M. A. Krasnosel'skii, E. A. Lifshits, Sharp linear operators,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 1984, Volume 18, Issue 3, 82–83

Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 82—83.

УДК 517.43

ОСТРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц

В работе выделяется и изучается новый класс линейных операторов, обладающих важными спектральными свойствами.

1. Рассматриваются линейные операторы, действующие в банаховом пространстве E, полуупорядоченном клином K (в частности, конусом K).

Оператор A назовем φ-острым, где $\varphi \in [0, \pi/2)$, если $AK \subset K$ и

$$f(A^2x) \geqslant \| A^*f \|_{E^*} \| Ax \|_E \cos\varphi \qquad (x \in K,\ f \in K^*), \tag{1}$$

причем $f(A^2x) > 0$ хотя бы при одном $x \in K$ и одном $f \in K^*$. В определении φ-острого оператора участвует фиксированная норма в E. Основные свойства φ-острых операторов содержатся в следующем утверждении.

Теорема 1. *Каждый φ-острый оператор A имеет в K собственный вектор e, которому отвечает простое положительное собственное значение, совпадающее со спектральным радиусом $r(A)$ оператора A. Всем лежащим в K неколлинеарным e собственным векторам отвечает нулевое собственное значение. Справедлива оценка*

$$|\lambda| \leqslant r(A) \operatorname{tg} \varphi/2 \qquad (\lambda \in \sigma(A),\ \lambda \neq r(A)), \tag{2}$$

где $\sigma(A)$ — спектр оператора A.

Перечисленные в теореме 1 свойства φ-острых операторов по обычным схемам упрощают исследование уравнений с φ-острыми операторами.

2. Эффективность теоремы 1 определяется простотой проверки φ-остроты различных конкретных операторов.

Пусть A — квадратная порядка N матрица с неотрицательными элементами a_{ij}. Матрицу A будем трактовать как линейный оператор в пространстве R^N с фиксированным базисом и выделенным конусом $K_+(R^N)$ векторов с неотрицательными компонентами. Предполагается, что в R^N выбрана некоторая фиксированная норма $\|\cdot\|_{R^N}$; через $\|\cdot\|^*_{R^N}$ обозначим сопряженную норму. Положим

$$d(A;\ R^N) = \min \frac{a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \ldots + a_{iN}a_{Nj}}{\|\{a_{i1}, \ldots, a_{iN}\}\|_{R^N} \cdot \|\{a_{1j}, \ldots, a_{Nj}\}\|^*_{R^N}}, \tag{3}$$

где минимум берется по тем индексам i и j, при которых знаменатель в правой части отличен от нуля. Всегда справедливо неравенство $d(A;\ R^N) \leqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть справедливо неравенство*

$$d(A;\ R^N) > 0. \tag{4}$$

Тогда определенный матрицей A с неотрицательными элементами оператор A будет φ-острым, где

$$\varphi = \arccos d(A;\ R^N). \tag{5}$$

Подчеркнем, что неравенство (4) часто выполнено для матриц, часть элементов которых равна нулю. Именно это обстоятельство определяет важность нового понятия.

3. Перейдем к интегральным операторам

$$Ax(t) = \int_Q G(t, s)\, x(s)\, ds \tag{6}$$

с непрерывным неотрицательным ядром $G(t, s)$; здесь Q для простоты — замыкание некоторой ограниченной области конечномерного евклидова пространства. Оператор A действует в пространстве $C = C(Q)$ непрерывных на Q функций (с равномерной нормой), полуупорядоченном конусом $K_+(C)$ неотрицательных функций. Положим

$$d_1(A;\ C) = \inf \frac{\int_Q G(t, s)\, G(s, \tau)\, ds}{\max\limits_{s \in Q} G(s, t) \int_Q G(\tau, \sigma)\, d\sigma}, \tag{7}$$

где инфимум берется по тем t и τ, при которых знаменатель в правой части отличен от нуля. Всегда справедливо неравенство $d_1(A;\ C) \leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть справедливо неравенство*

$$d_1(A; C) > 0. \tag{8}$$

Тогда интегральный оператор A *с неотрицательным ядром будет* φ-*острым, где*

$$\varphi = \arccos d_1(A; C). \tag{9}$$

4. Приведем некоторые утверждения, упрощающие исследование φ-острых операторов. Условие (1) эквивалентно каждому из условий

$$A^2x \gg \| Ax \| Ay \quad \text{при} \quad x \in K, \quad y \in E, \quad \| y \| \leqslant \cos\varphi, \tag{10}$$

$$A^{*2}f \gg \| A^*f \| A^*g \quad \text{при} \quad f \in K^*, \quad g \in E^*, \quad \| g \| \leqslant \cos\varphi, \tag{11}$$

где $\gg$ — это знак полуупорядоченности в E и E^* соответственно клиньями (конусами) K и K^*.

