, мы можем применить конструкцию из [2; п. 3.5] и построить пучок без кручения $\mathscr{N}$ на риббоне $(C, \mathscr{A})$ (который построен по нашим геометрическим данным). Далее, мы можем построить пространство $\mathbb{W}' \subset k((u))((t))$ по пучку $\mathscr{N}$. Так как конструкция зависит только от сечений пучков $CM(\mathscr{F}_k)$ вдоль кривой C, мы получаем $\mathbb{W}' = \mathbb{W}$. Отсюда по п. (ii) мы получаем $\mathscr{F} \simeq CM(\mathscr{F})$.

Замечание 15. Пучки без кручения ранга 1 на проективной поверхности X с фиксированным полиномом Гильберта χ из предложения 3 стабильны в смысле стандартного определения из [29; гл. 2]. Стабильные пучки параметризуются проективной схемой $\mathscr{M}_X(\chi)$ (см. [29; гл. 4]).

С другой стороны, все пучки, которые нас интересуют, удовлетворяют условиям из леммы 2 (и ввиду теорем 4 и 7 – даже более строгим условиям: они коэно-маколеевы на X). В силу [36; предложение 1.2.16] коэно-маколеевость – открытое условие. Таким образом, имеет смысл рассматривать открытую подсхему $\mathscr{M}_X^1$ пространства модулей $\mathscr{M}_X(\chi)$, параметризующую такие пучки. Тогда отображение ζ из п. 2.4 индуцирует морфизм

$$\zeta\colon \mathscr{M}_X^1 \to \mathscr{M}_C(g),$$

где $\mathscr{M}_C(g)$ – пространство модулей пучков без кручения ранга 1 степени $g = p_a(C)$ на C (ср. [37]). Мы предполагаем, что этот морфизм сюръективен (ср. примеры в конце статьи).

§ 3. Теоремы

3.1. Свойство коэно-маколеевости для колец ДО. Напомним, что по [2; теорема 2.1] всякому коммутативному кольцу ДО $B \subset D$, удовлетворяющему свойству (2.8), соответствуют данные $(X, C, \mathscr{L})$, где X, C те же, что и в определении 2, и $\mathscr{L}$ – когерентный пучок без кручения на X. Допустим (см. рассуждения перед замечанием 4), что B – 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо, удовлетворяющее дополнительному условию (2.15).

В этом случае в силу [2; предложение 3.3] тройка $(X, C, \mathscr{L})$ изоморфна тройке $(X, C, \mathscr{F})$ (части геометрических данных) из теоремы 3. Если B имеет ранг 1, то по [2; теорема 2.1] $C^2 = 1$ и по [2; предложение 3.2] пучок $\mathscr{F}$ и геометрические данные из теоремы 3 имеют ранг 1.

Теорема 4. *Пусть* $(X, C, P, \mathscr{F}, \pi, \varphi)$ – *геометрические данные, соответствующие* 1-*квазиэллиптическому вполне допустимому кольцу ДО* $B \subset D$, *удовлетворяющему свойствам* (2.8), (2.15).

Тогда $\mathscr{F}$ – *коэно-маколеев пучок на* X.

Замечание 16. Если кольцо B максимально, то по [1; теорема 4.1] поверхность X также коэно-маколеева.

Доказательство теоремы 4. В силу [2; предложение 3.2] пучок $\mathscr{F} \simeq \mathscr{L}$ когерентен. По [2; теорема 2.1, предложение 3.3] и замечанию 2 ранг геометрических данных равен 1.

Рассмотрим маколеевизацию $CM(\mathscr{F})$ пучка $\mathscr{F}$ (см. [2; приложение B]). В силу [2; следствие 3.1] пучок $\mathscr{F}$ коэно-маколеев вдоль C; в частности, $\mathscr{F}_P \simeq CM(\mathscr{F})_P$. Рассмотрим образ $W' = \chi_1(H^0(X \setminus C, CM(\mathscr{F})))$ в $k[[u]]((t))$, где для определения χ_1 мы используем вложение φ пучка $\mathscr{F}$ (ср. п. 2.1). Тогда мы утверждаем, что этот образ как линейное пространство порождается конечным числом элементов над пространством $W = \chi_1(H^0(X \setminus C, \mathscr{F}))$:

$$W' = \langle W, w_1, \dots, w_k \rangle,$$

где $w_1, \dots, w_k \notin W$, $w_1, \dots, w_k \in k[[u]]((t))$.

Чтобы доказать наше утверждение, прежде всего заметим, что пучок

$$CM(\mathscr{F})\big|_{mC'} = \mathscr{F}\big|_{mC'}$$

имеет чистую размерность 1 для любого $m > 0$ (обозначения см. в замечании 6), так как $\mathscr{F}$ коэно-маколеев вдоль C.

Покажем, что условие на пространство W' из леммы 1 выполнено. Это условие верно для элементов w из пространства W, соответствующего пучку $\mathscr{F}$, потому что $W_{nd} \simeq H^0(X, \mathscr{F}(nC'))$. Ясно, что для любого элемента w из W' мы имеем $w \in f^{-md}\mathscr{F}_P$ для некоторого m. Возьмем любой элемент $w \in W'_{nd}$. Тогда для всех достаточно больших $m > 0$

$$f^{-md}w - c_1 w_1 - \dots - c_k w_k = a \in W_{(n+m)d}$$

для некоторых $c_1, \dots, c_k \in k$. Итак,

$$f^{nd}w = f^{(n+m)d}a + f^{(n+m)d}(c_1 w_1 + \dots + c_k w_k) \in \mathscr{F}_P.$$

Теперь по лемме 1 имеем $H^0(X, CM(\mathscr{F})(nC')) \simeq W'_{nd}$ для всех $n \geqslant 0$.

Как следствие мы получаем, что для достаточно большого $n > 0$

$$W'_{nd}/W'_{(n-1)d} \simeq H^0\bigl(C, CM(\mathscr{F})(nC')\big|_{C'}\bigr) = H^0\bigl(C, \mathscr{F}(nC')\big|_{C'}\bigr) \simeq W_{nd}/W_{(n-1)d}.$$

Очевидно, $W'_{nd} \supset W_{nd}$ для всех n. Таким образом, наше утверждение доказано.

По [1; теоремы 3.3, 3.1] существует единственный оператор S, удовлетворяющий условию (A_1), такой, что $\psi_1^{-1}(W) = W_0 S$ (отображение ψ_1 определено в (2.14)), где $W_0 = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$. Более того, $B = S\psi_1^{-1}(A)S^{-1}$, где $A = \chi_1(H^0(X \setminus C, \mathscr{O}_X))$. Так как $W' \cdot A \subset W'$, имеем

$$(\psi_1^{-1}(W')S^{-1}) \cdot B \subset (\psi_1^{-1}(W')S^{-1}), \qquad \psi_1^{-1}(W')S^{-1} = \langle W_0, \widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_k \rangle,$$

где $\widetilde{w}_i = \psi_1^{-1}(w_i)S^{-1}$. Каждый ряд $\widetilde{w}_i$ может быть записан в виде

$$\widetilde{w}_i = w_i' + w_i'', \qquad w_i' = \sum_{k\geqslant 0,\, l>0,\, k+l=q_i} c_{kl} z_1^{-k} z_2^l, \quad w_i'' = \sum_{k\geqslant 0,\, l>0,\, k+l<q_i} b_{kl} z_1^{-k} z_2^l.$$

До конца доказательства теоремы будем называть числа q_i порядками элементов w_i': $\operatorname{ord}(w_i') = q_i$. Так как кольцо B удовлетворяет свойству (2.15), то для любого $n > 0$ символы операторов P^n, Q^n удовлетворяют тому же свойству (2.15) с числами k, l, замененными на kn, ln. Для всех $n \gg 0$ и для любого $\widetilde{w}_i$ должно выполняться

$$\widetilde{w}_i P^n \in (\psi_1^{-1}(W')S^{-1}), \qquad \widetilde{w}_i Q^n \in (\psi_1^{-1}(W')S^{-1}).$$

Прямые вычисления показывают, что эти элементы можно записать в виде

$$\widetilde{w}_i P^n = w_i'\sigma(P)^n + \text{члены меньшего порядка},$$
$$\widetilde{w}_i Q^n = w_i'\sigma(Q)^n + \text{члены меньшего порядка}.$$

Следовательно, поскольку $n \gg 0$, должно быть $w_i'\sigma(P)^n, w_i'\sigma(Q)^n \in W_0$. Значит, $w_i'\sigma(P)^n$ и $w_i'\sigma(Q)^n$ должны быть однородными многочленами степеней $q_i + nk$ и $q_i + n(l+1)$. Так как характеристические схемы операторов P и Q не пересекаются, это означает, что w_i' должен быть однородным многочленом степени q_i. Но тогда (в силу условия $w_i' \notin W_0$ и свойства (2.15)) многочлены $w_i'\sigma(P)^n, w_i'\sigma(Q)^n$ будут содержать ненулевой моном типа $cz_1^{-a}z_2^b \notin W_0$ с $b > 0$; противоречие. Значит, все $\widetilde{w}_i$ должны быть нулевыми и $W' = W$, откуда $CM(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$.

