



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Лизоркин, Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности. О риссовых потенциалах произвольного порядка,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 174–197

<https://www.mathnet.ru/tm2485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

19 апреля 2025 г., 02:25:10



П. И. ЛИЗОРКИН

ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ
ИЗ ЛИУВИЛЛЕВСКИХ КЛАССОВ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ.
О РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

ВВЕДЕНИЕ

В первом параграфе работы дается нестандартное освещение некоторых результатов (сравнительно недавнего происхождения) из теории пространств Соболева $w_p^r(R^n) \equiv w_p^r$ с полунормой

$$|f, w_p^r(R^n)| = \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha f\|_{L_p(R^n)}.$$

Эти «модельные результаты» обобщаются в статье на случай нецелых индексов дифференцирования. Самостоятельный интерес представляет, по-видимому, трактовка риссовых потенциалов.

Рассматриваемые «лиувиллевские классы» $l_p^r(R^n) \equiv l_p^r$, $0 < r < \infty$, $1 < p < \infty$, состоят из функций f , обобщенные лиувиллевские производные [1] порядка r которых принадлежат $L_p(R^n) \equiv L_p$. Функциональное пополнение C_0^∞ (бесконечно дифференцируемых финитных в R^n функций) в l_p^r обозначается через \dot{l}_p^r и называется пространством риссовых потенциалов порядка r функций из L_p . Название оправдывается тем, что при $r - n/p < 0$ функция $f \in \dot{l}_p^r$ представима (единственным образом) в виде

$$f(x) = \int_{R^n} \frac{g(y) dy}{|x-y|^{n-r}}, \quad g \in L_p, \quad (*)$$

и наоборот. Более того, вне указанной традиционной области изменения r (т. е. при $r - n/p \geq 0$) представление (*) сохраняет смысл (но должно истолковываться специальным образом, см. начало § 2). Риссовы потенциалы обладают единообразными оценками: из $f \in \dot{l}_p^r$ следует суммируемость f в степени p и весом $(1 + |x|)^{-pr}$ по R^n при всех $r - n/p \neq 0, 1, \dots$. Эти результаты и оценки изложены в § 2.

Ясно, что $\dot{l}_p^r \subset l_p^r$. В § 3 дается характеристика пространства \dot{l}_p^r как подпространства l_p^r . Доказывается, что критерием принадлежности функции f к \dot{l}_p^r (при $r - n/p \neq 0, 1, \dots$) является конечность интеграла

$$\int_{R^n} \frac{|f(x)|^p}{(1+|x|)^{pr}} dx. \quad (1)$$

В § 4 устанавливается, что l_p^r в существенном «исчерпывает» l_p^r . Это означает, что:

$$1) \quad l_p^r = \dot{l}_p^r \quad \left(\text{при } r - \frac{n}{p} \geq [r]^- \right) \quad (2)$$

(где $[r]^-$ — наибольшее целое, меньше r);

2) \dot{l}_p^r исчерпывает l_p^r с точностью до конечномерного пространства полиномов (при $r - n/p < [r]^-$). В пункте 2) целесообразно различать два случая:

2а) $0 \leq r - n/p < [r]^-$ (промежуточный случай),

2б) $r - n/p < 0$ (случай «выхода на полином»).

В случае 2б) любая функция $f \in l_p^r$ единственным образом представляется в виде

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{|\alpha| \leq [r]^-} C_\alpha x^\alpha, \quad (3)$$

где $f_0(x) \in \dot{l}_p^r$ и «обращается в нуль» на ∞ (и, следовательно, $f(x)$ «выходит на полином» при $x \rightarrow \infty$). Если обозначить через \mathcal{P} совокупность многочленов степени не выше $[r]^-$, то соотношение (3) означает разложение l_p^r в прямую сумму

$$l_p^r = \dot{l}_p^r + \mathcal{P}, \quad r - \frac{n}{p} < 0.$$

В промежуточном случае 2а) положение аналогично. Вместо разложения (3) имеет место разложение:

$$f \in l_p^r \Leftrightarrow f(x) = f_0(x) + \sum_{[r - \frac{n}{p}] < \alpha \leq [r]^-} C_\alpha x^\alpha, \quad f_0 \in \dot{l}_p^r.$$

На этот раз $f_0(x)$ может содержать полиномы вида $\sum_{|\alpha| \leq [r - \frac{n}{p}]} C_\alpha x^\alpha$ и другие растущие функции.

В заключительном § 4 даются дополнительные замечания и формулируются нерешенные вопросы.

Некоторые обозначения: $|f, X| = \|f\|_X$ — норма элемента f в нормированном пространстве X ; знак \ll заменяет иногда знак неравенства (с точностью до константы); $Ff (F^{-1}f)$ — прямое (обратное) преобразование Фурье функции f^1 .

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Рассмотрим евклидово пространство n измерений R^n и пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка R^n , $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Линейное пространство функций $f(x)$, имеющих обобщенные (по Соболеву) производные порядка r , суммируемые по R^n в степени $p \leq 1$, обозначим через $w_p^r(R^n) = w_p^r$. Это пространство можно нормировать различными способами, нормировку в нем целесообразно выбирать в соответствии с обстоятельствами. Позже мы зафиксируем в w_p^r некоторую норму. Известно, что функции $f \in w_p^r$ имеют

¹ Пояснение других обозначений дано в тексте и в конце статьи.

обобщенные производные

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad 0 \leq |k| = k_1 + \dots + k_n < r,$$

суммируемые в степени p локально: $D^k f \in L_{p, \text{loc}}(R^n)$.

Однако эти производные и, в частности, сама функция f не обязаны принадлежать $L_p(R^n)$ и могут быть растущими на бесконечности. Ясно, например, что функция f может быть полиномом степени $r - 1$. Имеются ли в w_p^r растущие функции, отличные от полиномов? Если имеются, то каким образом характеризовать их рост? Ответ на эти вопросы дается следующими теоремами. Введем в рассмотрение выражение

$$|f, w_p^r| = \sum_{|k|=r} \|D^k f\|_p.$$

Оно является полунормой в w_p^r , ядро \mathcal{P} (множество элементов, на которых полунорма аннулируется) которой состоит из многочленов степени не выше $r - 1$.

Т е о р е м а I. Если $r - n/p < 0$, $1 < p < \infty$, то в w_p^r нет других растущих функций, кроме полиномов порядка $r - 1$. Это означает, что для каждой функции $f \in w_p^r$ найдется единственный полином $P_f(x) = \sum_{|\alpha| \leq r-1} C_\alpha x^\alpha$ такой, что разность

$$f(x) - P_f(x)$$

стремится к нулю почти по всем направлениям $x/|x|$ при $|x| \rightarrow \infty$ и при этом

$$\int_{R^n} \frac{|f(x) - P_f(x)|^p}{(1 + x^2)^{nr/2}} dx \leq C |f - P_f, w_p^r|^p,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от f .

Теорема I именуется «теоремой о выходе на многочлен». Неравенство (4) дает количественную оценку стремления f к многочлену P_f на ∞ .

Пусть число $r - n/p$ неотрицательно, обозначим через $[r - n/p]$ его целую часть. Имеем

$$0 \leq \left[r - \frac{n}{p} \right] \leq r - 1,$$

причем $[r - n/p] = r - 1$ при $n \leq p$.

Обозначим через $L_p(R^n, \omega)$ пространство суммируемых в степени $p \geq 1$ и с весом ω функций f с нормой

$$|f, L_p(R^n, \omega)| = \left\{ \int_{R^n} |f\omega|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Положим

$$\omega_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{r/2}} & \text{при } r - \frac{n}{p} \text{ нецелом} \\ \frac{1}{(1 + |x|^2)^{r/2} \ln(e + |x|^2)} & \text{при } r - \frac{n}{p} = 0, 1, \dots, r - 1. \end{cases}$$

Будем употреблять также сокращенные обозначения:

$$L_p(R^n, \omega_r) = L_{p,r}, \text{ при нецелом } r - n/p;$$

$$L_p(R^n, \omega_r) = L_{p,r,1} \text{ при } r - n/p = 0, 1, \dots, r - 1.$$

Т е о р е м а II. Пусть $1 < p < \infty$, $r - n/p \geq 0$, $[r - n/p] = k$, $f \in w_p^r$. Тогда найдется единственный многочлен вида

$$P_f(x) = \sum_{k < |\alpha| \leq l-1} C_\alpha x^\alpha \quad (5)$$

такой, что

$$\int_{R^n} \frac{|f(x) - P_f(x)|^p}{(1 + |x|^2)^{pr/2}} dx < \infty \quad \text{при нецелом } r - \frac{n}{p}, \quad (6)$$

$$|f(x) - P_f(x); L_{p,r,1}| < \infty \quad \text{при целом } r - \frac{n}{p}. \quad (7)$$

Грубо говоря, оценка (6) означает, что разность $f - P_f$ может иметь рост порядка $|x|^{r-n/p}$ на ∞ и что сама функция f может превышать указанный рост только благодаря наличию полиномиального слагаемого P_f . Аналогично истолковывается оценка (7). Таким образом, в условиях теоремы II в w_p^r есть растущие на ∞ функции, отличные от полиномов и этот допустимый рост (неполиномиального характера) характеризуется конечностью величины $|f, L_{p,r}|$ (при нецелом $r - n/p$) или $|f, L_{p,r,1}|$ (при целом $r - n/p$).

Указанные оценки (4), (6) оптимальны в том смысле, что при любом $\varepsilon > 0$ можно указать функцию $f_0 \in w_p^r$, для которой $P_{f_0} \equiv 0$ и $|f_0, L_{p,r-\varepsilon}| = \infty$. Аналогично в оценке (7) наличие логарифмического множителя существенно — без него уже многочлен степени k не удовлетворяет этой оценке; более того, ослабление степени логарифма на ε недопустимо. Таким образом, оценки (6), (7) дают адекватную характеристику допустимого роста рассматриваемых функций.

Отметим, что при $p \geq n$ множество полиномов вида (5) пусто и функция f подчиняется оценкам (6) или (7), не будучи подправленной на полином. Целесообразно различать случай $r - n/p \geq 0$, $p < n$ и случай $r - n/p \geq 0$, $p \geq n$. В первом из них (мы именуем его в дальнейшем «промежуточным») естественно говорить о «выходе функции f на остаточный полином».

