



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, Продолжение функций с сохранением дифференциально-разностных свойств в  $L_p$ , Докл. АН СССР, 1963, том 150, номер 5, 963–966

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

8 февраля 2025 г., 21:32:06



О. В. БЕСОВ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С СОХРАНЕНИЕМ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СВОЙСТВ В  $L_p$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 I 1963)

Пусть  $[a, b] \subset (a_1, b_1)$ ,  $f(x) \in L_p(a, b)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\omega_k(f, h)$  — модуль гладкости функции  $f(x)$  с шагом  $h$  в метрике  $L_p$ . В настоящей заметке устанавливается возможность продолжения функции  $f(x)$  на отрезок  $[a_1, b_1]$  функцией  $\varphi(x)$ , для которой  $\omega_k(\varphi, h) \leq C\omega_k(f, h)$ , причем  $C$  не зависит от функции  $f$ . Этот результат справедлив и для функций многих переменных, а также в случае, когда вместо модулей гладкости функций берутся модули гладкости их производных.

Для  $k = 1$  этот результат был получен В. К. Дзядыком <sup>(1)</sup>. Для  $k = 2$  были известны лишь отдельные частные случаи. Вопрос был решен для функций, удовлетворяющих условию  $\omega_2(f, h) \leq Mhr$ , с сохранением этого свойства (при  $p = \infty$ ,  $r = 1$  А. Ф. Тиманом и В. К. Дзядыком <sup>(2)</sup>; при  $p = 1$ ,  $r = 1$  В. К. Дзядыком <sup>(1)</sup>; при  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $0 < r < 2$  О. В. Бесовым <sup>(3)</sup>), а также для функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{0_+^2} h^{-1-r\theta} \omega_2^\theta(f, h) dh < \infty$$

(при  $1 \leq p = \theta < \infty$  В. П. Ильиным и В. А. Солонниковым <sup>(4)</sup>; при  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq \theta < \infty$  независимо О. В. Бесовым <sup>(3)</sup>). В заметке К. К. Головкина и В. А. Солонникова <sup>(7)</sup> приведена теорема о продолжении функций с сохранением более общих условий, связанных с понятием функционального типа максимизации. Для произвольных модулей гладкости второго порядка при  $p = \infty$  оценка  $\omega_2(\varphi, h) \leq 5\omega_2(f, h)$  была получена В. К. Дзядыком <sup>(8)</sup> и Т. Фреем <sup>(9)</sup>.

Метод рассмотрения уточняет способ, предложенный в <sup>(3)</sup>, он близок к методу В. П. Ильина <sup>(4)</sup> интегрального представления функций.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $f(x) \in L_q(0, a)$  имеет обобщенную (в смысле Соболева) производную  $f^{(k)}(x)$ ,

$$\omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p(0, a)} = \sup_{0 < t \leq h} \left\| \sum_{v=0}^m (-1)^{m-v} \binom{m}{v} f^{(k)}(x + vt) \right\|_{L_p(0, a-mt)},$$

$$1 \leq q \leq \infty, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a \leq \infty.$$

Тогда существует функция  $\varphi(x) \in L_q(-a, a)$ , совпадающая с функцией  $f(x)$  на  $[0, a]$  и такая, что

$$\|\varphi\|_{L_q(-a, a)} \leq C \|f\|_{L_q(0, a)}, \tag{1}$$

$$\omega_m(\varphi^{(k)}, h)_{L_p(-a, a)} \leq C \omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p(0, a)}, \tag{2}$$

где постоянная  $C$  не зависит от функции  $f$ .

Для доказательства рассмотрим функцию  $F(x, y)$ , являющуюся  $m$ -й средней Стеклова для функции  $f(x)$ :

$$F(x, y) = y^{-m} \int_0^y \dots \int_0^y f(x + t_1 + \dots + t_m) dt_1 \dots dt_m. \tag{3}$$