3.2. Геометрические свойства рациональных коммутативных алгебр ДО.

3.2.1. *Замыкание аффинной спектральной поверхности.* Как мы уже говорили во введении, существуют примеры алгебраически интегрируемых коммутативных колец ДО, чьи аффинные спектральные поверхности удовлетворяют следующему свойству: их нормализация есть $\mathbb{A}^2$. Следующая теорема дает ответ на вопрос о том, какова нормализация проективной спектральной поверхности X.

Теорема 5. *Пусть X – проективная поверхность, $C \subset X$ – целый дивизор Вейля, не содержащийся в сингулярном локусе X, являющийся также обильным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором, и $C^2 = 1$. Предположим, что $X \setminus C \simeq \mathbb{A}^2$.*

Тогда $X \simeq \mathbb{P}^2$, $C \simeq \mathbb{P}^1$.

Доказательство. Так как C не содержится в сингулярном локусе X, мы можем выбрать точку P, регулярную на C и на X. Выберем локальные параметры u, t в P такие, что t – локальное уравнение C в точке P и $u \in \mathscr{O}_P$, ограниченное на C, – локальное уравнение точки P в C.

Тогда имеется естественный изоморфизм

$$\pi\colon \widehat{\mathscr{O}}_P \to k[[u,t]].$$

Используя этот изоморфизм, мы можем повторить конструкцию подпространства A из п. 2.1 и определить $A \overset{\text{def}}{=} \chi_1(H^0(X \setminus C, \mathscr{O}))$.

Повторяя рассуждения из [1; лемма 3.6], мы получаем, что для всех $n \geqslant 0$

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(nC')) \simeq A_{nd},$$

где $A_l = A \cap t^{-l}k[[u,t]]$. Так как $C^2 = 1$, для всех $n \gg 0$ должно выполняться

$$\dim(A_{nd}/A_{(n-1)d}) = d^2 n + \mathrm{const}\,. \tag{3.1}$$

Рассмотрим произвольный элемент $a \in A_{nd}$ такой, что $\nu(a) = (*, nd)$. Мы утверждаем, что $* \leqslant nd$.

Действительно, в силу [2; п. 3.4] существует канонически определенный риббон $(C, \mathscr{A})$ над полем k. Тогда мы можем построить, как в [34; теорема 1], пространство $\mathbb{A}$ в $k((u))((t))$, являющееся обобщенным фредгольмовым подпространством (см. работу [34] или п. 2.6). Как следует из (2.19), пространство $\mathbb{A}(nd)$ естественно изоморфно фредгольмову подпространству в поле $k((u))$, равному образу пучка $\mathscr{O}_X(nC')\big|_C$ при отображении Кричевера. Для $n \gg 0$ имеем также изоморфизмы $H^0\bigl(C, \mathscr{O}_X(nC')\big|_C\bigr) \simeq A_{nd}/A_{nd-1}$, и в силу (2.17)

$$\dim(\mathbb{A}(nd) \cap k[[u]]) = h^0\bigl(C, \mathscr{O}_X(nC')\big|_C\bigr) = nd + \mathrm{const}\,. \tag{3.2}$$

Замечание 17. Если хочется избежать ссылок на теорию риббонов, можно просто повторить конструкцию обобщенного отображения Кричевера из работы [28] или из работы [33] в нашей ситуации (заменяя дивизор Картье в тех работах на $\mathbb{Q}$-Картье).

Так как $C^2 = 1$, мы получаем уравнение на эйлерову характеристику

$$\chi(\mathbb{A}(nd)) = nd + \mathrm{const}\,.$$

Теперь можно применить рассуждения из [30; теорема 1], чтобы показать, что $* \leqslant nd$. Предположим обратное. Имеем $a \cdot \mathbb{A}(0) \subset \mathbb{A}(nd)$. Легко видеть, что $\chi(a \cdot \mathbb{A}(0)) = \chi(\mathbb{A}(0)) + *$. Тогда получаем

$$\chi(\mathbb{A}(nd)) = nd + \mathrm{const} < * + \mathrm{const} = \chi(\mathbb{A}(0)) + * = \chi(a \cdot \mathbb{A}(0)) \leqslant \chi(\mathbb{A}(nd));$$

противоречие.

Заметим теперь, что так как $X \setminus C \simeq \mathbb{A}^2$, то $A \simeq k[p,q]$. Таким образом, пространство A порождено мономами $p^k q^l$. В силу утверждения и формул (3.1) и (3.2) мы получаем (без ограничения общности), что $\nu(p) = (0,1)$, $\nu(q) = (1,1)$ (так как при любых других значениях эти формулы не выполняются). Но тогда $A \simeq k[t^{-1}, ut^{-1}]$ и $X \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus A_n) = \mathbb{P}^2$, $C \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus A_n/A_{n-1}) = \mathbb{P}^1$ (ср. доказательство леммы 3.3 в [1]).

3.2.2. *Пример аффинной неспектральной поверхности.*

Пример 1. Используя идею из доказательства теоремы 5, можно построить пример аффинной поверхности, которая не может быть спектральной поверхностью какого-либо кольца ДО B ранга 1 со свойством (2.8). Например, рассмотрим кольцо

$$A = k[X_1, X_2, X_3]/(F), \tag{3.3}$$

где $F = X_1X_2 + X_3 + \sum_{q=1}^{r} g_q X_1^q$ и $g_i \in k[X_3]$ – произвольные многочлены, а k алгебраически замкнуто.

Тогда (см. [38; гл. VII, § 3, пример 5]) A – факториальное кольцо и $\operatorname{Spec}(A)$ – рациональная аффинная поверхность. Легко видеть, что A не изоморфно кольцу многочленов $k[u,v]$ для общих g_i и что $\operatorname{Spec}(A)$ гладка. Предположим, что существует кольцо $B \subset D$ ранга 1, удовлетворяющее свойству (2.8) и такое, что $B \simeq A$. Без ограничения общности можно предполагать, что B – 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо. Так как ранг кольца равен 1, ранг данных тоже равен 1 по классификационной теореме 3. Тогда пучок $\mathscr{F}$ когерентен и ранга 1 в силу [2; предложение 3.3]. По теореме 4 пучок $\mathscr{F}$ коэно-маколеев. Так как $\operatorname{Spec}(A)$ гладка, $\mathscr{F}$ должен быть локально свободным на $\operatorname{Spec}(A)$. Но так как A факториально, имеем $\operatorname{Cl}(A) \simeq \operatorname{Pic}(A) = 0$, поэтому $\mathscr{F}\big|_{\operatorname{Spec}(A)} \simeq \mathscr{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$. Но тогда пространство W соответствующей пары Шура должно быть равно пространству A. Следовательно, $A \simeq k[ut^{-1}, t^{-1}]$ (где u, t – параметры из (2.14)); противоречие.

3.2.3. *Преобразования Дарбу для колец ДО с рациональной спектральной поверхностью.*

Теорема 6. *Пусть $B \subset D$ – коммутативное кольцо ранга $\mathbf{rk}(B) = 1$ со свойством (2.8). Предположим, что нормализация $\operatorname{Spec}(B)$ изоморфна $\mathbb{A}^2$.*

Тогда существует дифференциальный оператор F такой, что $F^{-1}BF \subset k[\partial_1, \partial_2]$.