Конечно, теоремы I и II можно было объединить в единой формулировке, если вместо оценки (4) высказывать лишь утверждение о конечности величины $|f - P_f, L_{p,r}|$. Однако написанная оценка (4) содержательнее. Желательно и соотношения (6), (7) переписать в виде оценки. Мы нарочито обошлись их приведенной записью, чтобы не вводить раньше времени величин, без которых качественная картина и так проясняется достаточно полно. Мы придадим количественную форму соотношениям (6), (7), освещая факты с другой стороны.

Известно, что на C_0^∞ (финитных, бесконечно дифференцируемых в R^n) функциях величина $|\cdot, w_p^r|$ является нормой. Поэтому можно рассматривать пополнение C_0^∞ по этой норме. Будем наряду со сходимостью последовательности $\{\varphi_n(x)\} \subset C_0^\infty$ по норме $|\cdot, w_p^r|$ требовать ее сходимости по мере на каждом компакте R^n . Такое «функциональное пополнение» по норме $|\cdot, w_p^r|$ обозначим через \tilde{w}_p^r .

Л е м м а 1. Если $1 < p < \infty$, $r - n/p < 0$, то \dot{w}_p^r нормированное пространство с нормой

$$\|u\|_{\dot{w}_p^r} = |u, w_p^r|, \quad u \in \dot{w}_p^r$$

и имеет место оценка

$$\int_{R^n} \frac{|u(x)|^p}{(1+|x|^2)^{pr/2}} dx \leq C |u, w_p^r|. \quad (8)$$

Из этой оценки следует, что функция $u \in \dot{w}_p^r$ «зануляется» на ∞ ($pr < n$) и поэтому \dot{w}_p^r не содержит полиномов (при $r - n/p < 0$). Более того, оценка (8) дает количественную оценку «зануления». Однако при $r - n/p \geq 0$ в пространство \dot{w}_p^r попадают и полиномы степени $\leq r - n/p$. Поэтому величина $|\cdot, w_p^r|$ оказывается (в этом случае) всего лишь полунормой в \dot{w}_p^r и встает вопрос о привнесении в \dot{w}_p^r нормы, не уменьшающей объем (\equiv запас элементов) пространства. Такой нормой может служить, очевидно, выражение

$$\|u\|_{L_p(Q)} + |u, w_p^r|, \quad (9)$$

где Q — единичный шар (с центром в начале координат) пространства R^n . Пространство \dot{w}_p^r , снабженное нормой (9), обозначим через \dot{W}_p^r (ясно, что выражение (9) может служить нормой и при $r - n/p < 0$). Можно непосредственно воспринимать \dot{W}_p^r как замыкание C_0^∞ функций по норме $\|f\|_{L_p(Q)} + |f, w_p^r|$.

З а м е ч а н и е 1. В дальнейшем мы нередко не различаем пространства \dot{w}_p^r и \dot{W}_p^r . По составу элементов они совпадают, но одно из них — линейное пространство, другое — нормированное. Понятие функционального пополнения C_0^∞ в w_p^r , приведшее к \dot{w}_p^r , эквивалентно понятию обычного пополнения C_0^∞ по норме (9). Мы часто апшелируем к этому факту.

Т е о р е м а III. Если $u \in \dot{W}_p^r$, $1 < p < \infty$, то

$$|u, L_{p,r}| \leq C |u, \dot{W}_p^r| \quad \text{при } r - \frac{n}{p} \neq 0, 1, \dots, \quad (10)$$

(причем при $r - n/p < 0$ справедлива более точная оценка (8))

$$|u, L_{p,r,1}| \leq C |u, \dot{W}_p^r| \quad \text{при } r - n/p = 0, 1, \dots, r - 1, \quad (11)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от f .

Легко построить примеры, показывающие оптимальность оценок (10), (11) в смысле, который уже пояснялся (например,

$$u = (1 + |x|^2)^{1/2(r-n/p)} \ln(e + |x|^2)^{1/p-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

в случае (11)).

Обратимся теперь к рассмотрению «незануленных» пространств. Линейное пространство w_p^r превратим в нормированное пространство W_p^r , взяв в качестве нормы выражение

$$|f, W_p^r| = \|f\|_{L_p(Q)} + |f, w_p^r|.$$

Тогда утверждения теорем I и II можно пересказать следующим образом:

¹ Оценки (10), (11) являются упомянутым уточнением соотношений (6), (7), $u = f - P$.

1. Пространство W_p^r , $r - n/p < 0$, является прямой суммой пространства \dot{w}_p^r и конечномерного пространства \mathcal{P} полиномов степени не выше $r - 1$, т. е. из $f \in W_p^r$ следует, что

$$f = u + P_f, \quad u \in \dot{w}_p^r, \quad P_f = \sum_{|\alpha| \leq r-1} C_\alpha x^\alpha \in \mathcal{P}.$$

Из «зануления» u на ∞ (лемма 1) следует выход $f \in W_p^r$ на многочлен P_f при $|x| \rightarrow \infty$.¹

2. При $r - n/p \geq 0$, $p \geq n$ пространство W_p^r совпадает с \dot{W}_p^r (или, что то же самое, $w_p^r = \dot{w}_p^r$).

В промежуточном случае $k = [r - n/p] \geq 0$, $p < n$, также имеет место разложение в прямую сумму, т. е.

$$f \in W_p^r \Leftrightarrow f = u + \sum_{k < |\alpha| \leq r-1} C_\alpha x^\alpha, \quad u \in \dot{w}_p^r.$$

Перечисленные результаты изложены в книге [2], где имеются ссылки на первоисточники (С. Л. Соболев, С. В. Успенский, Л. Д. Кудрявцев, Т. С. Пиголкина и др.).

З а м е ч а н и е 2. Из сказанного явствует, что носителем существенных свойств пространства w_p^r является его подпространство \dot{w}_p^r . С каким-то правом можно заявить, что элементы (т. е. многочлены), «отсеянные» при переходе от w_p^r к \dot{w}_p^r , «случайно» попали в состав u_p^r . Это обстоятельство особенно ярко проявляется в теории дробных пространств при их определении с помощью разностей (порядок разности не влияет на существенные свойства функций, но заставляет включать в состав пространства лишние полиномы).

Перейдем к определению пространства $l_p^r(R^n)$ ¹. Его можно определить как совокупность локально суммируемых в R^n функций $f(x)$, обладающих обобщенными ливиллевскими производными порядка r [1]

$$D^s f = \frac{\partial^{|s|} f}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, \quad |s| = s_1 + s_2 + \dots + s_n = r,$$

суммируемыми в степени p , $1 \leq p < \infty$, по R^n . Для последующих доказательств удобнее исходить из другого, эквивалентного определения, основанного на рассмотрении полунормы Стрихартца [3] (см. также [4, 5]).

О п р е д е л е н и е 1. Пространством $l_p^r(R^n) = l_p^r$, $r \geq 0$, $1 \leq p < \infty$, назовем совокупность локально суммируемых в R^n функций $f(x)$, обладающих локально суммируемыми в R^n производными (по Соболеву) $D^s f$ порядка $|s| = [r]$:

- а) суммируемыми в степени p по R^n при целом r ;
- б) с конечным интегралом $\|S_\alpha(D^s f)\|_p^p$, где

$$S_\alpha(D^s f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\int_{|x-y|<t} |D^s f(x) - D^s f(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^{2(n+\alpha)+1}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

при нецелом $r = [r] + \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

¹ В обозначениях мы следуем установившейся традиции, по которой полунормированное пространство, соответствующее пространствам Соболева $\mathcal{W}_{p,\theta}^r$, Бесова $B_{p,\theta}^r$, пространству L_p^r с ливиллевскими производными, обозначается той же буквой алфавита, но с уменьшением размера:

$$\mathcal{W}_p^r = w_p^r \cap L_p, \quad B_{p,\theta}^r = b_{p,\theta}^r \cap L_p, \quad L_p^r = l_p^r \cap L_p.$$

Выражение

$$а') \quad |f, l_p^r| = \sum_{|s|=r} \|D^s f\|_p \quad \text{при целом } r,$$

$$б') \quad |f, l_p^r| = \sum_{|s|=[r]} \|S_\alpha(D^s f)\|_p \quad \text{при нецелом } r$$

является полунормой в l_p^r с ядром \mathcal{P} , состоящим из многочленов степени не выше $[r]^-$ (где $[r]^-$ — наибольшее целое, меньшее r).

Мы видим, что при целом r пространства $l_p^r(R^n)$ и $w_p^r(R^n)$ совпадают (в частности, $l_p^0(R^n) = w_p^0(R^n) = L_p(R^n)$). По аналогии со случаем целого r будем рассматривать при произвольном $r \geq 0$ пространства: $\hat{l}_p^r, \check{L}_p^r, \mathcal{L}_p^r$.

Пространство \hat{l}_p^r есть функциональное пополнение C_0^∞ — функций по норме $|f, \hat{l}_p^r|$. Для бесконечно дифференцируемых финитных функций эта норма имеет удобное эквивалентное выражение в образах Фурье ($Fu = \tilde{u}$, $F^{-1}v = \hat{v}$)

$$|u, \hat{l}_p^r| \sim \|\widehat{|\xi|^r \tilde{u}(\xi)}\|_{L_p}, \quad 1 < p < \infty, \quad (12)$$

при $r - n/p < 0$ равносильно представлению u в виде потенциала Рисса

$$u(x) = C_{n,r} \int_{R^n} \frac{g(y) dy}{|x-y|^{n-r}}, \quad g(x) = \widehat{|\xi|^r \tilde{u}(\xi)} \in L_p(R^n). \quad (13)$$

Как известно, потенциал Рисса допускает оценку [6, 7]

$$|u, L_{p,r}| \leq C \|g\|_{L_p} \quad (\|g\|_{L_p} \leq C |u, \hat{l}_p^r|). \quad (14)$$

С учетом сказанного приходим к заключению, что при $r - n/p < 0$ пространство \hat{l}_p^r есть банахово пространство с нормой $|u, \hat{l}_p^r|$ ($|u, \hat{l}_p^r| = 0 \Rightarrow u = 0$).

