УДК 517.977

О необходимых условиях оптимальности произвольного порядка в задаче быстродействия

Третьяк А. И.

Настоящая работа посвящена изучению достаточно общих необходимых условий оптимальности для задачи быстродействия с закрепленными концами и линейно входящим управлением. Предлагаемый в работе подход к решению этой проблемы основан на хронологическом исчислении, развитом в работах [1]—[4].

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 приводятся необходимые понятия и факты хронологического исчисления. В § 2 формулируется и доказывается основной результат работы — общее необходимое условие оптимальности (теорема 2.1). В § 3 теорема 2.1 используется для получения необходимого условия оптимальности третьего порядка (теорема 3.1).

При написании настоящей работы были использованы работы [5], [6].

Автор выражает глубокую благодарность Р. В. Гамкрелидзе за постановку задачи и ценные советы и А. А. Аграчеву за полезные обсуждения.

§ 1. Необходимые сведения из хронологического исчисления

В этом параграфе собраны некоторые понятия и факты хронологического исчисления, используемые в дальнейшем. Подробное изложение можно найти в работах [3], [4].

1.1. Векторные поля и диффеоморфизмы. Пусть M — гладкое, т. е. класса C^∞, n-мерное многообразие, гладко вложенное в $\mathbf{R}^d$, $\Phi=C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M, E — сужение тождественного отображения $\mathbf{R}^d$ на M, $\mathrm{Der}(\Phi)$ — множество дифференцирований алгебры Φ, $\mathrm{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов многообразия M, T_xM — касательное пространство к многообразию M в точке $x\in M$, T_x^*M — кокасательное пространство в точке $x\in M$.

Гладким векторным полем или просто полем на M будем называть произвольное дифференцирование $\vec{X}\in\mathrm{Der}(\Phi)$ алгебры Φ, т. е. линейное отображение $\vec{X}\colon \Phi\to\Phi$, удовлетворяющее формальному правилу дифференцирования произведения:

$$\vec{X}(\varphi\cdot\psi)=(\vec{X}\varphi)\cdot\psi+\varphi\cdot(\vec{X}\psi)\ \forall\,\varphi,\ \psi\in\Phi.$$

Известно, что всякое дифференцирование алгебры Φ является дифференциальным оператором первого порядка и действует по формуле

$$(\vec{X}\varphi)(x)=\langle d\varphi(x),\ \vec{X}E(x)\rangle\ \forall\,x\in M,\ \forall\,\varphi\in\Phi, \tag{1.1}$$

где $d\varphi(x)$ — дифференциал функции φ в точке x, а угольные скобки означают применение 1-формы $d\varphi(x)$ к вектору $\vec{X}E(x)$. Отсюда, в частности, получается, что $\vec{X}E(x)=X(x)\ \ \forall x\in M$, где X — некоторая гладкая d-мерная функция на M; всякое гладкое векторное поле, в свою очередь, порождается некоторой гладкой d-мерной функцией на M.

Множество $\mathrm{Der}(\Phi)$ всех векторных полей на M образует алгебру Ли относительно умножения, определяемого формулой

$$[\vec{X}, \vec{Y}]=\vec{X}\circ\vec{Y}-\vec{Y}\circ\vec{X}\ \ \forall\,\vec{X}, \vec{Y}\in \mathrm{Der}(\Phi).$$

Как и во всякой алгебре Ли, произвольному элементу $\vec{X}\in\mathrm{Der}(\Phi)$ соответствует линейное отображение

$$\mathrm{ad}\,\vec{X}:\mathrm{Der}(\Phi)\to\mathrm{Der}(\Phi), \tag{1.2}$$

определенное формулой $(\mathrm{ad}\,\vec{X})\vec{Y}=[\vec{X}, \vec{Y}]\ \ \forall\,\vec{Y}\in\mathrm{Der}(\Phi)$. Через $\mathrm{ad}^k\vec{X}=\mathrm{ad}\,\vec{X}\circ\mathrm{ad}^{k-1}\vec{X}$ обозначаются степени линейного отображения (1.2).

Пусть, далее, $\pi(x)$ — ортогональный проектор $\mathbf{R}^d$ на касательное пространство

$$T_xM=\{\vec{X}E(x)\mid \vec{X}\in\mathrm{Der}(\Phi)\}$$

к M в точке x. Сопоставим вектору $h\in\mathbf{R}^d$ векторное поле $\vec{h}\in\mathrm{Der}(\Phi)$ по формуле

$$\vec{h}\varphi(x)=\langle d\varphi(x),\ \pi(x)h\rangle\ \ \forall\,\varphi\in\Phi,\ \ \forall\,x\in M.$$

В силу (1.1) имеем $\vec{h}E(x)=\pi(x)h\ \ \forall x\in M$.

Определим в Φ полунормы $\|\bullet\|_{s,K}$ (s — целое неотрицательное число, $K\subset M$ — компакт) формулой

$$\|\varphi\|_{s,K}=\sup_{x\in K}\sum_{i=1}^{s}\sup_{|h_j|=1}|\vec{h}_1\circ\ldots\circ\vec{h}_i\varphi(x)|\ \ \forall\,\varphi\in\Phi.$$

Если $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi^1\\ \vdots\\ \varphi_d\end{pmatrix}\in\Phi^d$ (Φ^d — декартово произведение d экземпляров Φ), то положим

$$\|\varphi\|_{s,K}=\max_{1\leqslant l\leqslant d}\|\varphi^l\|_{s,K}.$$

Система полунорм $\|\bullet\|_{s,K}$ определяет в Φ локально выпуклую топологию, превращая Φ в пространство Фреше. Всюду, далее, пространство Φ рассматривается с этой топологией.

Обозначим через $\mathscr{L}(\Phi)$ ассоциативную алгебру непрерывных линейных отображений Φ в себя. Произведением двух линейных отображений A и B является их композиция $A\circ B$. Можно доказать, что $\mathrm{Der}(\Phi)\subset\mathscr{L}(\Phi)$.

Всякий элемент $P\in\mathrm{Diff}(M)$ порождает автоморфизм P^*: $\Phi\to\Phi$ алгебры Φ по формуле $P^*\varphi=\varphi\circ P\ \ \forall\varphi\in\Phi$, который также будет называться диффеоморфизмом. Множество всех таких диффеоморфизмов образует группу $D(M)$ относительно композиции. Можно показать, что $D(M)\subset\mathscr{L}(\Phi)$. Отметим, что $P^*E=P$ и $(P\circ Q)^*=Q^*\circ P^*\ \ \forall P, Q\in\mathrm{Diff}(M)$.