А именно, $F = S\partial_2^n$, где S – оператор, как в аналоге теоремы Сато – теореме 2.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предполагать, что B – конечно порожденное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо, удовлетворяющее свойству (2.15) (см. начало п. 2.5 и рассуждения перед замечанием 13), так как наше утверждение не зависит от линейных замен координат.

Так как ранг кольца B равен 1, ранг соответствующих геометрических данных $(X, C, P, \mathscr{F}, \pi, \varphi)$ также равен 1 по классификационной теореме 3. Тогда пучок $\mathscr{F}$ когерентен и ранга 1 в силу [2; предложение 3.3] и C – рациональная кривая с $C^2 = 1$ по [2; предложение 3.2].

Предположение о нормализации эквивалентно предположению, что нормализация $\operatorname{Spec}(B) \simeq X \setminus C$ изоморфна $\mathbb{A}^2$. Заметим, что это предположение эквивалентно предположению о том, что нормализация X изоморфна $\mathbb{P}^2$. Действительно, если $p\colon \mathbb{P}^2 \simeq \widetilde{X} \to X$ – морфизм нормализации, то $p^*(C)$ – рациональная неприводимая кривая. Таким образом, $p^*(C)$ – обильный рациональный дивизор Картье–Вейля на $\mathbb{P}^2$ с $p^*(C)^2 = 1$, т.е. $p^*(C) = \mathbb{P}^1$. Следовательно, нормализация схемы $\operatorname{Spec}(B)$ изоморфна дополнению к $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^2$, т.е. $\mathbb{A}^2$. Обратное утверждение следует из тех же рассуждений вместе с теоремой 5.

Пусть $(\widetilde{X} \simeq \mathbb{P}^2,\ p^*(C) \simeq \mathbb{P}^1,\ p^*(P) = \widetilde{P})$ – нормализация (X, C, P). Так как точка P регулярна, локальные кольца $\mathscr{O}_{X,P}$ и $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2,\widetilde{P}}$ канонически изоморфны.

Повторяя рассуждения из начала доказательства теоремы 5, мы можем построить вложение $H^0(\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^1, \mathscr{O})$ в то же пространство $k[[u]]((t))$ (здесь u, t – локальные параметры в точке $P \in X$). Обозначим это пространство через A'.

Как мы видели выше, A' должно быть нормализацией A. Рассуждения из доказательства теоремы 5 показывают, что $A' \simeq k[p,q]$, где старшие члены рядов p, q равны t^{-1}, ut^{-1} соответственно (таким образом, $\mathrm{Supp}(A') = k[ut^{-1}, t^{-1}]$).

Положим $A'' = \psi_1^{-1}(A')$ (см. (2.14)). Тогда $\mathrm{Supp}(A'') = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$ и A'' – 1-пространство. По [1; лемма 2.11, 2), 3)] существует оператор S такой, что $S^{-1}\partial_1 S = \psi_1^{-1}(q)$, $S^{-1}\partial_2 S = \psi_1^{-1}(p)$, и S удовлетворяет условию (A_1). Значит, $S \in \mathrm{Adm}_1$.

Теперь рассмотрим пару Шура $(\psi_1^{-1}(A), W)$ из теоремы 1, соответствующую кольцу B. Рассмотрим эквивалентную пару $(\mathscr{A} = SAS^{-1}, \mathscr{W} = WS^{-1})$. Тогда кольцо $SA''S^{-1} = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$ является нормализацией кольца $S\psi_1^{-1}(A)S^{-1}$ (в поле $k(z_1,z_2) \subset k((z_1))((z_2))$). Таким образом, все элементы пространства $S\psi_1^{-1}(A)S^{-1}$ – многочлены от переменных z_1^{-1}, z_2^{-1}.

Пространство WS^{-1} является конечно порожденным модулем над кольцом $S\psi_1^{-1}(A)S^{-1}$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $1 \in WS^{-1}$, рассмотрев в случае необходимости эквивалентную пару Шура $(\mathscr{A}, \mathscr{W}T)$ (для подходящего оператора T с постоянными коэффициентами; T просто меняет тривиализацию φ в определении 2, п. 6)). Из конструкции пары Шура, приведенной в п. 2.1, следует $\mathscr{W} \subset k(z_1,z_2)$ (так как эта пара Шура соответствует паре, происходящей из геометрических данных с подходящей тривиализацией φ, и ранг когерентного пучка $\mathscr{F}$ равен 1).

Таким образом, $\mathscr{W}$ порождено конечным числом элементов из $k(z_1,z_2)$ над $\mathscr{A}$. Так как $\mathscr{W}$ – 1-пространство, то мы можем выбрать порождающие, удовлетворяющие условию (A_1). Обозначим через Q их общий знаменатель. Из леммы 4 (см. ниже) следует, что $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (0,n)$, где $n = \mathbf{ord}(Q)$ (здесь и ниже мы отождествляем z_1 с ∂_1^{-1}, z_2 с ∂_2^{-1}; в этом случае $\mathbf{ord}(Q) = \deg(Q)$, где $\deg$ обозначает обычную степень многочлена Q от двух переменных). Рассмотрим эквивалентную пару Шура $(\mathscr{A}, \mathscr{W}Q/\partial_2^{\deg(Q)})$ (это пара Шура, поскольку $Q/\partial_2^{\deg(Q)}$ – оператор нулевого порядка с постоянными коэффициентами и с $\mathrm{ord}_\Gamma(Q/\partial_2^{\deg(Q)}) = (0,0)$, удовлетворяющий условию (A_1)). Заметим, что все элементы из пространства $\mathscr{W}Q/\partial_2^{\deg(Q)}$ являются просто многочленами от ∂_1, ∂_2, ∂_2^{-1} с постоянными коэффициентами, и порядок этих многочленов относительно ∂_2^{-1} меньше или равен $\deg(Q)$.

Тогда из доказательства теоремы 2 в работе [1] немедленно следует, что оператор S – (некоммутативный) многочлен от ∂_2^{-1} степени (относительно ∂_2^{-1}) не выше $\deg(Q)$. В силу замечания 14 кольцо $S\mathscr{A}S^{-1}$ – кольцо ДО. Тогда $S \in k[[x_1,x_2]][\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ (это немедленно следует из лемм 2.9, 2.11, пп. 2, 3, в работе [1]). Значит, можно положить $F = S\partial_2^{\deg(Q)}$.

Лемма 4. *Предположим, что разложение в ряд Лорана элемента*

$$P/Q \in k(\partial_1,\partial_2) \subset k((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1})),$$

где $P,Q \in k[\partial_1,\partial_2]$ *взаимно просты, лежит в* $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$. *Предположим, что этот ряд удовлетворяет условию* (A_1).

Тогда $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (0, \mathbf{ord}(Q))$.

Доказательство. Доказательство этой леммы основано на нескольких технических рутинных элементарных вычислениях, и мы будем интенсивно использовать в процессе доказательства некоторые технические леммы из работы [1].

Предположим обратное. Тогда Q может быть записан как многочлен от ∂_2 степени относительно ∂_2 меньше чем $\mathbf{ord}(Q)$, скажем,

$$Q = q_n\partial_2^n - \sum_{l=0}^{n-1} q_l\partial_2^l, \qquad n < \mathbf{ord}(Q),$$

где $q_l \in k[\partial_1]$. Пусть

$$P = \sum_{l=0}^{m} p_l\partial_2^l.$$

Теперь разобьем доказательство нашей леммы на несколько шагов.

Шаг 1. Во-первых, мы утверждаем, что $\deg(q_n) + n = \mathbf{ord}(Q)$.

Очевидно, всегда выполняется неравенство $\deg(q_n)+n \leqslant \mathbf{ord}(Q)$. Предположим, что $\deg(q_n) + n < \mathbf{ord}(Q)$. Покажем, что это противоречит условию (A_1) для элемента P/Q. Так как мы работаем с рядами в поле $k((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$ псевдодифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, мы можем дословно повторить доказательства леммы 2.8 и следствия 2.1 из работы [1], чтобы показать, что утверждения оттуда остаются справедливыми также для операторов из $k((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$.