При $r - n/p \geq 0$ величина $|f, \hat{l}_p^r|$ оказывается полунормой в \hat{l}_p^r (легко проверяется, например, что функция $u(x) = 1$ содержится в \hat{l}_p^r). Пространство \hat{l}_p^r , снабженное нормой

$$\|u\|_{L_p(Q)} + |u, \hat{l}_p^r|, \quad (15)$$

обозначается через \check{L}_p^r (при $r - n/p < 0$ норма (15) эквивалентна $|u, \hat{l}_p^r|$). Привнесение нормы (15) в пространство \hat{l}_p^r дает (по определению) пространство \mathcal{L}_p^r .

З а м е ч а н и е 3. По поводу взаимосоотношений между пространствами \hat{l}_p^r и \check{L}_p^r можно повторить сказанное в замечании 1. Говоря в дальнейшем о функциональном пополнении C_0^∞ в l_p^r , мы часто будем иметь в виду обычное пополнение по норме (15) (что равносильно).

§ 2. РИССОВЫ ПОТЕНЦИАЛЫ И ИХ ОЦЕНКИ

Как явствует из определений, по составу элементов пространства \hat{l}_p^r и \check{L}_p^r совпадают. Одно из них рассматривается как линейное пространство (с полунормой), другое — как банахово пространство с нормой

$$|u, \check{L}_p^r| = \|u\|_{L_p(Q)} + |u, \hat{l}_p^r|.$$

Согласно сказанному, при $r - n/p < 0$ эта норма эквивалентна величине $|u, \hat{l}_p^r|$, u представляется в виде потенциала (13) и справедлива оценка (14).

Вопрос о представимости $u(x) \in \dot{L}_p^r$ интегралом типа потенциала при $r - n/p \geq 0$ не так прост. Все же он решается положительно (в некотором смысле). Пусть $u_m(x)$ — последовательность C_0^∞ функций, порождающая элементы $u(x) \in \dot{L}_p^r$ (при функциональном пополнении). Построим функцию

$$g_m(x) = \widehat{|\xi|^r \tilde{u}_m(\xi)}, \quad r > 0.$$

Можно показать, что (при $r \neq n + 2k$, $k = 0, 1, \dots$)

$$u_m(x) = C_{n,r} \int_{R^n} \frac{g_m(y) dy}{|x-y|^{n-r}} \quad (16)$$

и что последовательность g_m сходится по норме L_p к некоторой функции g . Следовательно, вместо обычного представления интегралом типа потенциала имеем

$$u(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} C_{n,r} \int_{R^n} \frac{g_m(y) dy}{|x-y|^{n-r}}, \quad (17)$$

где предел понимается в смысле сходимости по мере на любом компакте и по полунорме $|\cdot|, l_p^r$ (поскольку $|u_m, l_p^r| \sim \|g_m\|_p$). Конечно, предельный переход под знаком интеграла недопустим — интеграл от предельной функции g , вообще говоря, не существует. Более того, предел (17) зависит не только от g , различные последовательности будут порождать, в общем случае, различные пределы (17) (при этом имеются в виду такие последовательности, что

$$\{F^{-1} |\xi|^{-r} (Fg_m)(\xi)\} \subset C_0^\infty,$$

и, конечно, $g_m \rightarrow g$ по норме L_p). Возникающий здесь произвол можно охарактеризовать так: g определяет u с точностью до многочлена вида $\sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha x^\alpha$, $k = [r - n/p]$ (u определяется полностью пределом (17) лишь при указании приближающей последовательности).

Мы не останавливаемся на обосновании перечисленных утверждений, поскольку в контексте данной статьи они приведены для оправдания терминологии: функции из пространства \dot{L}_p^r мы именуем риссовыми потенциалами. Заметим, что алгоритм построения функции g_m , связанной с функцией $u_m \in C_0^\infty$ соотношением (16), исследован в работе автора [4] (см. также [7]). Операция свертки с ядром

$$R_r(x) = F^{-1} |\xi|^r, \quad -\infty < r < \infty,$$

изучалась в работе автора [5] в рамках пространства Φ' обобщенных функций (над некоторым пространством пробных функций Φ). В предыдущем абзаце разговор, по сути дела, шел об обращении операции $R_r : \dot{L}_p^r \rightarrow L_p$

$$R_r * u \equiv F^{-1} |\xi|^r Fu = g(x), \quad r > 0.$$

Описанная ситуация означает, что оператор R_r переводит класс функций $f(x) + \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha x^\alpha$ из \dot{L}_p^r в единственный элемент $g \in L_p$. Следовательно, пространство \dot{L}_p^r само распадается в прямую сумму конечномерного пространства полиномов вида $\sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha x^\alpha$ и дополнительного подпространства l_p^r , изоморфного L_p . Нелишне отметить, что это пространство l_p^r «рафинированных потенциалов» можно описать как функциональное пополнение в \dot{L}_p^r упомянутого

выше пространства пробных функций Φ . (Напомним, что функциональное пополнение в L_p^r совпадает с обычным пополнением по норме \mathcal{L}_p^r .)

Перейдем к оценкам риссовых потенциалов. Случай целых r считаем известным (теорема III) и опираемся на него. Поэтому основная работа производится при $0 < r < 1$, что позволяет обойтись простейшими интегральными представлениями. Пусть Q_a — шар радиуса a с центром в начале координат, $Q_1 = Q$. Объем единичного шара обозначим $|Q| = 1/q$. Положим

$$f^a(x) = \frac{q}{(a|x|)^n} \int_{|y| \leq a|x|} f(y) dy.$$

Таким образом, $f^a(x)$ — среднее значение f по шару $Q_{a/x}$.

Лемма 1 (подготовительная). Пусть $f \in L_p^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$. Тогда справедлива оценка

$$|f - f^a, L_{p,\alpha}| \leq C |f, L_p^\alpha|, \quad (18)$$

где постоянная C не зависит от f .

Доказательство. Напишем очевидное равенство

$$f(x) = \frac{q}{(a|x|)^n} \int_{|y| < a|x|} f(y) dy + \frac{q}{(a|x|)^n} \int_{|y| < a|x|} f(x) - f(y) dy = f^a(x) + J. \quad (19)$$

Второе слагаемое оценим следующим образом:

$$|J| \leq \frac{q}{(a|x|)^n} \int_{|x-y| < t} |f(x) - f(y)| dy, \quad t \geq (1+a)|x|.$$

Интегрируя по dt/t в пределах от $A = (1+a)|x|$ до $B = (1+a)e|x|$ и применяя неравенство Шварца, получим

$$\begin{aligned} |J| &\leq \frac{q}{(a|x|)^n} \int_A^B \frac{dt}{t} \int_{|x-y| < t} |f(x) - f(y)| dy \leq \\ &\leq \frac{q}{(a|x|)^n} \left\{ \int_A^B \left(\int_{|x-y| < t} |f(x) - f(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^{2(n+\alpha)+1}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\int_A^B t^{2n+2\alpha-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{cq(1+a)^{n+\alpha}}{a^n} |x|^\alpha \left\{ \int_0^\infty \left(\int_{|x-y| < t} |f(x) - f(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^\beta} \right\}^{\frac{1}{2}} = c(a)|x|^\alpha (S_a f). \quad (20) \end{aligned}$$

Из равенства (19) и неравенства (20) легко получаем оценку (18), причем $C = c(a)$. Лемма 1 доказана.

В дальнейшем нам будет полезно следующее обобщение неравенства Харди [8] (именуемое неравенством Сысоевой — Таленти).

Теорема IV. Пусть $k(x)$ — положительная измеримая функция, определенная в промежутке $(0,1)$ ($0 < 1 \leq +\infty$) и пусть $p \geq 1$. Тогда

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right|^p \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda^*(p) \int_0^1 |f(x)|^p \frac{dx}{k(x)}, \quad (21)$$

где

$$\lambda^*(p) = \left(p \sup_{0 < x < 1} x^{p-1} k(x) \int_x^1 \frac{dt}{t^p k(x)} \right)^p.$$

Нижеследующую теорему формулируем для функций из \dot{L}_p^α , хотя впоследствии увидим, что часть ее утверждения сохраняется и в более общих рамках пространства \dot{L}_p^α . Через S будем обозначать единичную сферу в R_n , пусть s — «площадь» поверхности S , $s = n |Q| = n/q$.

Т е о р е м а 1. Пусть $u \in \dot{L}_p^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$. Тогда

1. $u \in L_{p,\alpha} \equiv L_p(R^n, \omega)$, $\omega = (1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$, если $\alpha p \neq n$.

2. $u \in L_p(R^n, \omega)$, $\omega = (1 + |x|^2)^{-(\alpha+\varepsilon)/2}$, если $\alpha p = n$ (при любом $\varepsilon > 0$).

При этом имеет место оценка

$$|u, L_p(R^n, \omega)| \leq c |u, \dot{L}_p^\alpha|, \quad (22)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от u (при $\alpha p < n$ имеет место оценка через полунорму $|u, \dot{L}_p^r|$).