Теорема 4. *Сопряженный* φ-*острому оператору* A *оператор* A^* (*действующий в сопряженном пространстве* E^*) *также* φ-*острый.*

Теорема 5. *Если* A — *это* φ-*острый оператор, то*

$$\cos\varphi \| Ax \| \leqslant \| Ay \| \quad \textit{при} \quad -y \leqslant x \leqslant y \tag{12}$$

и

$$\cos\varphi \frac{A^2u}{\| Au \|} \leqslant \frac{A^2v}{\| Av \|} \leqslant \frac{1}{\cos\varphi} \frac{A^2u}{\| Au \|} \quad \textit{при} \quad u, v \in K; \quad Au, Av \neq 0. \tag{13}$$

Свойство (13) определяет связь между понятиями φ-острого оператора и фокусирующего (см. [1—3]) оператора.

5. Векторы $x, y \in K$ называют эквивалентными, если $\alpha x \leqslant y \leqslant \beta x$ при некоторых $\alpha, \beta > 0$. Если x и y эквивалентны, то положим, следуя [3],

$$\theta(x, y) = \frac{\min\{\beta\colon y \leqslant \beta x\}}{\max\{\alpha\colon \alpha x \leqslant y\}}. \tag{14}$$

Обозначим через $e_0 \in K$ нормированный собственный вектор линейного φ-острого оператора A, отвечающий положительному собственному значению $r(A)$. Пусть некоторой вычислительной процедурой (или эвристическими соображениями) найден нормированный вектор $z \in K$, который рассматривается как приближение собственного вектора e_0. Для ряда приложений важны апостериорные оценки близости известного вектора z к неизвестному интересующему нас вектору e_0.

Близость векторов z и e_0 естественно характеризовать величиной $\theta(z, e_0)$ (см. формулу (14)), так как в обычных случаях (например, когда K — это нормальный, в смысле М. Г. Крейна, конус) из оценки величины $\theta(z, e_0)$ немедленно вытекает оценка нормы $\| z - e_0 \|$.

Теорема 6. *Пусть* A — *это* φ-*острый оператор. Пусть выполнены соотношения*

$$\alpha z \leqslant Az \leqslant \beta z, \tag{15}$$

где $\alpha, \beta > 0$. *Тогда*

$$\sqrt{\theta(z, e_0)} \leqslant \frac{1}{2\cos\varphi}\left[\frac{\beta}{\alpha} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)^2 + 4\frac{\beta}{\alpha}\cos^2\varphi}\right]. \tag{16}$$

Из (16) вытекает более грубая, но более простая оценка

$$\theta(z, e_0) \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1 + \frac{1}{\cos\varphi}}. \tag{17}$$

Аналог оценки (17) для фокусирующих операторов указан в [4]. Оценка из [4] может быть несколько усилена: если A — невырожденный фокусирующий относительно конуса $K \subset E$ оператор с константой фокусирования $\chi(A; K)$, то

$$\sqrt{\theta(z, e_0)} \leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - 1\right)\chi(A; K) + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - 1\right)^2 \chi^2(A; K) + 4\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}\right]. \tag{18}$$

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Hopf E.*— J. Math. Mech., 1963, v. 12, № 5, p. 683—692; № 6, p. 886—892. 2. *Ostrowski A.*— Math. Ann., 1963, v. 150, p. 276—284. 3. *Забрейко П. П., Красносельский М. А., Покорный Ю. В.*— Функц. анализ, 1971, т. 5, вып. 4, с. 9—17. 4. *Красносельский М. А., Соболев А. В.*— Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1983, т. 23, № 11, с. 222—229.

Институт проблем управления
АН СССР
Воронежский государственный
университет

Поступило в редакцию
16 августа 1983 г.