В частности, Q^{-1} не удовлетворяет условию (A_1). Действительно, предположим, что Q^{-1} удовлетворяет условию (A_1). Тогда $Q^{-1} = q_n^{-1}\partial_2^{-1}Q'$, где Q' – оператор такого же вида, как в [1; следствие 2.1], удовлетворяющий условию (A_1) (по [1; лемма 2.8]). Тогда $Q = (Q^{-1})^{-1} = q_n\partial_2(Q')^{-1}$ должен удовлетворять условию (A_1) в силу [1; лемма 2.8, следствие 2.1]. Но Q не удовлетворяет условию (A_1) по нашему предположению (а именно, член с первым коэффициентом q_i оператора Q таким, что $\deg(q_i) + i = \mathbf{ord}(Q)$, будет противоречить условию (A_1)); противоречие.

Пусть $P = P_1 + P_2$ – произвольное разложение P в сумму двух ДО с постоянными коэффициентами такое, что P_1 удовлетворяет условию (A_1) и степень P_2 относительно ∂_2 меньше чем m (P_2 может быть нулевым). Пусть $Q^{-1} = Q_1 + Q_2$ – произвольное разложение Q^{-1} в сумму двух псевдодифференциальных операторов из $k((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$ такое, что Q_1 удовлетворяет условию (A_1) и степень Q_2 относительно ∂_2 меньше чем $-n$ (так как Q^{-1} не удовлетворяет условию (A_1), Q_2 не равен нулю). Обозначим через α первый коэффициент оператора Q_2 и через β – первый коэффициент оператора P_2, если $P_2 \neq 0$. Есть два случая: если $P_2 = 0$, то произведение PQ^{-1} не будет удовлетворять условию (A_1), потому что коэффициент оператора PQ^{-1}, содержащий $p_m\alpha$, не будет удовлетворять ему; если $P_2 \neq 0$, то произведение PQ^{-1} не будет удовлетворять условию (A_1), потому что коэффициент оператора PQ^{-1}, содержащий $\beta\alpha$, не будет удовлетворять ему. Значит, PQ^{-1} не удовлетворяет условию (A_1); противоречие.

Шаг 2. Теперь идея доказательства состоит в том, чтобы прийти к противоречию с предположением, что $q_n \neq \mathrm{const}$.

Очевидно, мы можем умножить элемент P/Q на подходящую степень ∂_2^{-1} так, чтобы сделать степень лорановского разложения произведения равной нулю. Таким образом, без ограничения общности можно предполагать, что P, Q – многочлены от ∂_2^{-1} с ненулевыми свободными членами p_m, q_n соответственно.

Теперь можно записать

$$P/Q = \left(\sum_{l=0}^{m} p_l \partial_2^{l-m}\right)\left(\sum_{l=0}^{n} q_l \partial_2^{l-n}\right)^{-1} = \left(\sum_{l=0}^{m} \frac{p_l}{q_n} \partial_2^{l-m}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{q_l}{q_n} \partial_2^{l-n}\right)^{i}\right). \tag{3.4}$$

Заметим, что не все q_i делятся на q_n. Действительно, в противном случае $(q_n^{-1}Q) \in k[\partial_1, \partial_2]$ и, следовательно,

$$q_n^{-1}P = (PQ^{-1})(q_n^{-1}Q) \in k[\partial_1]((\partial_2^{-1})) \cap k((\partial_1^{-1}))[\partial_2] = k[\partial_1, \partial_2],$$

т.е. P и Q делятся на $q_n \neq \mathrm{const}$; противоречие.

Заметим, что мы можем свести доказательство к случаю $\deg(P) \leqslant n-1$ (степень теперь означает степень относительно ∂_2^{-1}). Действительно, легко видеть, что p_m должен делиться на q_n. Так как $P/Q \in k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$, все выражения вида $(P/Q - a)\partial_2^k$ будут опять принадлежать $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ для любого многочлена $a \in k[\partial_1]$. Значит, если взять $a = p_m/q_n$, то $(P/Q - a)\partial_2 = P'/Q$, где $\deg(P') < \deg(P)$, если $m \geqslant n$. Заметим, что $P' \neq 0$, так как P, Q взаимно просты.

Аналогичным образом можно свести доказательство к случаю $\deg(P) = 0$. Действительно, используя алгоритм Евклида, мы всегда можем найти многочлены $a \in k[\partial_1]$ и $F \in k[\partial_1, \partial_2^{-1}]$ такие, что $\deg(aQ - FP) < \deg(P)$, если $\deg(P) \neq 0$. Опять $(aQ - FP) \neq 0$, так как P, Q взаимно просты и $\deg(P) \neq 0$. Значит, $F(P/Q) - a = P'/Q$ с $\deg(P') < \deg(P)$, $P' \neq 0$.

Наконец, в случае $\deg(P) = 0$ доказательство следует немедленно из (3.4): P должен делиться на бесконечную степень некоторого простого делителя многочлена q_n, т.е. $P = 0$; противоречие.

§ 4. Примеры

В этом параграфе мы строим несколько примеров.

4.1. "Тривиальные" коммутативные алгебры операторов. Сначала мы хотим объяснить геометрическую картину для класса "тривиальных" примеров. Это примеры колец коммутирующих операторов в $\widehat{D}$, содержащих, скажем, оператор ∂_1. В этом случае все операторы, очевидно, не зависят от x_1. Тем не менее геометрия соответствующих поверхностей и даже наивное пространство модулей пучков из геометрических данных нетривиальны.

Заметим, что если имеется коммутативное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо $B \subset D$, удовлетворяющее свойствам (2.8), (2.15) и содержащее оператор ∂_2, то после линейной замены $\partial_1 \leftrightarrow \partial_2$ кольцо B останется 1-квазиэллиптическим вполне допустимым и будет содержать оператор ∂_1. Таким образом, в частности, хорошо известный пример квантовой системы Калоджеро–Мозера (см. [9], [3; п. 5.3] и [1; пример 4.3]) принадлежит этому классу "тривиальных" примеров. Отметим, что в [3; п. 5.3] была вычислена аффинная спектральная поверхность этой системы: это $\mathbb{A}^1 \times H$, где H – некоторая гиперэллиптическая кривая. Таким образом, по [2; теорема 2.1] проективная спектральная поверхность X из соответствующих геометрических данных нормальна, и особенности появляются лишь на кривой C (которая рациональна).

Теорема 7. *Пусть $B \subset \widehat{D}$ – конечно порожденное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо Коэно–Маколея коммутирующих операторов (заметим, что в силу* [1; теорема 4.1] *всякое конечно порожденное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо B лежит в конечно порожденном 1-квазиэллиптическом вполне допустимом кольце Коэно–Маколея).*

Тогда B содержит ∂_1, если и только если дивизор C соответствующих геометрических данных – дивизор Картье, пучок $\mathscr{F}$ когерентен ранга 1, $\mathscr{O}_C(C) \simeq \mathscr{O}_C(P)$ и отображение

$$H^1(X, \mathscr{O}_X) \to H^1(X, \mathscr{O}_X(C))$$

инъективно.

Более того, если основное поле k несчетно и алгебраически замкнуто, то пучок $\mathscr{F}$ коэно-маколеев на X.

Доказательство. Напомним, что поверхность X, соответствующая B, коэно-маколеева в силу [2; теорема 3.2].

Допустим сначала, что B содержит ∂_1. Так как B 1-квазиэллиптично и вполне допустимо, это означает, что $\mathrm{rk}(B) = 1$. Также это означает, что для любого $n \gg 0$ существуют операторы $P_n \in B$ порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P_n) = (0, n)$. Следовательно, мы можем оценить размерность пространства $A_n \subset A$ (где, как обычно, A обозначает пространство пар Шура, соответствующее кольцу B): $\dim_k(A_n) \sim n^2/2$ для всех $n \gg 0$. Тогда из асимптотической формулы Римана–Роха (2.1) следует, что $C^2 = 1$ (так как $A_{nd} \simeq H^0(X, \mathscr{O}_X(ndC))$ для всех $n \gg 0$; см. п. 2.1). Так как $\mathrm{rk}(B) = 1$, ранг соответствующих геометрических данных также равен 1 по теореме 3. Значит, в силу [2; предложение 3.2] соответствующий пучок $\mathscr{F}$ когерентен и ранга 1.