Доказательство достаточно провести для $\varphi \in C_0^\infty$. Действуя как и выше, получим неравенство

$$|\varphi(x)| \leq \frac{q}{(a|x|)^n} \left| \int_{|y| < a|x|} \varphi(y) dy \right| + C(a) |x|^\alpha (S_\alpha \varphi)(x). \quad (23)$$

Положим $\gamma = \alpha$ при $\alpha p \neq n$, $\gamma = \alpha + \varepsilon$ при $\alpha p = n$ и возьмем $L_{p,\gamma}$ -норму от обеих частей неравенства (23). Получим

$$|\varphi, L_{p,\gamma}| \leq |\varphi^\alpha, L_{p,\gamma}| + C(a) |\varphi, \dot{L}_p^r|. \quad (24)$$

Положим $|\varphi^\alpha, L_{p,\gamma}| = A$, тогда

$$\begin{aligned} A^p &\leq \int_{R^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{p\gamma/2}} \left(\frac{q}{(a|x|)^n} \int_{|y| < a|x|} |\varphi(y)| dy \right)^p = \\ &= \frac{q^{ps}}{a^{np}} \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1 + \rho^2)^{p\gamma/2}} \left(\frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{1}{\rho} \int_0^{a\rho} r^{n-1} dr \int_S |\varphi(r\sigma)| d\sigma \right)^p = \\ &= q^{ps} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\rho} \int_0^\rho t^{n-1} \int_S |\varphi(at\sigma)| d\sigma \right)^p dt \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1 + \rho^2)^{p\gamma/2} \rho^{(n-1)p}}. \end{aligned}$$

Мы преобразовали выражение к виду, удобному для применения неравенства (21). Отметим, что точку y в сферических координатах (r, σ) , $0 < r < \infty$, $\sigma \in S$, мы записываем иногда в виде $r\sigma$. Применение неравенства (21) и затем неравенства Гёльдера дает

$$\begin{aligned} A^p &\leq q^{ps} \lambda^*(p) \int_0^\infty \left[\int_S |\varphi(at, \sigma)| d\sigma \right]^p \frac{v^{n-1} dv}{(1 + v^2)^{p\gamma/2}} \leq \\ &\leq q^{ps} \lambda^*(p) \int_0^\infty \left(\int_S |\varphi(at, \sigma)|^p d\sigma \right) \frac{v^{n-1} dv}{(1 + v^2)^{p\gamma/2}} = \lambda^*(p) n^p a^{p\gamma-n} \int_{R^n} \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(a^2 + |y|^2)^{p\gamma/2}}. \end{aligned}$$

Положим $\lambda^*(p) n^p = C$ и произведем очевидные из текста преобразования

$$\begin{aligned} A^p &\leq ca^{p\gamma-n} \int_{R^n} \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(a^2 + |y|^2)^{p\gamma/2}} = ca^{p\gamma-n} \int_{|y| < 1} \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(a^2 + |y|^2)^{p\gamma/2}} + \\ &+ ca^{p\gamma-n} \int_{|y| \geq 1} \frac{|\varphi(y)|^p}{(1 + |y|^2)^{p\gamma/2}} \frac{(1 + |y|^2)^{p\gamma/2}}{(a^2 + |y|^2)^{p\gamma/2}} dy \leq ca^{-n} \int_{|y| < 1} |\varphi(y)|^p dy + \\ &+ 2ca^{p\gamma-n} \int_{|y| \geq 1} \frac{|\varphi(y)|^p}{(1 + |y|^2)^{p\gamma/2}} dy. \end{aligned}$$

При последнем переходе мы воспользовались тем, что

$$\frac{(1+|y|^2)}{(a^2+|y|^2)} < \frac{1+|y|^2}{|y|^2} \leq 2 \quad \text{при } |y| \geq 1.$$

Итак, окончательно имеем (пользуясь финитностью φ)

$$A \leq C(a^{-n/p} \|\varphi\|_{L_p(Q)} + a^{\nu-n/p} |\varphi, L_{p,\nu}|). \quad (25)$$

Если $\alpha p \geq n$, то выберем a из условия $Ca^{\nu-n/p} < 1$, если же $\alpha p < n$ — то опять из условия $Ca^{\nu-n/p} < 1$ (это наверняка возможно в первом случае при $a < 1$, во втором — при $a > 1$). После этого неравенства (24) и (25) в совокупности порождают оценку (22). Теорема доказана (утверждение в скобках следует из оценок интегралов типа потенциала).

Теперь мы в состоянии доказать общую теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть $r > 0$, $1 < p < \infty$, $u \in \dot{L}_p^r$. Тогда справедлива оценка

$$\int_{R^n} \frac{|u(x)|^p dx}{(1+|x|^2)^{\rho p/2}} \leq c \left(\int_Q |u(x)|^p dx + |u, l_p^r|^p \right), \quad (26)$$

где $\rho = r$ при $r - n/p \neq 0, 1, \dots, r$. В исключенных случаях можно брать $\rho = r + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$.

З а м е ч а н и е 4. Для целых r теорема известна и даже в более сильной форме при целом $r - n/p \geq 0$: гарантируется оценка

$$|u, L_{p,r,1}| \leq c |u, \dot{\mathcal{L}}_p^r|, \quad \dot{\mathcal{L}}_p^r = \dot{W}_p^r$$

(см. теорему III). Неравенство (26) (с учетом соотношений между \dot{L}_p^r и $\dot{\mathcal{L}}_p^r$ записывается коротко в виде

$$\dot{\mathcal{L}}_p^r \subset L_{p,\rho}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть r — нецелое: $r = [r] + \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Как следует из доказанной выше теоремы 1, для $u \in C_0^\infty$ и $|k| = k_1 + \dots + k_n = [r]$ справедлива оценка

$$\int_{R^n} \frac{|D^k u^r(x)|^p dx}{(1+|x|^2)^{\nu p/2}} \leq c \left(\int_Q |D^k u|^p dx + \|S_\alpha(D^k u)\|_p^p \right). \quad (27)$$

Из теории лиувиллевских пространств известно [3, 10], что в шаре Q L_p -нормы промежуточных производных u оцениваются через норму u в самом пространстве. Следовательно, норма $\|D^k u\|_{L_p(Q)}$ мажорируется величиной

$$\|u\|_{L_p(Q)} + \sum_{|s|=[r]} \|S_\alpha(D^s u)\|_p.$$

С учетом этого обстоятельства оценка (27) переписывается в виде

$$\int_{R^n} \frac{|D^k u(x)|^p dx}{(1+|x|^2)^{\nu p/2}} \leq c \left(\|u\|_{L_p(Q)}^p + \sum_{|s|=[r]} \|S_\alpha(D^s u)\|_p^p \right).$$

Сказанное означает наличие вложения

$$\dot{\mathcal{L}}_p^r \subset \dot{w}_{p,\nu}^{[r]}, \quad (28)$$

где через $\dot{w}_{p,\nu}^{[r]}$ обозначено весовое пространство Соболева функций f

с конечной полунормой

$$|f, w_{p,\gamma}^{[r]}| = \sum_{|s|=[r]} \|D^s f, L_{p,\gamma}\|,$$

а $\overset{\circ}{w}_{p,\gamma}^r$ — замыкание C_0^∞ по этой норме.

Пусть $r - n/p \neq 0, 1, \dots, r$. Тогда (поскольку r нецелое) число $\alpha - n/p$ — нецелое и можно положить $\gamma = \alpha$. По теореме вложения (см. книгу [2, с. 215])

$$\overset{\circ}{w}_{p,\alpha}^{[r]} \subset L_{p,[r]+\alpha}. \quad (29)$$

Соотношения (28) и (29) в совокупности дают

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_p^r \subset L_{p,r}.$$

Если $r - n/p$ совпадает с одним из чисел $0, 1, \dots, r$, то из равенства

$$r - n/p = [r] + (\alpha - n/p)$$

следует, что $\alpha - n/p$ целое неположительное число. В этом случае имеет место вложение (см. [2, с. 215])

$$\overset{\circ}{w}_{p,\alpha}^{[r]} \subset L_{p,r,1}.$$

Кроме того, при $\alpha - n/p$ следует взять в (28) $\gamma = \alpha + \varepsilon$. В конечном итоге можно утверждать вложение

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_p^r \subset L_{p,r+\varepsilon} \text{ при любом } \varepsilon > 0.$$

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 4. На последнем шаге получено несколько больше, чем утверждалось: «при $r - n/p = 0, 1, \dots, ([r] - 1)$ имеет место вложение $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_p^r \subset L_{p,r,1}$ ». Видимо, это вложение верно и при $r - n/p = [r]$.

§ 3. СОВОКУПНОСТЬ РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ КАК ПОДПРОСТРАНСТВО l_p^r

Вложение $\overset{\circ}{l}_p^r \subset l_p^r$ очевидно; при этом, как уже говорилось, $l_p^r = \overset{\circ}{l}_p^r$ при целом r , $n \leq p$. Мы увидим в § 4, что и при нецелом r , $n \leq p$, имеет место «полное исчерпание» (т. е. совпадение пространств l_p^r и $\overset{\circ}{l}_p^r$). Оказывается, что при остальных значениях r $\overset{\circ}{l}_p^r$ «исчерпывает» l_p^r с точностью до конечномерного пространства (состоящего из полиномов). Чтобы установить эти факты, мы выведем в этом параграфе характеристическое свойство $\overset{\circ}{l}_p^r$ как подпространства l_p^r (теорема 4). Вспомогательные теоремы 3 и 3' имеют отношение к результатам, принадлежащим Л. Д. Кудрявцеву [9]: в них устанавливается p -суммируемость промежуточных производных с соответствующим весом¹⁾.

Т е о р е м а 3. Пусть $r > 0$ — целое число $s = (s_1, \dots, s_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, $0 < |s| < r$. Если $f \in w_p^r \cap L_{p,r}$, $1 < p < \infty$, $r - n/p \neq 0, 1, \dots, [r]$, то $D^s f \in L_{p,r-s}$ и справедлива оценка

$$|D^s f; L_{p,r-s}| \leq C (\|f\|_{L_{p,r}} + |f, w_p^r|). \quad (30)$$

¹⁾ Отметим, что в работе [9] была продемонстрирована целесообразность использования нормы (9), не накладывающей излишних ограничений на рассматриваемые функции.