Для любого $P^*\in D(M)$ через $\mathrm{Ad}\,P^*$ обозначается линейное отображение

$$\mathrm{Ad}\,P^*\colon\ \mathrm{Der}(\Phi)\to\mathrm{Der}(\Phi),$$

определенное формулой

$$(\mathrm{Ad}\, P^*)\, \vec{X} = P^* \circ \vec{X} \circ P^{*^{-1}}\ \forall \vec{X} \in \mathrm{Der}\,(\Phi).$$

1.2. Однопараметрические семейства функций и операторов. В пространстве $\mathscr{L}(\Phi)$ введем топологию простой (поточечной) сходимости: последовательность операторов $A_i \to 0$, $i \to \infty$, в $\mathscr{L}(\Phi)$, если $\forall \varphi \in \Phi$ $A_i \varphi \to 0$, $i \to \infty$, в Φ.

Пусть φ_t, $t \in \mathbf{R}$,— семейство элементов Φ, зависящее от параметра $t \in \mathbf{R}$. Непрерывность и дифференцируемость по параметру t этого семейства определяется очевидным образом, ибо Φ — линейное топологическое пространство.

Семейство $\varphi_t, t \in \mathbf{R}$, называется измеримым, если $\forall x \in M$ измерима скалярная функция $t \mapsto \varphi_t(x)$. Измеримое семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$, называется локально интегрируемым, если $\forall t_1$, $t_2 \in \mathbf{R}$, $\forall s = 0, 1, \ldots$, и компакта $K \subset M$

$$\int_{t_1}^{t_2} \| \varphi_\tau \|_{s,K}\, d\tau < \infty.$$

Интегралом локально интегрируемого семейства φ_t, $t \in \mathbf{R}$, в заданных пределах от t_1 до t_2 называется функция

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau\, d\tau \colon\ x \mapsto \int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau(x)\, d\tau\ \forall x \in M.$$

Эта функция принадлежит Φ и

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \varphi_\tau\, d\tau \right\|_{s,K} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \| \varphi_\tau \|_{s,K}\, d\tau.$$

Семейство φ_t, $t \in \mathbf{R}$, называется абсолютно непрерывным, если существует локально интегрируемое семейство ψ_t, $t \in \mathbf{R}$, такое, что

$$\varphi_t = \varphi_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \psi_\tau\, d\tau.$$

Оказывается [1], что в этом случае при почти всех $t \in \mathbf{R}$ $\dfrac{d}{dt}\varphi_t = \psi_t$.

Те же понятия, что и выше, определяются и для однопараметрических семейств A_t, $t \in \mathbf{R}$, операторов из $\mathscr{L}(\Phi)$ в «слабом» смысле.

Именно, будем говорить, что семейство A_t, $t \in \mathbf{R}$, элементов $\mathscr{L}(\Phi)$ обладает некоторым свойством, если $\forall \varphi \in \Phi$ этим свойством обладает семейство $\psi_t = A_t \varphi$, $t \in \mathbf{R}$, элементов Φ.

Нестационарным векторным полем на многообразии M или просто полем называется произвольное локально интегрируемое семейство $\vec{X_t}$, $t \in \mathbf{R}$, элементов $\mathrm{Der}(\Phi) \subset \mathscr{L}(\Phi)$. Нестационарное поле $\vec{X_t}$, $t \in \mathbf{R}$, называется ограниченным, если

$$\int_{t_1}^{t_2} \| X_\tau \|_{s,M}\, d\tau < \infty\ \ \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R},\ \ \forall s = 0, 1, \ldots .$$

Потоком на M называется произвольное абсолютно непрерывное семейство P_t^*, $t \in \mathbf{R}$, диффеоморфизмов, удовлетворяющее условию $P_0^* = \mathrm{Id}$. Здесь $\mathrm{Id}\colon \Phi \to \Phi$ — тождественное отображение.

Пусть $\vec{X_t}$, $t \in \mathbf{R}$,— некоторое нестационарное векторное поле на M. Рассмотрим линейные операторные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dt}A_t = A_t \circ \vec{X}_t, \ A_0 = \mathrm{Id}, \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dt}B_t = -\vec{X}_t \circ B_t, \ B_0 = \mathrm{Id}, \tag{1.4}$$

относительно семейств A_t, B_t, $t \in \mathbf{R}$, элементов $\mathscr{L}(\Phi)$. Решениями этих уравнений называются абсолютно непрерывные семейства A_t, B_t $t \in \mathbf{R}$, такие, что

$$\frac{d}{dt}A_t = A_t \circ \vec{X}_t, \ \frac{d}{dt}B_t = -\vec{X}_t \circ B_t,$$

для почти всех $t \in \mathbf{R}$ и $A_0 = B_0 = \mathrm{Id}$. Уравнения (1.3)—(1.4) эквивалентны интегральным уравнениям

$$A_t = \mathrm{Id} + \int_0^t A_\tau \circ \vec{X}_\tau \, d\tau, \ B_t = \mathrm{Id} - \int_0^t \vec{X}_\tau \circ B_\tau \, d\tau.$$

Оказывается [3], что если поле $\vec{X}_t$, $t \in \mathbf{R}$, ограничено, то решения этих уравнений существуют, единственны и являются взаимно обратными потоками. При этом, если поток P_t^*, $t \in \mathbf{R}$, удовлетворяет уравнению (1.3), то абсолютно непрерывное семейство диффеоморфизмов $P_t = P_t^* E$, $t \in \mathbf{R}$, определено обыкновенным дифференциальным уравнением на M

$$\dot{x} = X_t(x), \ X_t = \vec{X}_t E, \ x \in M, \tag{1.5}$$

ибо $\frac{d}{dt}P_t(x) = \frac{d}{dt}P_t^* E(x) = P_t^* \circ \vec{X}_t E(x) = P_t^* X_t(x) = X_t \circ P_t(x)$. Обратно, если семейство диффеоморфизмов P_t, $t \in \mathbf{R}$, многообразия M определено дифференциальным уравнением (1.5), то P_t^*, $t \in \mathbf{R}$, есть поток, удовлетворяющий уравнению (1.3). Поэтому решение $x = x(t)$, $t \in \mathbf{R}$, уравнения (1.5) с начальным условием $x(0) = x_0$ выражается формулой $x(t) = P_t^* E(x_0) = P_t(x_0)$, $t \in \mathbf{R}$. В свою очередь, если B_t, $t \in \mathbf{R}$,— произвольное решение уравнения (1.4), то $\forall \varphi \in \Phi$ функция $\omega(t, x) = B_t \varphi(x)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t, x) + \vec{X}_t \omega(t, x) = 0, \ \omega(0, x) = \varphi(x).$$