Теперь докажем, что C – дивизор Картье. Наши рассуждения будут очень похожи на рассуждения из доказательств леммы 3.3 из [1] или теоремы 2.1 из [2]. Напомним, что $X \simeq \mathrm{Proj}\, \widetilde{A}$ и дивизор C определен однородным идеалом $I = (s)$. Он не содержится в сингулярном локусе, так как он содержит регулярную точку P. Так как $\widetilde{A}$ – конечно порожденная k-алгебра с $\widetilde{A}_0 = k$, то в силу [38; гл. III, § 1.3, предложение 3] существует целое $d \geqslant 1$ такое, что k-алгебра $\widetilde{A}^{(d)} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \widetilde{A}_{kd}$ конечно порождена элементами из $\widetilde{A}_1^{(d)}$ как k-алгебра (здесь $\widetilde{A}_1^{(d)} = \widetilde{A}_d$).

Покажем, что дивизор dC – эффективный дивизор Картье. Рассмотрим подсхему C' в X, определенную однородным идеалом $I^d = (s^d)$ кольца $\widetilde{A}$. Топологическое пространство подсхемы C' совпадает с топологическим пространством подсхемы C (как можно видеть, рассматривая аффинное покрытие X). Локальное кольцо $\mathscr{O}_{X,C}$ совпадает с кольцом нормирования дискретного нормирования на $\mathrm{Quot}(A)$, индуцированного дискретным нормированием ν_t в поле $k((u))((t))$:

$$\mathscr{O}_{X,C} = \widetilde{A}_{(I)} = \bigl\{as^n/bs^n \mid n \geqslant 0,\ a \in A_n,\ b \in A_n \setminus A_{n-1}\bigr\}.$$

Идеал I задает максимальный идеал в кольце $\mathscr{O}_{X,C}$, и идеал I^d задает d-ю степень максимального идеала. Следовательно, если мы докажем, что идеал I^d определяет эффективный дивизор Картье на X, то отображение циклов на этом дивизоре дает dC (см. [2; приложение A]). В силу [27; предложение 2.4.7] имеем $X = \operatorname{Proj}\widetilde{A} \simeq \operatorname{Proj}\widetilde{A}^{(d)}$. При этом изоморфизме подсхема C' определяется однородным идеалом $I^d \cap \widetilde{A}^{(d)}$ в кольце $\widetilde{A}^{(d)}$. Этот идеал порожден элементом $s^d \in \widetilde{A}_1^{(d)}$. Открытые аффинные подмножества $D_+(x_i) = \operatorname{Spec}\widetilde{A}_{(x_i)}^{(d)}$ с элементами $x_i \in \widetilde{A}_1^{(d)}$ определяют покрытие $\operatorname{Proj}\widetilde{A}^{(d)}$. В каждом кольце $\widetilde{A}_{(x_i)}^{(d)}$ идеал $(I^d \cap \widetilde{A}^{(d)})_{(x_i)}$ порожден элементом s^d/x_i. Следовательно, однородный идеал $I^d \cap \widetilde{A}^{(d)}$ определяет эффективный дивизор Картье.

Теперь покажем, что k-алгебра $\widetilde{A}^{(m)}$ конечно порождается элементами из $\widetilde{A}_1^{(m)}$ для всех $m \gg 0$. По теореме 1 это эквивалентно тому, что k-алгебра $\widetilde{B}^{(m)}$ конечно порождается элементами из $\widetilde{B}_1^{(m)}$ для всех $m \gg 0$.

Пусть d – такое число, что все порождающие кольца B лежат в B_d и для всех $n \geqslant d$ существуют элементы $P_n \in B$ порядков $\operatorname{ord}_\Gamma(P_n) = (0, n)$ (то же будет справедливо для кольца A). Пусть Σ обозначает множество всех чисел $a \in \mathbb{Z}_+$ таких, что существуют операторы Q в B_d порядков $\operatorname{ord}_\Gamma(Q) = (*, a)$. Так как $\partial_1 \in B$, то для любого $m > d$ и любого $a \in \Sigma$ существуют операторы Q в B порядков $\operatorname{ord}_\Gamma(Q) = (m, a)$.

Пусть теперь $m > 2d$ – любое число такое, что $\widetilde{B}^{(m)}$ конечно порождено элементами из $\widetilde{B}_1^{(m)}$. Достаточно показать, что $\widetilde{B}^{(m+1)}$ также конечно порождено элементами из $\widetilde{B}_1^{(m+1)}$. Чтобы показать это, достаточно доказать, что всякий элемент из $\widetilde{B}_k^{(m+1)}$ можно представить как сумму произведений элементов из $\widetilde{B}_{k-1}^{(m+1)}$ и из $\widetilde{B}_1^{(m+1)}$. В пространстве $\widetilde{B}_1^{(m+1)}$ есть два специальных оператора: $Q_1 = \partial_1^{m+1}$ и Q_2 порядка $\operatorname{ord}_\Gamma(Q_2) = (0, m+1)$. Из сказанного выше следует, что для любого $l \geqslant 2d$ и любых $i, j \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $i + j = l$, существует элемент $Q \in B$ порядка $\operatorname{ord}_\Gamma(Q) = (i, j)$. Значит, всякий элемент $Q \in \widetilde{B}_k^{(m+1)}$ можно записать как сумму элемента порядка меньше чем $\operatorname{ord}_\Gamma(Q)$ и произведения элемента из $\widetilde{B}_{k-1}^{(m+1)}$ и Q_1 или Q_2. По индукции мы получаем наше утверждение.

Теперь все вышеприведенные рассуждения для mC и $(m+1)C$ (вместо dC) показывают, что mC, $(m+1)C$ – дивизоры Картье. Но тогда C также должен быть дивизором Картье.

Теперь пусть $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ – пара из пространства $k((u))((t))$, соответствующая нашим геометрическим данным (см. п. 2.1). Из п. 2.1 (а именно, из (2.19), (2.21) и (2.26)) следует

$$\mathbb{A}(n) \cap k[[u]] \simeq A_n/A_{n-1} \simeq H^0(C, \mathscr{O}_C(nC))$$

для всех $n \gg 0$, где $\mathbb{A}(n)$ – образ квинтета $(C, P, \mathscr{O}_C(nC), u, id)$ при отображении Кричевера (ср. также (2.25)). Из одномерной теории КП (см. (2.16), (2.18)) получаем тогда, что $\mathbb{A}(n) \cdot u^{-n}$ – образ квинтета $(C, P, \mathscr{O}_C(nC)(-nP), u, id)$ при отображении Кричевера. Так как $\partial_1^n \in B_n \setminus B_{n-1}$, мы получаем, что $t^{-n}u^n \in A_n/A_{n-1}$. Следовательно,

$$H^0(C, \mathscr{O}_C(nC)(-nP)) \simeq \mathbb{A}(n) \cdot u^{-n} \cap k[[u]] \simeq k,$$

и по теореме Римана–Роха

$$h^1(C, \mathscr{O}_C(nC)(-nP)) = g_a(C).$$

Но тогда $\mathscr{O}_C(nC)(-nP) \simeq \mathscr{O}_C$ для всех $n \gg 0$, т.е. $\mathscr{O}_C(C) \simeq \mathscr{O}_C(P)$.

Теперь есть два возможных значения для числа $h^0(C, \mathscr{O}_C(C))$: это либо 1, либо 2. Если это 1, то, значит,

$$H^0(C, \mathscr{O}_C(C)) \simeq \mathbb{A}(1) \cap k[[u]] \simeq A_1/A_0, \tag{4.1}$$

поскольку $\partial_1 \in B_1 \setminus B_0$ и всегда имеется вложение $A_1/A_0 \subset \mathbb{A}(1)$. Заметим также, что всегда имеются вложения

$$\begin{gathered}\mathbb{A} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]) \overset{\cdot t}{\hookrightarrow} \mathbb{A} \cdot t \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]),\\ \mathbb{A} \cap k((u))[[t]] \overset{\cdot t}{\hookrightarrow} \mathbb{A} \cdot t \cap k((u))[[t]],\\ \mathbb{A} \cap k[[u]]((t)) \simeq \mathbb{A} \cdot t \cap k[[u]]((t)).\end{gathered}$$

Значит, имеется естественное линейное отображение

$$\frac{\mathbb{A} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])}{(\mathbb{A} \cap k((u))[[t]]) + (\mathbb{A} \cap k[[u]]((t)))} \to \frac{\mathbb{A} \cdot t \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])}{(\mathbb{A} \cdot t \cap k((u))[[t]]) + (\mathbb{A} \cdot t \cap k[[u]]((t)))}. \tag{4.2}$$

В силу (2.23) это отображение совпадает с отображением

$$H^1(X, \mathscr{O}_X) \to H^1(X, \mathscr{O}_X(C)).$$

Покажем, что ядро этого отображения может содержать только элементы из

$$(\mathbb{A}_1 \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])) + [(\mathbb{A} \cap k((u))[[t]]) + (\mathbb{A} \cap k[[u]]((t)))], \tag{4.3}$$

где $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A} \cap t^{-1} \cdot k((u))[[t]]$. Отсюда и из (4.1) следует, что отображение $H^1(X, \mathscr{O}_X) \to H^1(X, \mathscr{O}_X(C))$ инъективно.