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением (VI.5.43) книги [2] (считая $\eta = |x|$, ср. (VI.9.10)), верным для $f \in w_p^r$:

$$\varphi(x) = \sum_{|\beta| < r} \frac{x^\beta}{|x|^{n+|\beta|}} \int_{R^n} \mathcal{L}_\beta \left(\frac{y}{|x|} \right) \varphi(y) dy + \sum_{|\alpha|=r} \int_{R^n} K_\alpha(x, x-y) D^\alpha \varphi(y) dy, \quad (31)$$

где $\mathcal{L}_\beta(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции с носителем в единичном шаре, а ядра K_α имеют вид (см. [2, с. 272])

$$K_\alpha(x, x-y) = C_\alpha (x-y)^\alpha \int_1^\infty v(x - \tau(x-y)) \tau^{n-1} d\tau. \quad (32)$$

Здесь $v(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в шаре $|z| \leq |x|$, $\int_1^\infty v(z) dz = 1$, которая получается из стандартного усредняющего ядра по формуле (35). При фиксированном x носитель ядра $K_\alpha(x, x-y)$ содержится в шаре $|y| \leq |x|$. В самом деле, при $|y| > |x|$ и $1 < \tau < \infty$ имеем

$$|x - \tau(x-y)| \geq \tau|y| - (\tau-1)|x| \geq \tau|x| - (\tau-1)|x| = |x|$$

и, следовательно, подынтегральная функция в (32) равна нулю тождественно. Из сказанного заключаем, что интегрирование в (31) фактически проводится не по R^n , а по шару $|y| < |x|$. Дифференцируя соотношение (31), получаем выражение $D^s \varphi$ в виде

$$D^s \varphi = \sum_{|\beta| < r} \int_{|y| < |x|} D^s \left\{ \frac{x^\beta}{|x|^{n+|\beta|}} \mathcal{L}_\beta \left(\frac{y}{|x|} \right) \right\} \varphi(y) dy + \sum_{|\alpha|=r} \int_{|y| < |x|} D_x^s [K_\alpha(x, x-y)] D^\alpha \varphi(y) dy. \quad (33)$$

При каждом дифференцировании полярность ядер в первой сумме возрастает на единицу и, следовательно,

$$\left| D^s \left[\frac{x^\beta}{|x|^{n+|\beta|}} \mathcal{L}_\beta \left(\frac{y}{|x|} \right) \right] \right| \leq C_\beta \frac{1}{|x|^{n+|\beta|}}. \quad (34)$$

Займемся оценкой ядра $D^s K_\alpha$:

$$\begin{aligned} D_x^s [K_\alpha(x, x-y)] &= C_{\alpha,s} (x-y)^{\alpha-s} \int_1^\infty v(x - \tau(x-y)) \tau^{n-1} d\tau + \\ &+ C_\alpha (x-y)^\alpha \int_1^\infty (D^s v)(x - \tau(x-y)) (1-\tau)^s \tau^{n-1} d\tau = \\ &= C_{\alpha,s} \frac{(x-y)^{\alpha-s}}{|x-y|^{n-s}} \int_{|x-y|}^\infty v\left(x - t \frac{(x-y)}{|x-y|}\right) t^{n-1} dt + \\ &+ C_\alpha \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^{n+|s|}} \int_{|x-y|}^\infty (D^s v)\left(x - t \frac{x-y}{|x-y|}\right) (|x-t| - t)^{|s|} t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Интеграл J_1 в первом слагаемом полученного выражения ограничен. Функция v берется в виде

$$v(z) = \kappa_0 |x|^{-n\omega} \left(\frac{z}{|x|} \right), \quad (35)$$

где κ_0 — нормировочная постоянная, выбранная из условия $\int v(x) dx =$

$= 1$, а ω_1 — фиксированная функция из C_0^∞ с носителем в единичном шаре. Следовательно,

$$|v(z)| \leq C/|x|^n.$$

Поэтому

$$|J_1| \leq \frac{C}{|x|^n} \int_0^{2|x|} t^{n-1} dt \leq C_1.$$

Аналогично оценивается интеграл J_2 (во втором слагаемом)

$$|D^s v(z)| = \kappa_0 |x|^{-n} |D^s \omega| \frac{1}{|x|^{|s|}} \leq \frac{C_2}{|x|^{n+|s|}},$$

$$|J_2| \leq \frac{C_2}{|x|^{n+|s|}} \int_{|x-y|}^{2|x|} (t - |x-y|)^{|s|} t^{n-1} dt \frac{C_2}{|x|^{n+|s|}} \int_0^{2|x|} t^{n+|s|-1} dt = C_3.$$

Окончательно получим

$$|D_x^s [K_\alpha(x, x-y)]| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+|s|-\alpha}}. \quad (36)$$

Домножая равенство (33) на $(1 + |x|^2)^{|s|/2}$ и беря $L_p(R^n)$ -норму от обеих частей, с учетом оценок (34), (36) придем к неравенству ($|s| = k$, $|\alpha| = r$)

$$\int_{R^n} \frac{|D^s f(x)|^p dx}{(1 + |x|^2)^{(r-k)p/2}} \leq \int_{R^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{(r-k)p/2} |x|^{(n+k)p}} \left(\int_{|y| < |x|} |\varphi(y)| dy \right)^p +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=r} \int_{R^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{(r-k)p/2}} \left(\int_{|y| < |x|} \frac{|D^\alpha \varphi(y)| dy}{|x-y|^{n+k-r}} \right)^p = A_1 + \sum_\alpha A_\alpha.$$

Оценка слагаемых A_α идет по типу оценки интеграла типа потенциала. Ограничения на параметры несколько ослабляются за счет того, что во внутреннем интеграле область интегрирования отлична от R^n . Выкладки приводят (см. оценки $U_1 f$ и $U_3 f$ в работе [7]) к неравенству

$$A_\alpha \leq C \|D^\alpha \varphi\|_p.$$

Пусть сначала $rp \leq n$. Для оценки слагаемого A применим неравенство Сыроевой — Таленти (21)

$$A = C \int_0^\infty \frac{r_1^p}{(1 + r_1^2)^{(r-k)p/2} r_1^{(n+k)p}} \left| \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} \rho^{n-1} d\rho \int_S \varphi(\rho, \sigma) d\sigma \right|^p r_1^{n-1} dr_1 \leq$$

$$\leq C_1 \int_0^\infty \left| \rho^{n-1} \int_S \varphi(\rho, \sigma) d\sigma \right|^p \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1 + \rho^2)^{(r-k)p/2} \rho^{(n+k-1)p}} \leq$$

$$\leq C_2 \int_{R^n} \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(1 + |y|^2)^{(r-k)p/2} |y|^{kp}} \leq C_2 \int_Q \frac{|\varphi(y)|^p dy}{|y|^{kp}} +$$

$$+ C_2 \int_{|y| > 1} \frac{|\varphi(y)|^p}{(1 + |y|^2)^{rp/2}} \frac{(1 + |y|^2)^{kp/2}}{|y|^{kp}} dy \leq d_1 \int_Q \frac{|\varphi(y)|^p dy}{|y|^{kp}} +$$

$$+ d_2 \int_{R^n} \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(1 + |y|^2)^{rp/2}}. \quad (37)$$

Напишем очевидную оценку

$$\int_Q \frac{|\varphi(y)|^p dy}{|y|^{kp}} \leq C \int_Q \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(1+|y|^2)^{\frac{(r-k)p}{2}} |y|^{kp}} \leq C \overbrace{\int_{R^n} \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(1+|y|^2)^{\frac{(r-k)p}{2}} |y|^{kp}}}^B. \quad (38)$$

Интеграл B допускает оценку (при $rp \leq n$)

$$B \leq C^* a^{kp-n} \int_Q \frac{|\varphi(y)|^p}{|y|^{kp}} dy + C_1 \|\varphi\|_{L_{p,r}}^2 + C_2 \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha \varphi\|_p \quad (39)$$

с произвольным параметром $a > 1$ (причем C^* — не зависит от a). Выбрав a достаточно большим, на основании неравенств (37), (38), (39) приходим к оценке

$$A \leq C \left(\|\varphi\|_{L_{p,r}}^2 + \sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha \varphi\|_p \right),$$

и доказательство теоремы в рассматриваемом случае завершено (коль скоро неравенство (39) доказано).

Для доказательства (39) воспользуемся вместо (31) следующим представлением ($a > 1$):

$$\varphi(x) = \sum_{|\beta| < r} \frac{(ax)^\beta}{|ax|^{n+|\beta|}} \int_{R^n} \mathcal{L}_\beta \left(\frac{y}{|a|x} \right) \varphi(y) dy + \sum_{|\alpha|=r} \int_{R^n} K_\alpha(x, x-y) D^\alpha \varphi(y) dy, \quad (40)$$

где K_α определяется опять формулой (32), но с функцией $v(z) \in C_0^\infty$ с носителем в шаре $|z| < a|x|$. Легко видеть, что при фиксированном x носитель ядра $K_\alpha(x, x-y)$ содержится в шаре $|y| < a|x|$ ($|y| \geq a|x| \Rightarrow |x - \tau(x-y)| \geq \tau|y| - (\tau-1)|x| \geq \tau a|x| - (\tau-1)|x|$). По этому фактическое интегрирование в (40) происходит по шару $|y| \geq a|x|$. Оценка ядра $K_\alpha(x, x-y)$ сохраняет прежний вид (36):

$$|K_\alpha(x, x-y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-|\alpha|}}.$$

С учетом сказанного можем написать

$$B \leq \int_{R^n} \frac{dy}{(1+|y|^2)^{(r-k)p/2} |y|^{kp}} \frac{1}{|ay|^{np}} \left\{ \int_{|z| < a|y|} |\varphi(z)| dz \right\}^p + \sum_{|\alpha|=r} \int_{R^n} \frac{dy}{(1+|y|^2)^{(r-k)p/2} |y|^{kp}} \left(\int_{|z| < a|x|} \frac{|D^\alpha \varphi(z)| dz}{|y-z|^{n-r}} \right)^p = A' + \sum A'_\alpha.$$

Оценка слагаемых под знаком суммы происходит, как и выше. Оценка первого слагаемого A' несколько меняется. По неравенству (21) получим

$$\begin{aligned} A' &\leq c^* a^{pr-n} \int_{R^n} \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(a^2 + |y|^2)^{(r-k)p/2} |y|^{kp}} = c^* a^{pr-n} \int_Q \frac{|y|^{-kp} |\varphi(y)|^p dy}{(a^2 + |y|^2)^{(r-k)p/2}} + \\ &+ c^* a^{pr-n} \int_{|y| \geq 1} \frac{|\varphi(y)|^p (1+|y|^2)^{pr/2} dy}{(1+|y|^2)^{pr/2} (a^2 + |y|^2)^{\frac{(r-k)p}{2}} |y|^{kp}} \leq c^* a^{kp-n} \int_Q \frac{|\varphi(y)|^p}{|y|^{kp}} dy + \\ &+ 2^{pr/2} c^* a^{pr-n} \int_{R^n} \frac{|\varphi(y)|^p dy}{(1+|y|^2)^{pr/2}}. \end{aligned}$$

Оценку (39) можно считать установленной.