Далее потоки будут представляться в виде семейства диффеоморфизмов $P_{t_0,t}^*$, абсолютно непрерывно зависящих от параметров t_0, t и обращающихся в тождественное отображение при $t_0 = t$, $P_{t,t}^* = \mathrm{Id}$. Соответственно будут рассматриваться уравнения

$$A_{t_0,t} = \mathrm{Id} + \int_{t_0}^t A_{t_0,\tau} \circ \vec{X}_\tau \, d\tau, \tag{1.6}$$

$$B_{t_0,t} = \mathrm{Id} - \int_{t_0}^t \vec{X}_\tau \circ B_{t_0,\tau} d\tau. \tag{1.7}$$

Поток $P_{t_0,t}^*$, удовлетворяющий уравнению (1.6), называется правой хронологической экспонентой, а поток $Q_{t_0,t}^*$, удовлетворяющий уравнению (1.7),— левой хронологической экспонентой. Они, соответственно, обозначаются

$$P_{t_0,t}^* = \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^t \vec{X}_\tau \, d\tau, \ Q_{t_0,t}^* = \overleftarrow{\exp} \int_{t_0}^t -\vec{X}_\tau \, d\tau.$$

Отметим, что решение $x=x(t)$, $t\in\mathbf{R}$, уравнения (1.5) с начальным условием $x(t_0)=x_0$ запишется в виде

$$x(t)=P^*_{t_0,t}E(x_0)=P_{t_0,t}(x)=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{X}_\tau\,d\tau E(x_0),\ t\in\mathbf{R}.$$

Пусть $\vec{X}_t$, $\vec{Y}_t$, $t\in\mathbf{R}$,— произвольные ограниченные поля. Тогда [3] имеют место формулы вариации постоянной

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}(\vec{X}_\tau+\vec{Y}_\tau)\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{\tau}\mathrm{ad}\,\vec{X}_\theta\,d\theta)\vec{Y}_\tau\,d\tau\circ\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{X}_\tau\,d\tau=$$

$$=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{\tau}\vec{X}_\theta\,d\theta\right)\vec{Y}_\tau\,d\tau\circ\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{X}_\tau\,d\tau,$$

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}(\vec{X}_\tau+\vec{Y}_\tau)\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{X}_\tau d\tau\circ\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t}^{\tau}\mathrm{ad}\,\vec{X}_\theta\,d\theta\right)\vec{Y}_\tau\,d\tau= \tag{1.8}$$

$$=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{X}_\tau\,d\tau\circ\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int_{t}^{\tau}\vec{X}_\theta\,d\theta\right)\vec{Y}_\tau\,d\tau.$$

1.3. Инвариантные вариации. Для заданных полей $\vec{X}_t$, $\vec{Y}_t$, $t\in\mathbf{R}$, поток $\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}(\vec{X}_\tau+\vec{Y}_\tau)\,d\tau$ будет рассматриваться здесь как возмущение потока $P^*_{t_0,t}=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{X}_\tau\,d\tau$, поле $\vec{Y}_t$ — как возмущение поля $\vec{X}_t$, а поток $\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{Z}_\tau d\tau$, где $\vec{Z}_\tau=\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t}^{\tau}\mathrm{ad}\,\vec{X}_\theta\,d\theta\right)\vec{Y}_\tau$, — как соответствующий, в силу (1.8), возмущающий поток. Положим

$$\delta P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\delta^m P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau), \tag{1.9}$$

$$\delta^{(m)}P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)=\int_{t_0}^{t}d\tau_1\int_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2\ldots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}}d\tau_m g_m(\vec{Z}_{\tau_1},\ldots,\vec{Z}_{\tau_m}), \tag{1.10}$$

где $\delta P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)$ — формальный хронологический ряд, соответствующий векторному полю $\vec{Y}_t$. Здесь $g_1(\zeta_1), g_2(\zeta_1,\zeta_2),\ldots,g_m(\zeta_1,\ldots,\zeta_m),\ldots$— последовательность однородных степени 1 по каждой переменной многочленов от некоммутирующих переменных. Эти многочлены выражаются в виде линейной комбинации переменных $\zeta_1,\ldots,\zeta_m$, их коммутаторов $[\zeta_i,\zeta_j]=\zeta_i\zeta_j-\zeta_j\zeta_i$, коммутаторов от всех полученных до рассматриваемого шага выражений и т. д. В [3] описан явный алгоритм, задающий эту последовательность многочленов. Например, первые три многочлена имеют вид $g_1(\zeta_1)=\zeta_1$, $g_2(\zeta_1,\zeta_2)=\frac{1}{2}[\zeta_2,\zeta_1]$, $g_3(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=\frac{1}{6}([\zeta_3,[\zeta_2,\zeta_1]]+$ $+[[\zeta_3,\zeta_2],\zeta_1])$.

Если $\vec{Y}_1,\ldots,\vec{Y}_m$ — призвольные поля, то и выражение $g_m(\vec{Y}_1,\ldots,\vec{Y}_m)$ также будет полем. Поэтому все выражения $\delta^{(m)}P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)$, $m=1,2,\ldots$, являются векторными полями.

Поле $\delta^{(m)}P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)$ будем называть m-й инвариантной вариацией потока $P^*_{t_0,t}$, соответствующей возмущающему полю $\vec{Y}_t$, $t\in\mathbf{R}$, а формальное поле $\delta P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)$ — полной инвариантной вариацией потока $P^*_{t_0,t}$.

Оказывается [3], что справедливо асимптотическое соотношение

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{Z}_\nu\,d\tau \cong e^{\delta P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)} = \mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\delta P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)\right)^i \tag{1.11}$$

($e^{\delta P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)}$ — формальный поток, соответствующий формальному полю $\delta P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)$), точный смысл которого таков: если $\int_{t_0}^{t}\|Z_\tau\|_{s+m,M}\,d\tau\leqslant 1$, то

$$\begin{gathered}\left\|\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{Z}_\tau\,d\tau - e^{\sum_{i=1}^{m}\delta^{(i)}P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)}\right)\varphi\right\|_{s,K}\leqslant\\ \leqslant c_1\left|\int_{t_0}^{t}\|Z_\tau\|_{s+2m,M}\,d\tau\right|^{m+1}\|\varphi\|_{s+m+1,U(K)},\end{gathered} \tag{1.12}$$

где постоянные c_1, c_2 зависят лишь от s, m и $\operatorname{diam}K$, $U(K)$ — c_2-окрестность компакта $K\subset M$.