Пусть $a \in \mathbb{A} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])$ – какой-то подъем элемента из ядра. Тогда $a \cdot t = a_1 + a_2$, где $a_1 \in (\mathbb{A} \cdot t \cap k((u))[[t]])$ и $a_2 \in (\mathbb{A} \cdot t \cap k[[u]]((t)))$. Так как $a_1 t^{-1} \in (\mathbb{A} \cap k((u))[[t]])$, имеем

$$a_2 t^{-1} = a - a_1 t^{-1} \in \mathbb{A} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]).$$

Но $a_2 t^{-1}$ принадлежит $\mathbb{A}_1$ и также задает элемент из ядра.

Теперь предположим, что $h^0(C, \mathscr{O}_C(C)) = 2$. Это означает, что образ пучка $\mathscr{O}_C$ в $k((u))$ при отображении Кричевера содержит элемент порядка -1. Следовательно, этот образ изоморфен кольцу $k[u^{-1}]$, т.е. $C \simeq \mathbb{P}^1$. Но тогда поверхность X должна быть гладкой вдоль C, поэтому X должна быть нормальной, поскольку X коэно-маколеева и C – обильный дивизор. Тогда в силу [39; теорема 2.5.19, следствие 2.5.20] существует открытая окрестность кривой C, изоморфная открытой окрестности прямой в $\mathbb{P}^2$. Так как $\zeta(\mathscr{F})$ – пучок без кручения и $h^0(C, \zeta(\mathscr{F}(nC))) = \dim W_n/W_{n-1} = n+1$ для всех $n \gg 0$, имеем $\zeta(\mathscr{F}) \simeq \mathscr{O}_C$. Так как $\mathscr{F}$ коэно-маколеев, он локально свободен на гладкой открытой окрестности кривой C. Поскольку $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2) = \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^2 \setminus Z) \simeq \mathbb{Z}$

для любой замкнутой подсхемы коразмерности больше 1, имеем $\mathscr{F} \simeq \mathscr{O}_X$ на этом открытом множестве (так как иначе его ограничение на $C = \mathbb{P}^1$ не было бы тривиально). Но тогда (например, в силу [39; предложение 1.1.6]) $W_n \simeq H^0(X, \mathscr{F}(nC)) \simeq H^0(X, \mathscr{O}_X(nC)) \simeq A_n$, так как X и $\mathscr{F}$ коэно-маколеевы. Следовательно, $A \simeq k[a,b]$ и $X = \mathbb{P}^2$. Поэтому $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$, что и требовалось доказать.

Наконец, по формулам (2.16) и (2.17) пучок $\mathscr{F}$ удовлетворяет предположениям предложения 3. Следовательно, он коэно-маколеев на X.

Обратно, предположим, что C – дивизор Картье, $\mathscr{F}$ – когерентный пучок ранга 1, отображение $H^1(X, \mathscr{O}_X) \to H^1(X, \mathscr{O}_X(C))$ инъективно, $\mathscr{O}_C(C) \simeq \mathscr{O}_C(P)$. Тогда из [2; замечание 3.3] следует, что ранг данных равен 1. Как мы видели выше, условие на когомологии означает, что ядро отображения (4.2) равно нулю. Это означает (см. (4.3)), что все элементы из $\mathbb{A}_1 \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])$ могут быть представлены в виде суммы элемента из $\mathbb{A}_1 \cap k[[u]]((t))$ и элемента из $\mathbb{A}_1 \cap k((u))[[t]]$. В частности, для любого элемента из $\mathbb{A}(1) \cap k[[u]]$ существует элемент из $\mathbb{A}_1 \cap k[[u]]((t))$ с тем же носителем (умноженным на t^{-1}). Это означает, что

$$H^0(C, \mathscr{O}_C(C)) \simeq H^0(C, \mathscr{O}_C(P)) \simeq \mathbb{A}(1) \cap k[[u]] \simeq A_1/A_0$$

(так как ранг данных равен 1). Заметим, что $\mathbb{A}(1)$ содержит элемент порядка 1 (так как $\mathbb{A}(1)$ – образ $\mathscr{O}_C(P)$ при отображении Кричевера). Значит, существует элемент в (A_1) с младшим членом ut^{-1}. Но этот элемент даст нам оператор ∂_1 после применения отображения ψ_1^{-1} и сопряжения на оператор Сато из теоремы 2.

4.2. Некоторые примеры.

Пример 2. Это пример поверхности, дивизора и точки, для которых мы можем вычислить все возможные геометрические данные ранга 1, соответствующие пары Шура и соответствующие алгебры коммутирующих операторов. Точнее, мы стартуем с кольца A и описываем все возможные пары Шура с кольцом A в качестве стабилизатора. Это описание возможно благодаря использованию явных формул из классической теории КП в размерности 1; эти формулы также дают явное описание коммутирующих операторов. Примечательно, что при этом мы увидим, что отображение ζ, ограниченное на множество всех пучков из этих геометрических данных, отображает это множество сюръективно на открытое плотное подмножество компактифицированного обобщенного якобиана кривой C, состоящее из пучков с тривиальными когомологиями. Мы увидим также, что для этой поверхности нет других колец, коммутирующих ДО, кроме одного кольца операторов с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим кольцо

$$A = k\langle \partial_2^2, \partial_2(\partial_2^2 + 3\partial_1^2), \partial_1 \rangle \subset k[\partial_1, \partial_2].$$

Легко видеть, что $A \simeq k[h][z,x]/(z^2 - x(x+3h^2)^2)$ (где $\partial_2(\partial_2^2+3\partial_1^2) \mapsto z$, $\partial_2^2 \mapsto x$, $\partial_1 \mapsto h$) и что $F = k[\partial_1, \partial_2]$, где F обозначает нормализацию A. Ясно также, что A – 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо.

Напомним, что, имея такое кольцо A, можно построить часть геометрических данных, а именно поверхность X, дивизор C и точку P (см. п. 2.1). Эту часть можно описать и более явным образом: имеем вложение

$$\widetilde{A} \simeq k\langle \partial_2^2, \partial_2(\partial_2^2 + 3\partial_1^2), \partial_1, T\rangle \subset \widetilde{F} \simeq k[\partial_2, \partial_1, T],$$

которое индуцирует морфизм нормализации $\pi\colon \mathrm{Proj}(\widetilde{F}) \to \mathrm{Proj}(\widetilde{A})$, и $X = \mathrm{Proj}(\widetilde{A})$ можно рассматривать как подсхему во взвешенном проективном пространстве $\mathrm{Proj}(k[x,z,h,T])$, где веса (x,z,h,T) есть $(2,3,1,1)$. Тогда $\partial_2 = z/(x+3h^2) = x(x+3h^2)/z$, откуда

$$\pi_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2} = \mathscr{O}_X + \mathscr{O}_X(-1)\partial_2,$$

$$\pi_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathscr{O}_X \simeq \mathscr{O}_X(-1)\partial_2/\mathscr{O}_X(-1)\partial_2 \cap \mathscr{O}_X \simeq \mathscr{O}_X(-1)/\mathscr{O}_X(-1) \cap \mathscr{O}_X \frac{1}{\partial_2},$$

$$\mathscr{O}_E = \mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X \cap \mathscr{O}_X(1)\frac{1}{\partial_2} \simeq \mathscr{O}_X/\mathscr{O}_X(-3)z + \mathscr{O}_X(-2)(x+3h^2),$$

где E – сингулярный локус в X (ср. пример 3.3 в работе [1]). Таким образом, $E = \mathrm{Proj}(k[h,T]) = \mathbb{P}^1$ и $\pi_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathscr{O}_X \simeq \mathscr{O}_E(-1)$, откуда $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$.