Дальнейшее доказательство (при $pr > n$) наметим лишь схематически. Для простоты ограничимся случаем $0 < r - n/p \leq 1$. Представление (31) несколько модифицируем, пользуясь непрерывностью φ (устойчивой по отношению к норме):

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{|\beta| < r} \frac{x^\beta}{|x|^{n+|\beta|}} \int_{R^n} \mathcal{L}_\beta \left(\frac{y}{|x|} \right) [\varphi(y) - \varphi(0)] dy + \\ + \sum_{|\alpha|=r} \int_{R^n} K_\alpha(x, x-y) D^\alpha \varphi(y) dy.$$

Действуя как и выше, получим те же оценки, но с заменой $\varphi(y)$ на $\varphi(y) - \varphi(0)$. Вместо (37) будем иметь

$$\int_{R^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(r-k)p/2} |x|^{(n+k)p}} \left(\int_{|y| < |x|} |\varphi(y) - \varphi(0)| dy \right)^p \leq \\ \leq d_1 \int_Q \frac{|\varphi(y) - \varphi(0)|^p}{|y|^{kp}} dy + d_2 \int_{R^n} \frac{|\varphi(y) - \varphi(0)|^p}{(1+|y|^2)^{pr/2}} dy.$$

Второе слагаемое мажорируется величиной $(\|\varphi\|_{L_{p,r}} + |\varphi(0)|) \leq c(\|\varphi\|_{L_{p,r}} + \|\varphi\|_{L_{p(Q)}} + |\varphi, w_p^r|)$. Первое слагаемое оценивается с помощью введения параметра a (как это делалось выше).

В общем случае $0 < k - 1 < r - n/p \leq k$, $k \leq r$, следует вычитать из $\varphi(y)$ многочлен

$$\sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{(D^\alpha \varphi)(0)}{|\alpha|!} x^\alpha$$

и рассуждать аналогично вышеизложенному.

Теорема доказана.

Теорема 3 обобщается на случай нецелых r .

Т е о р е м а 3'. Пусть $r > 0$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ — вектор с целочисленными компонентами, $0 < |s| < r$. Если $f \in w_p^r \cap L_{p,r}$, $1 < p < \infty$, $r - n/p \neq 0, 1, \dots, [r]$, то $D^s f \in L_{p, r-|s|}$ и справедлива оценка (30).

Для доказательства при нецелых r следует использовать интегральные представления функции f через разности от старших производных, подобные тем, которые получены в работе [10]. Остальные рассуждения и выкладки вполне аналогичны вышеприведенным.

На основе теорем 3 и 3' устанавливается следующее важное предложение.

Т е о р е м а 4. Для того чтобы функция f из l_p^r принадлежала пространству $\dot{l}_{p,r}^r$, достаточно, а при $r - n/p \neq 0, 1, \dots, [r]$ и необходимо, чтобы $f \in L_{p,r}$.

Докажем теорему сначала для целых r . Необходимость следует из теоремы III (из которой вытекает необходимое условие и для исключенных значений r). Для доказательства достаточности следует убедиться, что функция $f \in w_p^r \cap L_{p,r}$ приближается C_0^∞ — функциями по норме $|f, W_p^r|$. Поскольку бесконечно дифференцируемые функции плотны в W_p^r (см., например, [2]) можно считать $f \in C^\infty(R^n)$. Домножим функцию f на срезающую функцию

$$\eta_h(x) = \eta(x/h),$$

где

$$\eta(x) \in C_0^\infty, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

и докажем

$$|f - f_h, w_p^r| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Имеем

$$f(x) - f_h(x) = \left[1 - \eta\left(\frac{x}{h}\right)\right] f(x) = \psi\left(\frac{x}{h}\right) f(x) = \psi_h(x) f(x)$$

$$|D^\alpha [f(x) - f_h(x)], L_p| \ll |\psi_h(x) D^\alpha f, L_p| + \sum_{k \leq \alpha} |D^{\alpha-k} f D^k \psi_h, L_p|.$$

Производная $D^k \psi_h$ имеет носитель в кольце $h < |x| < 2h$ и подчиняется оценке

$$|D^k \psi_h| = \left| (D^k \psi)\left(\frac{x}{h}\right) \right| \frac{1}{h^{|k|}} \ll \frac{C}{h^{|k|}}.$$

Поэтому

$$|D^{\alpha-k} f D^k \psi_h, L_p|^p \ll \frac{C}{h^{kp}} \int_{h < |x| < 2h} |D^{\alpha-k} f(x)|^p dx \ll C_1 \int_{|x| > h} \frac{|D^{\alpha-k} f|^p dx}{(1+x^2)^{kp/2}}.$$

По теореме 3 $D^{\alpha-k} f \in L_{p,k}$ и полученный интеграл стремится к нулю при $h \rightarrow \infty$. Соотношение (41) доказано.

Пусть теперь $0 < r < 1$, $pr \neq n$. Если $f \in \dot{L}_p^r$, то с необходимостью $f \in L_{p,r}$ (см. теорему 1). Пусть, наоборот, $f \in \dot{L}_p^r \cap L_{p,r}$, докажем, что $f \in \dot{L}_p^r$. Для этого следует убедиться, что

$$|f - \eta_h f, l_p^r| = |\psi_h f, l_p^r| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow \infty \quad (42)$$

Имеем (полагая $\beta = 2n + 2r + 1$)

$$S_r(\psi_h f) = \left\{ \int_0^\infty \left(\int_{|x-y|<t} |\psi_h(x)f(x) - \psi_h(y)f(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^\beta} \right\}^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left\{ \int_0^\infty \left(\int_{|x-y|<t} |\psi_h(x) - \psi_h(y)| |f(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^\beta} \right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left\{ \int_0^\infty \left(\int_{|x-y|<t} |f(x) - f(y)| |\psi_h(x)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^\beta} \right\}^{\frac{1}{2}} = J_1 + J_2. \quad (43)$$

Второе слагаемое J_2 равно $|\psi_h(x)| S_r(f)$ и легко оценивается. Займемся оценкой слагаемого J_1 . Запишем его в виде

$$J_1^2(z) = \frac{1}{h^{2r}} \int_0^\infty \left(\int_{|z-u|<\tau} |\psi(z) - \psi(u)| |f(hu)| du \right)^2 \frac{d\tau}{\tau^\beta} =$$

$$= \frac{1}{h^{2r}} \int_0^\infty \left(\int_{|z-u|<\tau} \left[\int_z^u |\text{grad } \psi(\xi)| d\xi \right] |f(hu)| du \right)^2 \frac{d\tau}{\tau^\beta},$$

где $z = x/h$ и \int_z^u обозначает интеграл по линии, соединяющей точки z и u .

Поскольку носитель $\text{grad } \psi(u)$ содержится в шаровом слое $1 < |u| < 2$, то

при больших z ($|z| > 2$) целесообразно записать $J_1^2(z)$ в виде трех слагаемых:

$$J_1^2(z) = \frac{1}{h^{2r}} \int_0^{|z|-2} \dots + \frac{1}{h^{2r}} \int_{|z|-2}^{|z|+2} \dots + \frac{1}{h^{2r}} \int_{|z|+2}^{\infty} \dots = A_1 + A_2 + A_3.$$

Первое из них исчезает, так как шары $|z - u| < \tau$ и $|u| < 2$ не пересекаются (подынтегральная функция обращается в нуль тождественно). A_3 допускает оценку

$$\begin{aligned} A_3 &\leq C \left(\sup_{\xi} |\operatorname{grad} \psi(\xi)| \right)^2 \frac{1}{h^{2r}} \int_{|z|+2}^{\infty} \left(\int_{1 < u < 2} |f(hu)| du \right)^2 \frac{d\tau}{\tau^{\beta}} \leq \\ &\leq \frac{C}{h^{2n+2r}} \left(\int_{h < |v| < 2h} |f(v)| dv \right)^2 \frac{1}{(|z|+1)^{2n+2r}} \leq \\ &\leq \frac{C}{h^{2n+2r}} \int_{h < |v| < 2h} \frac{|f(v)|^p dv}{(1+v^2)^{\frac{pr}{2}}} \left(\int_{|v| < 2h} (1+v^2)^{\frac{rp'}{2}} dv \right)^{\frac{2}{p'}} \frac{1}{(|z|+1)^{2n+2r}}. \end{aligned}$$

При $h > 1$ можно написать

$$\int_{|v| < 2h} (1+v^2)^{\frac{rp'}{2}} dv \leq \int_{|v| < 2h} (h^2+v^2)^{\frac{rp'}{2}} dv = Ch^{n+p'r}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$A_3^{p/2} \leq \frac{C}{h^n} \int_{|h| < |v|} \frac{|f(v)|^p dv}{(1+v^2)^{pr/2}} \frac{1}{(|z|+1)^{(n+2)p}}.$$

Аналогично оценивается слагаемое A_2 . При малых z получаем ту же оценку и для $J_1^p(z)$ (достаточно убедиться в этом при $z = 0$). Собирая оценки воедино, получим

$$\int_{R^n} J_1^p(z) dz = h^n \int_{R^n} J_1^p(z) dz \leq C \int_{h < |v| < 2h} \frac{f(v)^p dv}{(1+v^2)^{pr/2}}.$$

Беря L_p -норму от обеих частей неравенства (43) и устремляя h к ∞ , приходим к (42).

В общем случае (нецелого $r > 1$) рассуждения проходят аналогично. Теорема 4 доказана.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ЛИУВИЛЛЕВСКИХ КЛАССОВ $l_p^r = \dot{l}_p^r + \mathcal{P}$

Получим дробный аналог «теоремы о выходе на постоянную» в рамках лиувиллевских классов l_p^r . Начнем с невесового варианта этой теоремы, который установим в виде леммы.

Л е м м а 2. Пусть $f \in l_p^r$, $0 < r < 1$, $1 < p < \infty$, $pr < n$. Тогда существует постоянная A такая, что

$$\left\{ \int_{R^n} |f(x) - A|^{p_r} dx \right\}^{\frac{1}{p_r}} \leq C |f, l_p^r|, \quad (44)$$

где C не зависит от f и $\alpha = n/p = -n/p_r$.