Поэтому можно утверждать, что если в точке $x\in M$

$$\delta^{(i)}P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)E(x)=0\quad\forall i=1,\ \ldots,\ m-1, \tag{1.13}$$

то

$$\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{Z}_\tau\,d\tau - \mathrm{Id} - \delta^{(m)}P^*_{t_0t}(\vec{Y}_\tau)\right)E(x) = O\left(\left(\int_{t_0}^{t}\|Z_\tau\|_{s+2m,M}\,d\tau\right)^{m+1}\right). \tag{1.14}$$

Таким образом, если все функции $\delta^{(i)}P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)E$, $i=1,\ldots,m-1$, обращаются в точке $x\in M$ в нуль, то значение возмущающего потока

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{Z}_\tau\,d\tau = \overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t}^{\tau}\mathrm{ad}\,\vec{X}_\theta\,d\theta\right)\vec{Y}_\tau\,d\tau$$

в точке x может быть вычислено с помощью выражения

$$(\mathrm{Id}+\delta^{(m)}P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau))E,$$

причем допускаемая при этом ошибка оценивается с помощью (1.14).

Решающее преимущество определенных здесь вариаций перед обычно определяемыми заключается в том, что введенные вариации удовлетворяют асимптотическим соотношениям (1.12)—(1.14) и имеют инвариантную форму: выражения $\delta^{(m)}P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)$ являются векторными полями.

Обычные вариации возмущающего потока — последовательные члены в разложении

$$\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}\vec{Z}_\tau\,d\tau = \mathrm{Id} + \int_{t_0}^{t}d\tau_1\vec{Z}_{\tau_1} + \int_{t_0}^{t}d\tau_1\int_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2\vec{Z}_{\tau_2}\circ\vec{Z}_{\tau_1} + \ldots, \tag{1.15}$$

не имеют инвариантного смысла, начиная с квадратичного члена.

Взаимосвязь обычных вариаций

$$\delta_m P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau) = \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \vec{Z}_{\tau_m} \circ \ldots \circ \vec{Z}_{\tau_2} \circ \vec{Z}_{\tau_1}$$

и инвариантных $\delta^{(m)} P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)$ устанавливается формулами (1.9)—(1.11), (1.15). Например,

$$\delta^{(1)} P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau) = \delta_1 P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau),$$

$$\delta^{(2)} P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau) = \delta_2 P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau) - \frac{1}{2}\delta^{(1)} P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau) \circ \delta^{(1)} P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau)$$

и т. д.

§ 2. Общие необходимые условия оптимальности

Рассматриваемое нами управляемое уравнение имеет вид

$$x = (\vec{g} + \vec{G}u) E(x) = g(x) + G(x) u, \tag{2.1}$$

$x \in M$, $u \in U \subset \mathbf{R}^r$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, где $\vec{g}$ — гладкое векторное поле на M, $\vec{G}u$, $u \in U$,— семейство гладких векторных полей на M. Начальный момент времени t_0 и точки x_0, x_1 фиксированы. Поля $\vec{g}, \vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_r$, где $\vec{G}u = \sum_{i=1}^{r} \vec{G}_i u_i$, предполагаются ограниченными.

Управлением будем называть произвольную ограниченную измеримую на $[t_0, t_1]$ функцию $u = u(t)$ со значениями в U.

Зафиксируем некоторое решение уравнения (2.1)

$$x = \tilde{x}(t), \quad u = \tilde{u}(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.2}$$

и будем обозначать через $\delta u = \delta u(t)$ произвольное возмущение управления $u = \tilde{u}(t)$ на $[t_0, T]$, т. е. измеримую функцию на $[t_0, T]$, удовлетворяющую условию $\tilde{u}(t) + \delta u(t) \in U$ $\forall t \in [t_0, T]$.

При $u = u(t)$ решение уравнения (2.1) запишем в виде (см. п. 1.2)

$$x(t) = \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} (\vec{g} + \vec{G}u(\tau))\, d\tau E(x_0), \; t \in [t_0, T],$$

откуда, полагая $u(t) = \tilde{u}(t) + \delta u(t)$ и используя формулу вариаций (1.8), получаем

$$x(t) = \left(\overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \vec{X}_\tau \, d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \left(\mathrm{Ad}\, \overrightarrow{\exp} \int_{t}^{\tau} \vec{X}_\theta \, d\theta \right) \vec{Y}_\tau \, d\tau \right) E(x_0) =$$

$$= \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^{t} \left(\mathrm{Ad}\, \overrightarrow{\exp} \int_{t}^{\tau} \vec{X}_\theta \, d\theta \right) \vec{Y}_\tau d\tau E(\tilde{x}(t)), \; t \in [t_0, T], \tag{2.3}$$

где $\vec{X}_t = \vec{g} + \vec{G}\tilde{u}(t)$, $\vec{Y}_t = \vec{G}\,\delta u(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Пусть $\sigma \in]t_0, T[$ и $\delta u(t) = \delta u(t; \varepsilon)$, $t \in [t_0, T]$, где $\delta u(t; \varepsilon) = 0$ при $t \notin [\sigma - \rho(\varepsilon), \sigma]$, $\rho(\varepsilon) > 0$, $\rho(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда из формулы (2.3) получаем асимптотическое представление правого конца возмущенной траектории (см. п. 1.3)

$$x(T) = x(T; \sigma; \varepsilon) = e^{\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Y}_\tau(\sigma; \varepsilon))} E(x_1), \tag{2.4}$$

где $\delta P^*_{t_0,t}(\vec{Y}_\tau(\sigma;\varepsilon))$ — полная инвариантная вариация потока

$$P^*_{t_0,t}=\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{t}(\vec{g}+\vec{G}\tilde{u}(\tau))\,d\tau,$$

соответствущая возмущающему полю $\vec{Y}_t=\vec{Y}_t(\sigma;\varepsilon)$.

В дальнейшем для упрощения рассуждений считаем, что в рассматриваемый момент времени $\sigma\in]t_0, T[$ управление $u=\tilde{u}(t)$ является кусочно-гладким.

Пусть имеет место представление

$$\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Y}_\tau(\sigma;\varepsilon))=\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\vec{V}_j(\sigma)+o(\varepsilon^k), \tag{2.5}$$

где $\vec{V}_j(\sigma)$ — векторные поля.

Скажем, что полная инвариантная вариация $\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Y}_\tau\ (\sigma;\varepsilon))$ имеет порядок k в точке $\sigma\in]t_0, T[$, если существует окрестность O_σ этой точки такая, что

$$\vec{V}_j(\sigma')E(x_1)=0\ \ \forall\sigma'\in O_\sigma,\ \ \forall j\leqslant k-1. \tag{2.6}$$

Определим конус $K_{x_1}\subset T_{x_1}M$ как выпуклую оболочку всех касательных векторов вида $\vec{V}_k(\sigma)E(x_1)$, удовлетворяющих (2.6).