Заметим, что

$$F_x^{(m+k)}(x, y) = y^{-m} \Delta^m [f^{(k)}(x), y], \quad (4)$$

$$\Delta_x^m [\Phi_x^{(k)}(x, y), h] = \int_0^h \dots \int_0^h \Phi^{(m+k)}(x + t_1 + \dots + t_m, y) dt_1 \dots dt_m, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_y^m [F_x^{(k)}(x, 0), y] &= \sum_{v=0}^m (-1)^{m-v} \binom{m}{v} F_x^{(k)}(x, vy) = \\ &= (-1)^m F_x^{(k)}(x, 0) + \\ &+ \sum_{v=1}^m (-1)^{m-v} \binom{m}{v} (vy)^{-m} \int_0^{vy} \dots \int_0^{vy} f^{(k)}(x + t_1 + \dots + t_m) dt_1 \dots dt_m = \\ &= \sum_{v=0}^m (-1)^{m-v} \binom{m}{v} y^{-m} \int_0^y \dots \int_0^y f^{(k)}(x + v(\xi_1 + \dots + \xi_m)) d\xi_1 \dots d\xi_m, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta_y^m [F_x^{(k)}(x, 0), y] = y^{-m} \int_0^y \dots \int_0^y \Delta^m [f^{(k)}(x), \xi_1 + \dots + \xi_m] d\xi_1 \dots d\xi_m. \quad (6)$$

Из равенства

$$\Delta_y^m \Delta_x^m \Phi_x^{(k)}(x, 0) = \Delta_x^m \Delta_y^m \Phi_x^{(k)}(x, 0)$$

получаем, что

$$\Delta_x^m [\Phi_x^{(k)}(x, 0), y] = \sum_{v=1}^m \alpha_v \Delta_x^m [\Phi_x^{(k)}(x, vy), y] + \sum_{v=0}^m \beta_v \Delta_y^m [\Phi_x^{(k)}(x + vy, 0), y]. \quad (7)$$

Функция  $F(x, y)$ , построенная по формуле (3), определена для  $0 \leq x \leq a - my$ . Рассмотрим продолжение функции  $F(x, y)$  через ось  $y$  по способу Уитнея и Хестенса

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} F(x, y), & 0 \leq x \leq a - my, \\ \sum_{v=1}^{m+k} \lambda_v F\left(-\frac{x}{v}, y\right), & 0 \leq -x \leq a - my, \end{cases}$$

где  $\sum_{v=1}^{m+k} \binom{-1}{v}^s \lambda_v = 1$  для  $s = 0, 1, \dots, m+k-1$ .

Покажем, что функция  $\varphi(x) = \Phi(x, 0)$ ,  $|x| \leq a$ , является искомым продолжением функции  $f(x)$ . В силу формул (7), (5), (6) для  $0 < my < 2\delta = \frac{a}{m+1/2}$  имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta^m [\varphi^{(k)}(x), y]\|_{L_p(-\delta, \delta-my)} &= \|\Delta_x^m [\Phi_x^{(k)}(x, 0), y]\|_{L_p(-\delta, \delta-my)} \leq \\ &\leq c_1 \sum_{v=1}^m \left\| \int_0^y \dots \int_0^y \Phi_x^{(m+k)}(x + t_1 + \dots + t_m, vy) dt_1 \dots dt_m \right\|_{L_p(-\delta, \delta-my)} + \\ &+ c_2 \|\Delta_y^m [F_x^{(k)}(x, 0), y]\|_{L_p(0, \delta)} \leq c_3 \sum_{v=1}^m y^m \|\Phi_x^{(m+k)}(x, vy)\|_{L_p(-\delta, \delta)} + \\ &+ c_4 \left\| y^{-m} \int_0^y \dots \int_0^y \Delta^m [f^{(k)}(x), \xi_1 + \dots + \xi_m] d\xi_1 \dots d\xi_m \right\|_{L_p(0, \delta)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c_5 \sum_{v=1}^m y^m \|F_x^{(m+k)}(x, vy)\|_{L_p(0, \delta)} + c_4 y^{-1} \left\| \int_0^{my} |\Delta^m [f^{(k)}(x), \xi]| d\xi \right\|_{L_p(0, \delta)} \leq \\ &\leq c_5 \sum_{v=1}^m v^{-m} \|\Delta^m [f^{(k)}(x), vy]\|_{L_p(0, \delta)} + c_6 y^{-1} \int_0^{my} \|\Delta^m [f^{(k)}(x), \xi]\|_{L_p(0, \delta)} d\xi \leq \\ &\leq c_7 \omega_m(f^{(k)}, y)_{L_p(0, a)}. \end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