Заметим, что для заданных геометрических данных $(X, C, P, \mathscr{F}, \dots)$, где X, C, P определены по кольцу A и пучок $\mathscr{F}$ когерентен и ранга 1, соответствующая пара Шура (A, W) индуцирует одномерную пару Шура (A', W'), где

$$A' = \overline{k((\partial_1))}\langle \partial_2^2, \partial_2(\partial_2^2 + 3\partial_1^2)\rangle$$

и W' – пространство над $K = \overline{k((\partial_1))}$, порожденное элементами из W (таким образом, $A', W' \subset K((\partial_2^{-1})))$. Пара Шура (A', W') соответствует одномерному геометрическому квинтету $(C', P', \mathscr{F}', \dots)$ (см. [35; теорема 4.6] или [31], а также п. 2.6.1), где C' – рациональная кривая рода 1 с обыкновенной двойной точкой (т.е. нодальная кривая) над K и $\mathscr{F}'$ – пучок без кручения ранга 1 на C' с $H^0(C', \mathscr{F}') = H^1(C', \mathscr{F}') = 0$. Нетрудно видеть, что дивизор C на поверхности X также естественно изоморфен нодальной кривой, чье аффинное уравнение (уравнение кривой $C \setminus P$) есть $\widetilde{y}^2 = y(y+3)^2$.

С другой стороны, все пучки без кручения ранга 1 на этой нодальной кривой (ср. [37]), равно как и соответствующие пары Шура одномерных геометрических данных, могут быть описаны явно следующим образом (ср. [26; § 3]). Нодальную кривую C' можно представить как проективную прямую с двумя склеенными точками с локальными координатами a и $-a$ (локальная координата z на $\mathbb{P}^1 \setminus P'$). Нетрудно видеть, что в нашем случае

$$a = i\sqrt{3}\,\partial_1,$$

а для кривой C координата есть $i\sqrt{3}$. Теперь мы можем использовать хорошо известную формулу для функции Бейкера–Ахиезера, ассоциированной с линейным расслоением на кривой, чтобы описать соответствующие пространства пар Шура. Напомним, что функцию Бейкера–Ахиезера можно записать в виде $\psi(x,z)\exp(xz^{-1}) = S(x, \partial^{-1})(\exp(xz^{-1}))$ (где z – локальный параметр в точке на кривой).

Для единственного не локально свободного пучка $n_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})$ степени нуль (где $n\colon \mathbb{P}^1 \to C'$ – отображение нормализации) соответствующее пространство W'

есть $K[\partial_2]$. Это пространство задается пространством $W = k[\partial_1, \partial_2]$, и пара (A, W) очевидным образом соответствует кольцу A дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Единственный локально свободный пучок степени нуль, у которого когомологии ненулевые, – это $\mathscr{O}_{C'}$. Для локально свободного пучка $\mathscr{L}$, чей параметр (в пространстве модулей) есть $\lambda \in K^* \simeq \mathrm{Pic}(C')$, $\lambda \neq -1$ ($\lambda = -1$ соответствует пучку $\mathscr{O}_{C'}$), соответствующее пространство W' есть

$$K[\partial_2] \cdot S, \quad \text{где} \quad S = (1 + w\partial_2^{-1}), \quad w = -a\frac{\lambda \exp(x_2 a) - \exp(-x_2 a)}{\lambda \exp(x_2 a) + \exp(-x_2 a)}.$$

Теперь мы можем описать те одномерные пары Шура (A', W') (над полем K), которые индуцированы двумерными парами Шура (A, W) (над полем k). Легко видеть, что необходимые и достаточные условия для описания таких пар следующие: все элементы из допустимого базиса в W' должны принадлежать $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ и удовлетворять условию (A_1). Так как $A \subset A'$ и все элементы из A удовлетворяют условию (A_1), достаточно проверить это свойство только для первых двух элементов из допустимого базиса в W'. Эти элементы суть

$$w_0 = S\big|_{x=0}, \qquad w_1 = \partial_2 + \partial_2(w)\big|_{x=0}\partial_2^{-1} - \big(w\big|_{x=0}\big)^2\partial_2^{-1}.$$

Значит, должны выполняться равенства

$$-a\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = P(\partial_1), \qquad -a^2\frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} = Q(\partial_1),$$

где P, Q – многочлены от ∂_1 с коэффициентами в k и степени не выше чем 1 и 2 соответственно. Следовательно, из первого уравнения получаем

$$\lambda = \frac{a - P}{a + P} \in k(\partial_1),$$

а второе уравнение выполняется для любого такого λ и для любого такого P. Те же формулы показывают (в силу теоремы 7), что для всех $-1 \neq \lambda \in k^*$ пучок $\zeta(\mathscr{F})$ (который определяется по пространству $\bigoplus W_{i+1}/W_i$) является линейным расслоением на C, соответствующим λ. Очевидно, $\zeta(\pi_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2})) \simeq n_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})$. Итак, отображение ζ, упоминавшееся в начале этого примера, действительно сюръективно.

С другой стороны, для любого такого λ можно вычислить операторы из соответствующего кольца операторов. В частности, в нем будет содержаться оператор вида

$$S^{-1}\partial_2^2 S = \partial_2^2 + 2\partial_2(w) = \partial_2^2 - \frac{8a^2\lambda}{(\lambda \exp(x_2 a) + \exp(-x_2 a))^2}.$$

Последнее слагаемое этого оператора не может быть многочленом от ∂_1, потому что экспоненциальная функция не может принадлежать алгебраическому расширению поля рациональных функций. Таким образом, по замечанию 14 не существует колец ДО с проективной спектральной поверхностью X, кроме кольца A операторов с постоянными коэффициентами.

Пример 3. Это другой пример поверхности, дивизора и точки, для которых мы можем вычислить все возможные геометрические данные ранга 1, соответствующие пары Шура и соответствующие алгебры коммутирующих операторов. Отображение ζ опять будет сюръективно. Но, в отличие от предыдущего примера, для этой поверхности есть много коммутативных колец ДО.

Рассмотрим кольцо

$$A = k\langle \partial_2^2, \partial_2^3, \partial_1 \rangle \subset k[\partial_1, \partial_2].$$

Легко видеть, что $A \simeq k[h][z,x]/(z^2 - x^3)$ (где $\partial_2^3 \mapsto z$, $\partial_2^2 \mapsto x$, $\partial_1 \mapsto h$) и что $F = k[\partial_1, \partial_2]$, где F обозначает нормализацию A. Также ясно, что A – 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо.

Используя похожие рассуждения из предыдущего примера, можно показать, что X получается из $\mathbb{P}^2$ склейкой двух совпадающих прямых (или прямой кратности 2; ср. [2; п. 3.6]). Значит, опять $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$. Снова, как и в предыдущем примере, X – конус над C, который на этот раз является каспидальной рациональной кривой рода 1. Тем самым, мы можем использовать в этом случае те же идеи и обозначения.

Всякая пара Шура (A, W) индуцирует одномерную пару Шура (A', W') над K, где

$$A' = \overline{k((\partial_1))}\langle \partial_2^2, \partial_2^3 \rangle.$$

Для единственного не локально свободного пучка $n_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})$ степени нуль соответствующее пространство W' есть $K[\partial_2]$. Это пространство происходит из пространства $W = k[\partial_1, \partial_2]$, и пара (A, W) очевидным образом соответствует кольцу A дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Единственный локально свободный пучок степени нуль с ненулевыми когомологиями – это $\mathscr{O}_{C'}$. Для локально свободного пучка $\mathscr{L}$, чей параметр есть $\lambda \in K \simeq \mathrm{Pic}(C')$, $\lambda \neq 0$ ($\lambda = 0$ соответствует $\mathscr{O}_{C'}$), соответствующее пространство W' есть

$$K[\partial_2] \cdot S, \qquad \text{где} \quad S = (1 + w\partial_2^{-1}), \quad w = \frac{1}{\lambda - x_2}\,.$$

Теперь

$$w_0 = S\big|_{x=0} = 1 + \frac{1}{\lambda}\partial_2^{-1}.$$

Чтобы найти те пары (A', W'), которые индуцируются парами (A, W), мы опять приходим к условию $1/\lambda = P(\partial_1)$ для некоторого линейного многочлена P. Нетрудно видеть, что для всех таких λ пространства W' индуцированы W и что отображение ζ сюръективно.