Предложение 2.1. *Пусть*

$$\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Y}^{(i)}_\tau(\sigma_i;\varepsilon))=\sum_{j=1}^{m_i}\varepsilon^j\vec{V}^{(i)}_j(\sigma_i)+o(\varepsilon^{m_i}),$$

— полная инвариантная вариация порядка m_i в точке $\sigma_i\in]t_0, T[$, соответствующая полю $\vec{Y}^{(i)}_\tau(\sigma_i;\ \varepsilon)$, $i=1,\ldots,k$. Пусть, далее, $\hat{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ — вектор, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ — вектор с неотрицательными компонентами, а m равно наименьшему общему кратному чисел $m_1,\ldots,m_k$. Тогда существует семейство полных инвариантных вариаций

$$\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Z}_\tau(\hat{\sigma};\varepsilon;\lambda))=\sum_{j=1}^{m}\varepsilon^j\vec{W}_j(\hat{\sigma};\lambda)+o(\varepsilon^m),$$

зависящее от параметра λ, такое, что

$$(e^{\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Z}_\tau(\hat{\sigma};\varepsilon;\lambda))}-\mathrm{Id}-\varepsilon^m\vec{W}_m(\hat{\sigma};\lambda))E(x_1)=o(\varepsilon^m),$$

где $\vec{V}^i_{m_i}(\hat{\sigma};\lambda)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{V}^{(i)}_{m_i}(\sigma_i)$.

Кроме того, семейство $\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Z}_\tau(\hat{\sigma};\varepsilon;\lambda))$ непрерывно по λ при малых $\varepsilon>0$.

Доказательство. Для упрощения записи предположим, что $k=2$; общий случай рассматривается аналогично. Без потери общности можно считать, что $m_1=m_2=m$.

Определим семейство $\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Z}_\tau(\hat{\sigma};\varepsilon;\lambda))$ равенством

$$e^{\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Z}_\tau(\hat{\sigma};\varepsilon;\lambda))}=e^{\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Y}^{(1)}_\tau(\sigma_1;\varepsilon\lambda_1^{\frac{1}{m}}))}\circ e^{\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Y}^{(2)}_\tau(\sigma_2;\varepsilon\lambda_2^{\frac{1}{m}}))}.$$

Теперь доказательство предложения завершается применением формулы Кемпбелла — Хаусдорфа и соотношения (1.12).

Предположим теперь, что (2.2) — оптимальный по быстродействию процесс.

Предложение 2.2. *Если* $K_{x_1}=T_{x_1}M$, *то процесс* (2.2) *не является оптимальным по быстродействию.*

Доказательство. В силу равенства $K_{x_1}=T_{x_1}M$ существуют $n+1$ касательных векторов $z_i \in K_{x_1}$, $i=0, \ldots, n$, таких, что начало в $T_{x_1}M$ является внутренней точкой выпуклой оболочки этих векторов. Из определения конуса K_{x_1} следует существование полных инвариантных вариаций

$$\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Z}^{(i)}_\tau(\sigma_i;\varepsilon))=\sum_{j=1}^{k_i}\varepsilon^j\vec{W}^{(i)}_j(\sigma_i)+o(\varepsilon^{k_i})$$

порядка k_i в точке $\sigma_i \in]t_0, T[$ таких, что $z_i=\vec{W}^{(i)}_{k_i}(\sigma_i)E(x_1)$, $i=0, \ldots, n$.

Обозначим через Λ n-мерный симплекс

$$\Lambda=\{\lambda=(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)\,|\,\lambda_i\geqslant 0,\ i=0, \ldots, n,\ \lambda_0+\ldots+\lambda_n=1\}.$$

Пусть, далее, $\bar{\sigma}=(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$.

В силу предложения 2.1 $\forall\lambda\in\Lambda$ существует полная инвариантная вариация

$$\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Z}_\tau(\bar{\sigma};\lambda;\varepsilon))=\sum_{j=1}^{k}\varepsilon^j\vec{W}_j(\bar{\sigma};\lambda)+o(\varepsilon^k),$$

соответствующая полю $\vec{Z}_t(\sigma;\lambda;\varepsilon)$, такая, что

$$\left(e^{\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Z}_\tau(\bar{\sigma};\lambda;\varepsilon))}-\mathrm{Id}-\varepsilon^k\vec{W}_k(\bar{\sigma};\lambda)\right)E(x_1)=o(\varepsilon^k),$$

где $\vec{W}_k(\bar{\sigma};\lambda)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\vec{W}^{(i)}_{k_i}(\sigma_i)$ (k равно наименьшему общему кратному чисел $k_0, \ldots, k_n$). Следовательно, в силу (1.12) справедливо асимптотическое соотношение

$$\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{T}\vec{V}_t(\bar{\sigma};\lambda;\tilde{\varepsilon})\,dt-\mathrm{Id}-\tilde{\varepsilon}\vec{W}_k(\bar{\sigma};\lambda)\right)E(x_1)=o(\tilde{\varepsilon}),$$

где $\vec{V}_t(\bar{\sigma};\lambda;\tilde{\varepsilon})=\left(\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int_{T}^{t}\vec{X}_\tau d\tau\right)\vec{Z}_t(\bar{\sigma};\lambda;\tilde{\varepsilon})$, $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon^k$.

Определим семейство непрерывных отображений

$$F_{\tilde{\varepsilon}}:\Lambda\to T_{x_1}M,\quad \tilde{\varepsilon}\geqslant 0,$$

при помощи формул

$$F_{\tilde{\varepsilon}}(\lambda)=\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\left(\overrightarrow{\exp}\int_{t_0}^{T}\vec{V}_t(\bar{\sigma};\lambda;\tilde{\varepsilon})\,dt-\mathrm{Id}\right)E(x_1),\ \tilde{\varepsilon}>0,\quad F_0(\lambda)=\vec{W}_k(\bar{\sigma};\lambda)E(x_1).$$

Теперь доказательство предложения завершается аналогично тому, как это сделано в [5] при доказательстве предложения 2.1.

Из предложения 2.2 непосредственно вытекает следующая основная теорема работы.

Теорема 2.1. *Пусть* (2.2) — *оптимальный по быстродействию процесс. Тогда существует ненулевая* 1-*форма* $\psi_{x_1}\in T^*_{x_1}M$ *такая, что если для произвольной точки* $\sigma\in\,]t_0,\ T[$ *и для данного целого* $k\geqslant 0$ *в некоторой окрестности* O_σ *точки* σ

$$\vec{V}_j(\sigma')E(x_1)=0\ \ \forall\sigma'\in O_\sigma,\ \ \forall j\leqslant k-1,$$

то $\langle\psi_{x_1},\vec{V}_k(\sigma)E(x_1)\rangle\leqslant 0.$

Напомним, что поля $\vec{V}_j(\sigma)$ определены соотношением (2.5).