З а м е ч а н и е. На самом деле мы докажем несколько больше, именно, что при

$$A = \lim_{|x| \rightarrow \infty} q |x|^{-n} \int_{|y| < |x|} f(y) dy. \quad (45)$$

и любом $x \in R^n$ справедлива оценка

$$|f(x) - A| \leq C_1 |f|, \quad l_p^r |f|^{pr/n} [(S_r f)(x)]^{1-pr/n} \quad (46)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Обозначим для краткости $(S_r f)(x) = S(x)$. На первом шаге докажем неравенство

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq C |x - \bar{x}|^r [S(x) - S(\bar{x})]. \quad (47)$$

Напишем очевидное неравенство ($|Q| = q^{-1}$ — объем единичного шара в R^n)

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq \frac{2^n q}{|x - \bar{x}|^n} \int_D |f(x) - f(y)| dy + \frac{2^n q}{|x - \bar{x}|^n} \int_D |f(\bar{x}) - f(y)| dy,$$

где D — шар с центром в $(x + \bar{x})/2$ и радиусом $|x - \bar{x}|/2$.

Заменим интегрирование по D в первом интеграле интегрированием по шару $|x - y| < t$, а во втором — по шару $|\bar{x} - y| < t$, где $t \geq |\bar{x} - x|$; неравенство только усилится. Интегрируя его по dt/t , получим

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\bar{x})| \leq & \frac{2^n q}{|x - \bar{x}|^n} \int_{|x - \bar{x}|}^{e|x - \bar{x}|} \frac{dt}{t} \int_{|x - y| < t} |f(x) - f(y)| dy + \\ & + \frac{2^n q}{|x - \bar{x}|^n} \int_{|x - \bar{x}|}^{e|x - \bar{x}|} \frac{dt}{t} \int_{|\bar{x} - y| < t} |f(\bar{x}) - f(y)| dy \leq \end{aligned}$$

(применяя неравенство Шварца)

$$\leq \frac{2^n q}{|x - \bar{x}|^n} \left(\int_{|x - \bar{x}|}^{e|x - \bar{x}|} \left(\int_{|x - y| < t} |f(x) - f(y)| dy \right)^2 \frac{dt}{t^{2n+2r-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x - \bar{x}|}^{e|x - \bar{x}|} t^{2n+2r-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

После очевидных преобразований приходим к неравенству (47).

2. Из оценки (47) вытекает

С л е д с т в и е 1. Пусть $p > 0$, $\alpha r + \beta/p < 0$ и $\{y_k\}_1^\infty$ — последовательность точек в R^n со свойствами

$$|y_k - x| < \delta 2^{k\alpha}, \quad S^p(y_k) \leq \gamma 2^{k\beta}.$$

Тогда существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = A(x) \equiv A$, и если в добавок к сказанному $S^p(x) \leq \gamma$, то справедлива оценка

$$|f(x) - A| < C \delta^r \gamma^{1/p}, \quad (48)$$

где C не зависит от f .

В самом деле, при сделанных предположениях из (47) вытекает

$$|f(y_{k+1}) - f(y_k)| \leq C \delta^r \gamma^{1/p} 2^{k(\alpha r + \beta/p)}$$

и в силу условия $\alpha r + \beta/p < 0$ последовательность $\{f(y_k)\}$ оказывается фундаментальной.

Если $S^p(x) \leq \gamma$, положим $x = y_0$ и напомним

$$|f(y_0) - f(y_k)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |f(y_i) - f(y_{i+1})| \leq C\delta^r \gamma^{1/p} \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i(\alpha r + \beta/p)}.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим (48).

3. Пусть теперь $x \in R^n$ таково, что $0 < S(x) < \infty$. Рассмотрим последовательность шаров B_k с центром в точке x и радиуса 2^k ($k = 1, 2, \dots$)

$$\delta = |f, l_p^r|^{p/n} |Q|^{1/n} S^{-p/n}(x). \quad (49)$$

В каждом из этих шаров найдется точка y_k , для которой

$$S^p(y_k) |B_k| \leq \|S(x)\|_{L_p(B_k)}^p \leq |f, l_p^r|^p. \quad (50)$$

Следовательно, выполнены условия следствия 1 при δ , задаваемом формулой (49), $\gamma = S^p(x)$, $\alpha = 1$, $\beta = -n$ (ибо (50) переписывается в виде $S^p(y_k) \leq S^p(x)2^{-nk}$), причем $\alpha r + \beta/p = r - n/p < 0$. На основании (48) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = A \equiv A(x)^1, \\ |f(x) - A| \leq C\delta^r \gamma^{1/p} = C_1 |f, l_p^r|^{pr/n} S^{1-pr/n}. \quad (51)$$

Неравенство (51) совпадает с (46). Возводя его в степень и интегрируя по R^n , приходим к (44).

4. Осталось доказать соотношение (45). Из оценки

$$\left| A - \frac{q}{|x|^n} \int_{|y| < |x|} f(y) dy \right| = \left| \frac{q}{|x|^n} \int_{|y| < |x|} [A - f(y)] dy \right| \leq \\ \leq \frac{q}{|x|^n} \left(\int_{|y| < |x|} |A - f(y)|^{pr} dx \right)^{\frac{1}{pr}} \left(\int_{|y| < |x|} dy \right)^{\frac{1}{pr}}$$

и неравенства (44) очевидно следует (45).

Лемма 2 доказана.

Большой интерес в контексте статьи представляет нижеследующая теорема, первая часть которой легко вытекает из подготовительной леммы 1 (§ 2).

Теорема 5. Пусть $f \in l_p^r$, $0 < r < 1$, $1 < p < \infty$. Если $pr < n$ и число A определяется формулой (45), то

$$\int_{R^n} \frac{|f(x) - A|^p dx}{(1 + |x|^2)^{pr/2}} \leq C |f, l_p^r|^p. \quad (52)$$

При $pr > n$ справедливо неравенство

$$|f, L_{p,r}| < C (\|f\|_{L_p(Q)} + |f, l_p^r|^p). \quad (53)$$

Доказательство. 1. Начнем со случая $pr < n$. Пусть, как и в § 2, $f^a(x)$ — усреднение функции $f(y)$ по шару $|y| < a|x|$. Тогда

$$\|f - A\|_{L_{p,r}} \leq \|f - f^a\|_{L_{p,r}} + \|f^a - A\|_{L_{p,r}}. \quad (54)$$

¹ Легко доказать, что A не зависит от x .

Первое слагаемое справа оценивается по упомянутой лемме 1, второе преобразуется и оценивается ниже

$$\begin{aligned} \|f^a - A\|_{L_{p,r}}^p &= \frac{q}{a^{np}} \int_{R^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{pr/2}} \left| \frac{1}{|x|^n} \int_{|y|<a|x|} [f(y) - A] dy \right|^p = \\ &= q^p s \int_0^\infty \frac{\tilde{r}^{n-1} \tilde{r}^p}{(1+\tilde{r}^2)^{pr/2} \tilde{r}^{np}} \left| \frac{1}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} t^{n-1} \left(\int_S [f(at, \sigma) - A] d\sigma \right) \right|^p d\tilde{r} \leq \end{aligned}$$

(применяется неравенство Сысоевой — Таленти и затем Гёльдера)

$$\begin{aligned} &\leq C \int_0^\infty \frac{\tilde{r}^{n-1} \tilde{r}^p}{(1+\tilde{r}^2)^{pr/2} \tilde{r}^{np}} \tilde{r}^{(n-1)p} \left(\int_S |f(a\tilde{r}, \sigma) - A|^p d\sigma \right) d\tilde{r} = \\ &= C \int_{R^n} \frac{|f(a\tilde{r}, \sigma) - A|^p \tilde{r}^{n-1} d\tilde{r} d\sigma}{(1+\tilde{r}^2)^{pr/2}} = \\ &= Ca^{pr-n} \int_{R^n} \frac{|f(y) - A|^p}{(a^2 + |y|^2)^{pr/2}} dy = \frac{C}{a^n} \int_Q |f(y) - A|^p dy + \\ &+ Ca^{pr-n} \int_{|y|>1} \frac{|f(y) - A|^p (1+|y|^2)^{pr/2}}{(1+|y|^2)^{pr/2} (a^2 + |y|^2)^{pr/2}} dy \leq \end{aligned}$$

(к первому слагаемому применяется неравенство Гёльдера)

$$\leq \frac{C_1}{a^n} \left(\int_Q |f(y) - A|^p dy \right)^{p/p_r} + Ca^{pr-n} \int_{R^n} \frac{|f(y) - A|^p}{(1+|y|^2)^{pr/2}} dy. \quad (55)$$

Первое слагаемое справа оценивается через $|f, l_p^r|$ (по неравенству (44), а второе — малю при достаточно большом a . Учитывая эти обстоятельства, из неравенства (54) получаем (52).