**С л е д с т в и е.** Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f(x) \in L_p(a, b)$  имеет обобщенную производную  $f^{(k)}(x)$ . Тогда существует финитная функция  $\varphi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ , совпадающая с функцией  $f(x)$  на  $[a, b]$ , равная нулю вне отрезка  $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$  и такая, что

$$\begin{aligned} &\|\varphi\|_{L_p(-\infty, \infty)} + h^{-m} \omega_m(\varphi^{(k)}, h)_{L_p(-\infty, \infty)} \leq \\ &\leq C \{ \|f\|_{L_p(a, b)} + h^{-m} \omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p(a, b)} \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C$  не зависит от функции  $f$ .

Распространим функцию  $f(x)$  на отрезок  $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$  по теореме 1 и обозначим ее тем же символом. Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = f(x) \eta(x)$ , где  $\eta(x)$  бесконечно дифференцируема и  $\eta(x) = 1$  для  $a - \varepsilon/3 \leq x \leq b + \varepsilon/3$ ,  $\eta(x) = 0$  вне отрезка  $[a - 2\varepsilon/3, b + 2\varepsilon/3]$ . Оценка первого слагаемого левой части формулы (8) очевидна.

В дальнейшем под нормой в  $L_p$  будем понимать норму в смысле  $L_p(\alpha, \beta)$ , где  $[\alpha, \beta] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ . В ходе получения неравенств в случае необходимости мы будем переходить к большему отрезкам из  $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ , не огорчивая этого каждый раз. Это допустимо, так как оценку (8) достаточно доказать для всех  $h \subset (0, h_0]$ , где  $h_0$  произвольно мало:

$$\begin{aligned} \|\Delta^m [\varphi^{(k)}, h]\|_{L_p} &\leq c_1 \|\Delta^m \left[ \sum_{s=0}^k \eta^{(k-s)} f^{(s)}, h \right]\|_{L_p} \leq \\ &\leq c_2 \sum_{v=0}^m \sum_{s=0}^k h^v \|\Delta^{m-v} [f^{(s)}, h]\|_{L_p}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что

$$h^{-v} \omega_v(\psi, h)_{L_p} \leq C \{ \|\psi\|_{L_p} + h^{-m} \omega_m(\psi, h)_{L_p} \}, \quad 1 \leq v \leq m.$$

Доказательство этого факта для  $p = \infty$  имеется в (5), стр. 118, для  $1 \leq p < \infty$  оно проводится аналогично.

Воспользуемся еще соотношением  $\|\Delta[\psi, h]\|_{L_p} \leq h \|\psi'\|_{L_p}$ . Из неравенства (9) будем иметь

$$\begin{aligned} h^{-m} \omega_m(\varphi^{(k)}, h)_{L_p(-\infty, \infty)} &\leq c_3 \sum_{s=0}^k \{ \|f^{(s)}\|_{L_p} + h^{-m-k+s} \omega_{m+k-s}(f^{(s)}, h)_{L_p} \} \leq \\ &\leq c_4 \left\{ \sum_{s=0}^k \|f^{(s)}\|_{L_p} + h^{-m} \omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p} \right\}. \end{aligned}$$

Для доказательства неравенства (8) осталось показать, что

$$\|f^{(s)}\|_{L_p} \leq c \{ \|f\|_{L_p} + h^{-m} \omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p} \}, \quad s = 1, 2, \dots, k. \quad (10)$$

Воспользуемся идеей С. М. Никольского ((6), стр. 269). Запишем разложение функции  $f(x)$  по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f(x + vh) &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{f^{(s)}(x)}{s!} (vh)^s + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{vh} (vh - \xi)^{k-1} f^{(k)}(x + \xi) d\xi = \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{f^{(s)}(x)}{s!} (vh)^s + \frac{v^k}{(k-1)!} \int_0^h (h - \xi)^{k-1} f^{(k)}(x + v\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^k \frac{f^{(s)}(x)}{s!} (vh)^s = f(x + vh) - f(x) - \frac{v^k}{(k-1)!} \int_0^h (h-\xi)^{k-1} [f^{(k)}(x+v\xi) - f^{(k)}(x)] d\xi.$$