§ 3. Необходимое условие оптимальности третьего порядка

В этом параграфе на основе изучения третьей инвариантной вариации выводится с помощью теоремы 2.1, полученной в предыдущем параграфе, необходимое условие оптимальности третьего порядка.

3.1. Необходимое условие оптимальности третьего порядка в терминах возмущений. Для упрощения формул мы предположим, что $\tilde{u}(t)\equiv 0$ на $[t_0,\ T]$. Предположим, далее, что $U=\mathbf{R}^r$; это избавит нас от необходимости вводить соответствующий проектор π_σ [5]. Наконец, предположим, что $r=1$.

Для $t\in[t_0,\ T]$ положим

$$\Pi_t=\operatorname{span}\{e^{(t-T)\operatorname{ad}\vec{g}}(\operatorname{ad}^i\vec{g})\,\vec{G}E(x_1),\ i=0,\ 1,\ \ldots\}.$$

Обозначим через $\mathscr{P}^{(m)}$, $m=0,\ 1,\ \ldots,$ множество всех измеримых на $[-1,\ 0]$ функций $p=p(t)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{0}t^ip(t)\,dt=0,\ i=0,\ \ldots,\ m$. Для удобства будем считать такие функции определенными для всех $t\in\mathbf{R}$ и обращающимися в нуль вне промежутка $[-1,\ 0]$.

Пусть заданы целое число $m\geqslant 0$ и произвольная точка $\sigma\in\,]t_0,\ T[$. Каковы бы ни были функция $p=p(t)$, $p\in\mathscr{P}^{(m)}$, и две положительные функции $\alpha=\alpha(\varepsilon)$, $\beta=\beta(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, стремящиеся к нулю при $\varepsilon\to 0$, зададим лежандрово семейство возмущений m-го порядка, определяемое точкой $\sigma\in\,]t_0,\ T[$ и функциями $p,\ \alpha,\ \beta$ формулой [5]

$$\delta u(t;\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)\,p\left(\frac{t-\sigma}{\beta(\varepsilon)}\right),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.4), получаем

$$x(T;\sigma;\varepsilon)=e^{\delta P^*_{t_0,T}(\vec{Y}_\tau(\sigma;\varepsilon))}E(x_1),$$

где $\vec{Y}_t=\vec{Y}_t(\sigma;\varepsilon)=\vec{G}\delta u(t;\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)\vec{G}p\left(\frac{t-\sigma}{\beta(\varepsilon)}\right)$, $t\in[t_0,\ T]$. Отсюда, введя новую переменную $\tau=\frac{t-\sigma}{\beta(\varepsilon)}$, имеем $x(T;\ \sigma;\ \varepsilon)=e^{\delta Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau})}E(x_1)$. Здесь

$$\delta Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau})=\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{(i)}Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau}) \tag{3.2}$$

— полная инвариантная вариация,

$$\delta^{(i)}Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau})=\int\limits_{-1}^{0}d\tau_1\int\limits_{-1}^{\tau_1}d\tau_2\ldots\int\limits_{-1}^{\tau_{i-1}}d\tau_i\,\mathfrak{g}_i(\vec{Z}_{\tau_1}(\sigma;\varepsilon),\ \ldots,\vec{Z}_{\tau_i}(\sigma;\varepsilon)) \tag{3.3}$$

— i-я инвариантная вариация,

$$\vec{Z}_\tau(\sigma;\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)\beta(\varepsilon)\,e^{(\sigma-T)\mathrm{ad}\vec{g}}e^{\beta(\varepsilon)\tau\cdot\mathrm{ad}\vec{g}}\,\vec{G}p(\tau). \tag{3.4}$$

Разлагая (3.3) в ряд по степеням $\beta(\varepsilon)$ с учетом (3.4), приходим к выражению

$$\delta^{(i)}Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau})=\alpha^i(\varepsilon)\beta^i(\varepsilon)\sum_{l=0}^{\infty}\beta^l(\varepsilon)\vec{W}_l^{(i)}(\sigma), \tag{3.5}$$

где

$$\vec{W}_l^{(i)}(\sigma)=e^{(\sigma-T)\mathrm{ad}\vec{g}}\,\vec{V}_l^{(i)},$$

$$\vec{V}_l^{(i)}=\sum_{j_1+\ldots+j_i=l}c^{(i)}_{j_1\ldots j_i}\,\mathfrak{g}_i((\mathrm{ad}^{j_1}\vec{g})\,\vec{G},\ \ldots,(\mathrm{ad}^{j_i}\vec{g})\,\vec{G}),$$

$$c^{(i)}_{j_1\ldots j_i}=\int_{-1}^{0}d\tau_1\int_{-1}^{\tau_1}d\tau_2\ldots\int_{-1}^{\tau_{i-1}}d\tau_i\,\frac{\tau_1^{j_1}}{j_1!}p(\tau_1)\,\frac{\tau_2^{j_2}}{j_2!}p(\tau_2)\ldots\frac{\tau_i^{j_i}}{j_i!}p(\tau_i).$$

Докажем теперь следующее утверждение:

Предложение 3.1. *Пусть*

$$\vec{F}(\sigma)=\sum_{l=0}^{s}a_le^{(\sigma-T)\,\mathrm{ad}\vec{g}}(\mathrm{ad}^l\vec{g})\,\vec{G},$$

где $a_l\in\mathbf{R}$, s *— целое неотрицательное число. Тогда можно построить полную инвариантную вариацию* $\delta\hat{Q}^*_{-1,0}(\vec{V}_\tau(\sigma;\varepsilon))=\varepsilon\vec{W}(\sigma)+o(\varepsilon)$, *такую, что* $\vec{W}(\sigma)=\vec{F}(\sigma)$.

Доказательство. Для каждого $l=0,1,\ldots$ положим

$$\alpha(\varepsilon)=\alpha_l(\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{l}{2l+1}},\quad\beta(\varepsilon)=\beta_l(\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{1}{2l+1}}$$

и возьмем функцию $p_l=p_l(t)$, $p_l\in\mathscr{P}^{(l-1)}$ (при $l=0$ требовать этого включения не нужно). Тогда для каждого $l=0,1,\ldots$ из (3.5) получаем

$$\delta^{(1)}Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau})=\varepsilon b_le^{(\sigma-T)\mathrm{ad}\vec{g}}(\mathrm{ad}^l\vec{g})\,\vec{G}+o(\varepsilon), \tag{3.6}$$

где $b_l=\int_{-1}^{0}\frac{\tau^l}{l!}p(\tau)\,d\tau$, а

$$\delta^{(i)}Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau})=o(\varepsilon)\quad\forall i\geqslant2. \tag{3.7}$$

Положим $\vec{V}_\tau(\sigma;\varepsilon)=\sum_{l=0}^{s}\frac{a_l}{b_l}\vec{Y}^{(l)}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau}$, $\tau\in[-1,0]$. Тогда из (3.2), используя (3.6) и (3.7), получаем формулу

$$\delta Q^*_{-1,0}(\vec{V}_\tau(\sigma;\varepsilon))=\varepsilon\sum_{l=0}^{s}a_le^{(\sigma-T)\,\mathrm{ad}\vec{g}}(\mathrm{ad}^l\vec{g})\,\vec{G}+o(\varepsilon),$$

доказывающую предложение.