2. Пусть $f \in l_p^r$, $rp > n$. Подобно тому, как это было в § 2, имеем оценку

$$|f(x)| \leq \frac{q}{(a|x|)^n} \int_{|y| \leq a|x|} f(y) dy + C(a) |x|^r (S_r f)(x).$$

Беря от обеих частей $L_{p,r}(R^n \setminus Q_N)$ -норму, напишем неравенство

$$|f, L_{p,r}(R^n \setminus Q_N)| \leq |f^a, L_{p,r}(R^n \setminus Q_N)| + C(a) |f, l_p^r| \quad (56)$$

и оценим первое слагаемое J справа

$$\begin{aligned} J &= \left\{ \int_{|x|<N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{pr/2}} \left| \frac{q}{(a|x|)^n} \int_{|y|<a|x|} f(y) dy \right|^p \right\}^{1/p} = \\ &= \frac{q|S|}{a^n} \left\{ \int_0^N \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1+\rho^2)^{pr/2}} \left| \int_0^a \tau^{n-1} \left(\int_S f(\rho\tau\sigma) d\sigma \right) d\tau \right|^p \right\}^{1/p} \leq \end{aligned}$$

(применяя неравенство Минковского и затем Гёльдера)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C}{a^n} \int_0^a \tau^{n-1} d\tau \left\{ \int_0^N \frac{\rho^{n-1} d\rho}{(1+\rho^2)^{pr/2}} \left(\int_S |f(\rho\tau\sigma)|^p d\sigma \right) \right\}^{1/p} = \\ &= \frac{C}{a^n} \int_0^a \tau^{r+\frac{n}{p'}} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \int_{|x|<Na} \frac{|f(x)|^p dx}{(\tau^2 + |x|^2)^{pr/2}} \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Считая $a < 1$, продолжим оценку J так:

$$J \leq \frac{C}{a^n} \int_0^a \tau^{r + \frac{n}{p}} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \int_{|x| < 1} \frac{|f(x)|^p dx}{(\tau^2 + |x|^2)^{pr/2}} + \int_{1 < |x| < N} \frac{|f(x)|^p dx}{(\tau^2 + |x|^2)^{pr/2}} \right\}^{1/p} \leq \\ \leq \frac{C}{a^n} \int_0^a \tau^{r + \frac{n}{p}} \frac{d\tau}{\tau} \left\{ \tau^{-r} \left(\int_{|x| < 1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{1 < |x| < N} \frac{|f(x)|^p (1 + |x|^2)^{pr/2} dx}{(1 + |x|^2)^{pr/2} (\tau^2 + |x|^2)^{pr/2}} \right)^{1/p} \right\}.$$

Пользуясь тем, что $(1 + |x|^2)^{pr/2} (\tau^2 + |x|^2)^{-pr/2} \leq 2$ при $|x| \geq 1$, получим окончательно

$$J \leq \frac{1}{a^{n/p}} \|f\|_{L_p(Q)} + a^{r - \frac{n}{p}} \left(\int_{|x| < N} \frac{|f(x)|^p dx}{(1 + |x|^2)^{pr/2}} \right)^{1/p}.$$

Из неравенств (56), (57) при достаточно малом a получим

$$|f, L_{p,r}(R^n \setminus Q_N)| \leq C (\|f\|_{L_p(Q)} + |f, l_p^r|).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, приходим к (53).

Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е 5. В нерассмотренном случае ($rp = n$) можно доказать вместо (53) неравенство

$$|f, L_{p,r+\varepsilon}| \leq C (\|f\|_{L_p(Q)} + |f, l_p^r|).$$

Следует при этом опираться на неравенство Сысоевой — Таленти для конечного промежутка $(0, N)$. Видимо, справедлива и более точная оценка

$$|f, L_{p,r,1}| \leq C (\|f\|_{L_p(Q)} + |f, l_p^r|).$$

Нижеследующая теорема объединяет утверждения, которые мы именовали во введении и других местах «теоремой о выходе на полином ($r - n/p < 0$)», «теоремой о выходе на остаточный полином (промежуточный случай: $0 \leq r - n/p < [r]$)», «теоремой о полном исчерпании» (т. е. о совпадении l_p^r и l_p^r при $r - n/p \geq [r]$). К сожалению, нам приходится делать оговорку, исключаящую из рассмотрения некоторое критическое значение индекса дифференцирования.

Т е о р е м а 6. Пусть $f \in l_p^r$, $r > 0$, $1 < p < \infty$. Тогда существует единственный полином вида

$$p(x) = \sum_{k < |\alpha| \leq [r]} C_\alpha x^\alpha, \quad k = \left[r - \frac{n}{p} \right] \quad (58)$$

такой, что

$$f(x) = u(x) + p(x),$$

где $u(x) \in l_p^r$ (при этом нецелое значение r , для которого $(r - [r])p = n$ не рассматривается). Другими словами, имеет место разложение в прямую сумму

$$l_p^r = \dot{l}_p^r + \mathcal{P},$$

где через \mathcal{P} обозначена совокупность полиномов вида (58).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При целом r теорема верна (см. § 1). Пусть r нецелое, $r = r + \alpha$, $0 < \alpha < 1$; в силу сделанной оговорки $\alpha p \neq n$.

Если $\alpha p < n$, то по теореме 5 из $f \in l_p^r$ следует: $D^s f \in L_{p,\alpha}$, $|s| = [r]$. Следовательно, f принадлежит весовому пространству Соболева $w_{p,\alpha}^r$ при $-\alpha + n/p < 0$. Используя соответствующую теорему вложения ([2, с. 215]),

получим $f \in L_{p,r}$. Согласно теореме 4 это означает, что $f \in l_p^r$. Таким образом, $l_p^r \subset \dot{l}_p^r$, т. е.

$$l_p^r = \dot{l}_p^r \quad (\alpha p > n)$$

и теорема при $r - n/p > [r]$ доказана.

Пусть теперь $\alpha p < n$. По теореме 5 получим

$$D^s f - A_s \in L_{p,\alpha}, \quad |s| = [r].$$

Таким образом, функция $f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s$ является элементом $w_{p,\alpha}^r$. Если $0 < -\alpha + n/p \leq 1$ (т. е. $[r] - 1 < r - n/p \leq [r]$), то отсюда вытекает (см. [2]), что $(f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s) \in L_{pr}$. Учтем еще, что $(f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s) \in l_p^r$ (это очевидно). Тогда из теоремы 4 заключаем

$$u = f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s \in \dot{l}_p^r,$$

и, таким образом, теорема доказана при $[r] - 1 < r - n/p \leq [r]$.

Дальнейшее рассуждение следует той же схеме. Воспроизведем еще один шаг. Пусть $[r] - 2 < r - n/p \leq [r] - 1$ (т. е. $1 \leq -\alpha + n/p < 2$). Из $f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s \in w_{p,\alpha}^r$ на этот раз (по теореме IV о разложении, с. 215 книги [2]) следует

$$f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s = v(x) + \sum_{|s|=[r]-1} A_s x^s, \quad v \in \dot{w}_{p,\alpha}^{[r]}.$$

Функция $v(x)$ принадлежит l_p^r (это очевидно) и, кроме того, $v \in L_{p,r}$ (ибо по теореме 5 имеем

$$D^k [f - \sum_{|s|=[r]} A_s x^s] - A_k \in L_{p,1+\alpha}, \quad |k| = [r] - 1).$$

Остается сослаться на теорему 4.

Теорема 6 доказана.

§ 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вдобавок к вопросу, возникшему в связи с замечаниями 4 и 5, перечислим некоторые вопросы, решение которых представляет, на наш взгляд, интерес.

Естественно, возникает задача о распространении изложенной теории на случай весовых лиувиллевских классов $l_{p,\gamma}^r$. Например, теорему 3 об оценке промежуточных производных можно было бы сформулировать в терминах весовых соболевских классов [2] таким образом:

$$w_p^r \cap L_{p,r} \subset w_{p,r-|s|}^{|s|}, \quad 0 \leq |s| \leq r.$$

Переход к рассмотрению лиувиллевских производных нецелого индекса s приводит здесь к появлению весовых классов $l_{p,r-|s|}^{|s|}$. Определение классов $l_{p,\gamma}^r$ через лиувиллевские производные высказывается очевидным образом (по аналогии с целым случаем). Труднее получить для них нормировку по типу Стрихартца. По-видимому, полезно будет обращение к теории комплексной интерполяции по Кальдерону — Лионсу. Ориентиром при построении этой обобщенной теории может служить, конечно, теория весовых пространств Соболева $w_{p,\gamma}^l$ [2].

Следует обратить внимание читателя на исследования О. В. Бесова (см. [11, гл. III, § 14]), в которых изучено поведение на ∞ функции из анизотроп-

ных пространств Соболева $w_p^{(l_1, \dots, l_n)}$ (в терминах L_q -метрик) и вопросы плотности C_0^∞ — функций в этих пространствах. Эти исследования желательно перенести на лиувиллевские анизотропные классы $l_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ (с использованием как весовых метрик, так и L_q -метрик).

В большом цикле работ Ю. С. Никольского упомянутые исследования О. В. Бесова были перенесены на случай весовых анизотропных пространств Соболева (см., например, [12] и ссылки там); в этих работах изучались и дробные весовые пространства, нормированные по типу B -классов Бесова. Нормировка подобного же типа (точнее типа Соболева — Слободецкого) рассматривалась в работе Т. С. Пиголкиной [13], результаты которой (относящиеся к поведению «зануленных» функций на ∞) можно переформулировать в виде, аналогичном нашей теореме 2. Было бы интересно связать исследования Никольского и Пиголкиной с теорией действительной интерполяции по Лионсу — Петре.

Отметим, наконец, интересную работу Г. Трибеля [14], в которой исследуются весовые функциональные пространства, близкие к упомянутым выше. В этой работе широко используется теория интерполяции банаховых пространств.

Пояснение некоторых обозначений: если α — мультииндекс, то $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial/\partial x_i$; $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|\cdot\|_p$; \sim обозначает соотношение эквивалентности; \subset — знак включения (и алгебраического вложения), \subset — знак вложения (топологического).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства L_p^r . — Мат. сб., 1963, 50, № 3, с. 1.
2. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
3. Strichartz R. S. Multipliers on fractional Sobolev spaces. — J. Math. and Mech., 1967, 16, N 9, p. 1031—1060.
4. Лизоркин П. И. Описание пространств $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов. — Мат. сб., 1970, 83, № 1, с. 79—91.
5. Лизоркин П. И. Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций. — Труды МИАН СССР, 1972, 117.
6. Самко С. Г. О пространствах рисовых потенциалов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, 40, № 5, с. 1143—1172.
7. Stein E. M. Weiss G. Fractional integrals on n -dimensional Euclidean space. — J. Math. and Mech., 1958, 7, N 4, p. 503—514.
8. Talenti G. Sopra una diseguaglianza integrali. — Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1967, 21, N 2, p. 167—188.
9. Кудрявцев Л. Д. Теоремы вложений для функций, определенных на неограниченных областях. — ДАН СССР, 1963, 153, № 3, с. 534—536.
10. Ильин В. П. Интегральные представления функций классов $L_p^l(G)$ и теоремы вложения. — Записки науч. семинаров ЛОМИ, 1970, 19, с. 95—155.
11. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
12. Никольский Ю. С. Поведение на бесконечности функций с заданными в L_p дифференциально-разностными свойствами. — Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 182—198.
13. Пиголкина Т. С. К теории весовых классов. — Труды МИАН СССР, 1969, 105, с. 201—212.
14. Triebel H. Spaces of Kudrjavcev type. — J. Math. Anal. and Appl. (1), 1976, 56, 253—277; (2) 1976, 56, 278—287.