Кольца коммутирующих операторов будут содержать два оператора: ∂_1 и

$$S^{-1}\partial_2^2 S = \partial_2^2 + \frac{2P(\partial_1)^2}{(1 - x_2 P(\partial_1))^2}\,.$$

По замечанию 14 и по предложению 2 такое кольцо является кольцом ДО, если и только если $P(\partial_1)$ равно константе. Очевидно, что пучки, соответствующие таким кольцам, являются прообразами пучка $n_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})$.

Список литературы

[1] А. Б. Жеглов, “О кольцах коммутирующих дифференциальных операторов”, *Алгебра и анализ*, **25**:5 (2013), 86–145; англ. пер.: A. B. Zheglov, “On rings of commuting partial differential operators”, *St. Petersburg Math. J.*, **25**:5 (2014), 775–814.

[2] H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, “Commuting differential operators and higher-dimensional algebraic varieties”, *Selecta Math.* (*N.S.*), **20**:4 (2014), 1159–1195.

[3] A. Braverman, P. Etingof, D. Gaitsgory, “Quantum integrable systems and differential Galois theory”, *Transform. Groups*, **2**:1 (1997), 31–56.

[4] И. М. Кричевер, “Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 20–31; англ. пер.: I. M. Krichever, “Commutative rings of ordinary linear differential operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:3 (1978), 175–185.

[5] И. М. Кричевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *УМН*, **32**:6(198) (1977), 183–208; англ. пер.: I. M. Krichever, “Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **32**:6 (1977), 185–213.

[6] O. A. Chalykh, A. P. Veselov, “Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras”, *Comm. Math. Phys.*, **126**:3 (1990), 597–611.

[7] O. A. Chalykh, A. P. Veselov, “Integrability in the theory of the Schrödinger operator and harmonic analysis”, *Comm. Math. Phys.*, **152**:1 (1993), 29–40.

[8] А. П. Веселов, К. Л. Стыркас, О. А. Чалых, “Алгебраическая интегрируемость для уравнения Шрёдингера и группы, порожденные отражениями”, *ТМФ*, **94**:2 (1993), 253–275; англ. пер.: A. P. Veselov, K. L. Styrkas, O. A. Chalykh, “Algebraic integrability for the Schrödinger equation and finite reflection groups”, *Theoret. and Math. Phys.*, **94**:2 (1993), 182–197.

[9] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, “Quantum integrable systems related to Lie algebras”, *Phys. Rep.*, **94**:6 (1983), 313–404.

[10] M. Feigin, A. P. Veselov, “Quasi-invariants of Coxeter groups and m-harmonic polynomials”, *Int. Math. Res. Not.*, **2002**:10 (2002), 521–545.

[11] M. Feigin, A. P. Veselov, “Quasi-invariants and quantum integrals of the deformed Calogero–Moser systems”, *Int. Math. Res. Not.*, **2003**:46 (2003), 2487–2511.

[12] P. Etingof, V. A. Ginzburg, “On m-quasi-invariants of a Coxeter group”, *Mosc. Math. J.*, **2**:3 (2002), 555–566.

[13] O. Chalykh, “Algebro-geometric Schrödinger operators in many dimensions”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **366**:1867 (2008), 947–971.

[14] Yu. Berest, P. Etingof, V. Ginzburg, “Cherednik algebras and differential operators on quasi-invariants”, *Duke Math. J.*, **118**:2 (2003), 279–337.

[15] Yu. Berest, A. Kasman, “$\mathscr{D}$-modules and Darboux transformations”, *Lett. Math. Phys.*, **43**:3 (1998), 279–294.

[16] A. Nakayashiki, “Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties”, *Amer. J. Math.*, **116**:1 (1994), 65–100.

[17] А. Е. Миронов, “Коммутативные кольца дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям”, *Сиб. матем. журн.*, **43**:5 (2002), 1102–1114; англ. пер.: A. E. Mironov, “Commutative rings of differential operators corresponding to multidimensional algebraic varieties”, *Siberian Math. J.*, **43**:5 (2002), 888–898.

[18] А. Н. Паршин, “О кольце формальных псевдодифференциальных операторов”, *Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина,

Тр. МИАН, **224**, Наука, М., 1999, 291–305; англ. пер.: A. N. Parshin, “On a ring of formal pseudodifferential operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **224** (1999), 266–280.

[19] A. B. Zheglov, *Two dimensional KP systems and their solvability*, 2005, 43 pp., arXiv: math-ph/0503067.

[20] H. Kurke, D. V. Osipov, A. B. Zheglov, “Formal groups arising from formal punctured ribbons”, *Internat. J. Math.*, **21**:6 (2010), 755–797.

[21] J. A. Morrow, “Minimal normal compactifications of $\mathbb{C}^2$”, Complex analysis, 1972 (Proc. Conf., Rice Univ., Houston, Tex., 1972), Vol. I: Geometry of singularities, *Rice Univ. Studies*, **59**:1 (1973), 97–112.

[22] H. Kojima, T. Takahashi, “Notes on minimal compactifications of the affine plane”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **188**:1 (2009), 153–169.

[23] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heilderberg, 1977, xvi+496 pp.

[24] У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989, 583 с.; пер. с англ.: W. Fulton, *Intersection theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984, xi+470 pp.

[25] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry*, v. I: *Classical setting*: *line bundles and linear series*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **48**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xviii+387 pp.

[26] G. Segal, G. Wilson, “Loop groups and equations of KdV type”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **61**:1 (1985), 5–65.

[27] A. Grothendieck, J. A. Dieudonné, “Éléments de géométrie algébrique. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1961, № 8, 5–222.

[28] A. N. Parshin, “Integrable systems and local fields”, *Comm. Algebra*, **29**:9 (2001), 4157–4181.

[29] D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, 2nd ed., Cambridge Math. Lib., Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2010, xviii+325 pp.

[30] А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов, “О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера”, *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 528–539; англ. пер.: A. B. Zheglov, D. V. Osipov, “On some questions related to the Krichever correspondence”, *Math. Notes*, **81**:4 (2007), 467–476.

[31] M. Mulase, “Algebraic theory of the KP equations”, *Perspectives in mathematical physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys., **III**, Int. Press, Cambridge, MA, 1994, 151–217.

[32] А. Н. Паршин, “Соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:1 (2001), 88–90; англ. пер.: A. N. Parshin, “The Krichever correspondence for algebraic surfaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:1 (2001), 74–76.

[33] Д. В. Осипов, “Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 91–128; англ. пер.: D. V. Osipov, “The Krichever correspondence for algebraic varieties”, *Izv. Math.*, **65**:5 (2001), 941–975.

[34] H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, “Formal punctured ribbons and two-dimensional local fields”, *J. Reine Angew. Math.*, **2009**:629 (2009), 133–170.

[35] M. Mulase, “Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional Grassmanians”, *Internat. J. Math.*, **1**:3 (1990), 293–342.

[36] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, 2nd rev. ed., Cambridge Stud. Adv. Math., **39**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, xii+453 pp.

[37] C. J. Rego, “The compactified Jacobian”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **13**:2 (1980), 211–223.

[38] Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра*, Мир, М., 1971, 707 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre commutative*, Fasc. 27, 28, 30, 31, Actualites Sci. Indust., **1290, 1293, 1308, 1314**, Hermann, Paris, 1961–1965, 187 pp., 183 pp., 207 pp., iii+146 pp.

[39] L. Bădescu, *Projective geometry and formal geometry*, IMPAN Monogr. Mat. (N. S.), **65**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004, xiv+209 pp.

Александр Борисович Жеглов
(Alexandr B. Zheglov)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: azheglov@math.msu.su; abzv24@mail.ru

Поступила в редакцию
06.10.2014 и 01.02.2015

Херберт Курке
(H. Kurke)
Humboldt University of Berlin, Germany
E-mail: kurke@math.hu-berlin.de