Значение предложения 3.1 состоит в том, что оно позволяет аннулировать с помощью предложения 2.1 любой касательный вектор $\vec{F}(\sigma)E(x_1)\in\Pi_\sigma$.

Пусть теперь для заданного целого числа $m\geqslant0$ функции $\alpha=\alpha(\varepsilon)$ и $\beta=\beta(\varepsilon)$ удовлетворяют при достаточно малых $\varepsilon>0$ неравенствам

$$\alpha(\varepsilon)\beta^{2+m}(\varepsilon) \geqslant \alpha^2(\varepsilon)\beta^2(\varepsilon), \tag{3.8}$$

$$\alpha^3(\varepsilon)\beta^3(\varepsilon) > \alpha^2(\varepsilon)\beta^{4+2m}(\varepsilon). \tag{3.9}$$

Решение системы неравенств (3.8)—(3.9) определяется соотношением $\alpha(\varepsilon) = \beta^c(\varepsilon)$ $\forall c \in [m, m+1[$. В частности,

$$\alpha(\varepsilon) = \beta^m(\varepsilon). \tag{3.10}$$

Поясним смысл неравенств (3.8), (3.9) и их следствия

$$\alpha^3(\varepsilon)\beta^{3+m}(\varepsilon) > \alpha^4(\varepsilon)\beta^4(\varepsilon). \tag{3.11}$$

Из (3.2) и (3.5), используя (3.11), получаем

$$\delta Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau}) = \sum_{i=1}^{3} \delta^{(i)} Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau}) + O(\alpha^4(\varepsilon)\beta^4(\varepsilon)) =$$
$$= \delta^{(1)} Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau}) + \delta^{(2)} Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau}) +$$
$$+ \alpha^3(\varepsilon)\beta^3(\varepsilon)\sum_{l=0}^{m} \beta^l(\varepsilon)\vec{W}^{(3)}_l(\sigma) + O(\alpha^3(\varepsilon)\beta^{4+m}(\varepsilon)) + O(\alpha^4(\varepsilon)\beta^4(\varepsilon)). \tag{3.12}$$

Из этого соотношения следует, что для любого $i = 4, 5, \ldots$ i-я инвариантная вариация $\delta^{(i)} Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau})$ будет более высокого порядка малости, чем первые $m+1$ слагаемых в разложении третьей инвариантной вариации, и поэтому не повлияют на $m+1$-й член $\vec{W}^{(3)}_m(\sigma)$ этого разложения.

Далее, для $i=1$ из (3.5) при $p \in \mathscr{P}^{(m)}$ следует, что

$$\delta^{(1)} Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau}) = \alpha(\varepsilon)\beta^{2+m}(\varepsilon)\vec{W}^{(1)}_{1+m}(\sigma) + O(\alpha(\varepsilon)\beta^{3+m}(\varepsilon)).$$

Поэтому неравенство (3.8) гарантирует нам, что первое ненулевое слагаемое в (3.12) будет иметь порядок $\alpha(\varepsilon)\beta^{2+m}(\varepsilon)$. Следовательно, при аннулировании этого слагаемого с помощью предложений 3.1 и 2.1 добавочные слагаемые, обусловленные применением предложения 2.1, будут иметь порядок $\alpha^2(\varepsilon)\beta^{4+2m}(\varepsilon)$ и, в силу (3.9), не повлияют на $m+1$-й член $\vec{W}^{(3)}_m(\sigma)$.

Теперь из (3.12), используя (3.8)—(3.10), получаем

$$\delta Q^*_{-1,0}(\vec{Y}_{\sigma+\beta(\varepsilon)\tau}) = \beta^{1+m}(\varepsilon)\sum_{l=1+m}^{2+3m} \beta^l(\varepsilon)\vec{W}^{(1)}_l(\sigma) +$$
$$+ \beta^{2+2m}(\varepsilon)\sum_{l=0}^{1+2m} \beta^l(\varepsilon)\vec{W}^{(2)}_l(\sigma) + \beta^{3+3m}(\varepsilon)\sum_{l=0}^{m} \beta^l(\varepsilon)\vec{W}^{(3)}_l(\sigma) + o(\beta^{3+4m}(\varepsilon)). \tag{3.13}$$

Если для $\sigma \in]t_0, T[$ существует окрестность O_σ этой точки σ, для которой

$$e^{(\sigma'-T)\mathrm{ad}\vec{g}}\,[\vec{G}, (\mathrm{ad}^i\vec{g})\,\vec{G}]\,E(x_1) \in \Pi_{\sigma'} \quad \forall\sigma' \in O_\sigma, \quad \forall i = 0, 1, \ldots,$$

то из тождества

$$[(\mathrm{ad}^i\vec{g})\,\vec{G}, (\mathrm{ad}^j\vec{g})\,\vec{G}] = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i+k} C_i^k (\mathrm{ad}^k\vec{g})\,[\vec{G}, (\mathrm{ad}^{i+j-k}\vec{g})\,\vec{G}]$$

имеем $e^{(\sigma'-T)\mathrm{ad}\vec{g}}\, g_2((\mathrm{ad}^i\vec{g})\,\vec{G}, \ (\mathrm{ad}^j\vec{g})\,\vec{G})\,E(x_1) \in \Pi_{\sigma'}$ $\forall\sigma' O_\sigma$. Следовательно, $\vec{W}^{(2)}_l(\sigma')E(x_1) \in \Pi_{\sigma'}$ $\forall\sigma' \in O_\sigma$, $\forall l = 0, 1, \ldots$. Поэтому мы можем при помощи предложений 3.1 и 2.1 аннулировать в (3.13) первые две суммы, т. е. слагаемые $\vec{W}^{(1)}_{1+m}(\sigma), \ldots, \vec{W}^{(1)}_{2+3m}(\sigma), \vec{W}^{(2)}_0(\sigma), \ldots, \vec{W}^{(2)}_{1+2m}(\sigma)$. В результате получим

$$\delta Q^*_{-1,0} = \beta^{3+3m}(\varepsilon)\sum_{l=0}^{m}\beta^l(\varepsilon)\vec{W}^{(3)}_l(\sigma) + o(\beta^{3+4m}(\varepsilon)).$$

Отметим, что $\vec{W}^{(3)}_0(\sigma)=0\ \forall\sigma$.