Домножая на  $(-1)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} v^{-k}$  и суммируя по  $\nu$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^k h^s \sum_{\nu=1}^m (-1)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} v^{s-k} \frac{f^{(s)}(x)}{s!} = \\ & = \sum_{\nu=1}^m [f(x + vh) - f(x)] (-1)^{m-\nu} \binom{m}{\nu} v^{-k} - \\ & - \frac{1}{(k-1)!} \int_0^h (h-\xi)^{k-1} \Delta^m [f^{(k)}(x), \xi] d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Выбирая в (11) последовательно  $h = h_i, i = 1, 2, \dots, k$ , где  $h_i$  — достаточно малые положительные различные числа, получим систему алгебраических уравнений с определителем Вандермонда, из которой можно получить выражение  $f^{(k)}(x)$  через правые части. Отсюда и

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\|_{L_p} & \leq c_1 \left\{ \|f\|_{L_p} + \int_0^{h_0} \|\Delta^m [f^{(k)}(x), \xi]\|_{L_p} d\xi \right\} \leq \\ & \leq c_2 \left\{ \|f\|_{L_p} + h_0^{-m} \omega_m(f^{(k)}, h_0)_{L_p} \right\} \leq 2^m c_2 \left\{ \|f\|_{L_p} + h^{-m} \omega_m(f^{(k)}, h)_{L_p} \right\}, \end{aligned}$$

где  $0 < h \leq h_0$ ,  $h_0$  достаточно мало (см. (5), стр. 116). Тем же приемом еще легче показать, что  $\|f^{(s)}\|_{L_p} \leq c_3 \left\{ \|f\|_{L_p} + \|f^{(k)}\|_{L_p} \right\}, s = 1, 2, \dots, k-1$ .

Отсюда и из предыдущего неравенства получаем (10), а вместе с тем и доказательство следствия. Заметим еще, что в оценке для  $h^{-m} \omega_m(\varphi^{(k)}, h)_{L_p(-\infty, \infty)}$  существенно и первое слагаемое правой части неравенства (8), что легко

проверить на  $f(x) = \text{const}$ . Аналогично доказывается

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  задана на параллелепипеде  $\Delta \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$  и имеет там обобщенную (по С. Л. Соболеву) производную  $\partial^k f / \partial x_1^k$  с частным модулем гладкости в направлении оси  $x_1$   $\omega_m(\partial^k f / \partial x_1^k, h e_1)_{L_p(\Delta)}$ . Тогда ее можно продолжить по способу Уитнея и Хестенса на больший параллелепипед  $\Delta_1 \equiv \{a'_1 \leq x_1 \leq b'_1, a_i \leq x_i \leq b_i, i = 2, \dots, n\}$  функцией  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , причем так, что

$$\omega_m\left(\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^k}, h e_1\right)_{L_p(\Delta_1)} \leq c \omega_m\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}, h e_1\right)_{L_p(\Delta)}.$$

Для теоремы 2 справедливо также следствие, аналогичное следствию из теоремы 1. Следствие из теоремы 1 допускает обобщение на случай  $n$ -мерной области, граница которой локально удовлетворяет условию Липшица.

Поступило  
2 I 1963

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. К. Дзялдык, Матем. сборн., 40 (82), 239 (1956). <sup>2</sup> А. Ф. Тиман, В. К. Дзялдык, ДАН, 75, № 4, 499 (1950). <sup>3</sup> О. В. Бесов, Матем. сборн., 58 (100), № 1, 87 (1962). <sup>4</sup> В. П. Ильин, В. А. Солонников, ДАН, 136, № 3, 538 (1961). <sup>5</sup> А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. <sup>6</sup> С. М. Никольский, Матем. сборн., 33 (75), 2, 261 (1953). <sup>7</sup> К. К. Головкин, В. А. Солонников, ДАН, 143, № 4, 767 (1962). <sup>8</sup> В. К. Дзялдык, ДАН, 121, № 3, 403 (1958). <sup>9</sup> Т. Фреу, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., III, 8/1, 89 (1958).