Таким образом, используя теорему 2.1, мы можем сформулировать следующий результат, выражающий необходимое условие оптимальности третьего порядка.

Теорема 3.1. *Пусть* (2.2) *— оптимальный по быстродействию процесс. Пусть, далее, для точки* $\sigma\in]t_0, T[$ *и целого числа* $m\geqslant 0$ *существует окрестность* O_σ *точки* σ *такая, что*

$$e^{(\sigma'-T)\mathrm{ad}\vec{g}}\,[\vec{G}, (\mathrm{ad}^i\vec{g})\,\vec{G}]\,E(x_1)\in\Pi_{\sigma'}\ \ \forall\sigma'\in O_\sigma,\ \ \forall i=0, \ldots, 2m+1.$$

Тогда существует ненулевая 1-*форма* $\psi_{x_1}\in T^*_{x_1}M$ *такая, что для* $\forall p\in\mathscr{P}^{(m)}$ $\psi_{x_1}\perp\Pi_t\ \forall t\in[t_0, T]$ *и*

$$\langle\psi_{x_1}, \vec{W}^{(3)}_j(\sigma')\,E(x_1)\rangle=0\ \ \forall\sigma'\in O_\sigma,\ \ \forall j=0, \ldots, m. \tag{3.14}$$

3.2. Примеры использования теоремы 3.1. В этом пункте рассмотрим подробнее необходимое условие оптимальности (3.14) при нескольких первых значениях m.

При $m=0$ имеем очевидное тождество

$$\vec{W}^{(3)}_0(\sigma) = c^{(3)}_0\cdot e^{(\sigma-T)\mathrm{ad}\vec{g}}\,\mathfrak{g}_3(\vec{G}, \vec{G}, \vec{G})=0\ \ \forall\sigma,$$

ибо $\mathfrak{g}_3(\vec{G}, \vec{G}, \vec{G})=0$.

При $m=1$ из формул (3.5) следует, что

$$\vec{V}^{(3)}_1 = \sum_{i+j+k=1} c^{(3)}_{ijk}\mathfrak{g}_3((\mathrm{ad}^i\vec{g})\,\vec{G}, (\mathrm{ad}^j\vec{g})\,\vec{G}, (\mathrm{ad}^k\vec{g})\,\vec{G}) = \gamma_1[\vec{G},[\vec{G}, (\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}]], \tag{3.15}$$

где $\gamma_1 = \frac{1}{6}(c^{(3)}_{001} - 2c^{(3)}_{010} + c^{(3)}_{100})$.

Определим функцию $p=p(\tau)$, $\tau\in[-1, 0]$, формулой $p(\tau)=1+12\tau+ +30\tau^2+20\tau^3$. Легко проверить, что $p\in\mathscr{P}^{(1)}$. Вычисляя для этой функции величину γ_1, получаем $\gamma_1=-1/360360$, т. е. $\gamma_1\neq 0$. Поэтому из (3.14), (3.15) в силу равенства $\vec{W}^{(3)}_j(\sigma')=e^{(\sigma'-T)\,\mathrm{ad}\,\vec{g}}\,\vec{V}^{(3)}_j$ получаем

$$\langle\psi_{x_1}, e^{(\sigma'-T)\mathrm{ad}\vec{g}}\,[\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}]]\,E(x_1)\rangle=0\ \ \forall\sigma'\in O_\sigma,$$

или, что то же самое,

$$\langle\tilde{\psi}(\sigma'), [\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}]]\,E(\tilde{x}(\sigma'))\rangle=0\ \ \forall\sigma'\in O_\sigma, \tag{3.16}$$

где $\psi=\tilde{\psi}(t)$, $t\in[t_0, T]$,— решение сопряженного для (2.1) уравнения, соответствующее оптимальному решению (2.2) в силу принципа максимума Л. С. Понтрягина.

При $m=2$ из (3.5) получаем

$$\vec{V}^{(3)}_2 = \sum_{i+j+k=2} c^{(3)}_{ijk}\,\mathfrak{g}_3((\mathrm{ad}^i\vec{g})\,\vec{G}, (\mathrm{ad}^j\vec{g})\,\vec{G}, (\mathrm{ad}^k\vec{g})\,\vec{G}) =$$

$$=\gamma_2[(\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}]] + \gamma_3[\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}^2\vec{g})\,\vec{G}]],$$

где $\gamma_2 = -\frac{1}{6}(c^{(3)}_{011} - 2c^{(3)}_{101} + c^{(3)}_{110})$, $\gamma_3 = \frac{1}{6}(c^{(3)}_{002} - 2c^{(3)}_{020} + c^{(3)}_{200})$.

Так как отображение $\mathrm{ad}\,\vec{g}\colon \mathrm{Der}(\Phi)\to\mathrm{Der}(\Phi)$ является дифференцированием, то

$$(\mathrm{ad}\vec{g})\,[\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}]] = [\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}^2\vec{g})G]] + [(\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}]].$$

Поэтому

$$\vec{V}_2^{(3)} = \gamma_2\,(\mathrm{ad}\vec{g})\,[\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}]] + (\gamma_3-\gamma_2)\,[\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}^2\vec{g})\,\vec{G}]]. \qquad (3.17)$$

Нетрудно проверить, что функция $p=p(\tau)$, $\tau\in[-1, 0]$, где $p(\tau)=1+12\tau+30\tau^2+20\tau^3$, принадлежит $\mathscr{P}^{(2)}$. Для этой функции имеем $\gamma_3-\gamma_2=-1/72$, т. е. $\gamma_3\neq\gamma_2$. Тогда из (3.14), (3.17) и (3.16) следует, что

$$\langle\tilde{\psi}(\sigma'), [\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}^2\vec{g})\,\vec{G}]]\,E\,(\tilde{x}(\sigma'))\rangle = 0 \quad \forall\sigma'\in O_\sigma. \qquad (3.18)$$

При $m=3$ аналогичным образом из (3.5) получаем

$$\vec{V}_3^{(3)} = \gamma_4\,(\mathrm{ad}^2\vec{g})\,[\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}\vec{g})\,\vec{G}]] + \gamma_5\,(\mathrm{ad}\vec{g})\,[\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}^2\vec{g})\,\vec{G}]] +$$
$$+ \gamma_6\,[\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}^3\vec{g})\,\vec{G}]], \qquad (3.19)$$

где $\gamma_4=\frac{1}{18}(-2v_1+v_2-v_3)$, $\gamma_5=\frac{1}{6}(v_1-v_2)$, $\gamma_6=\frac{1}{18}(-v_1+2v_2+v_3-3v_4)$, $v_1=c^{(3)}_{012}-c^{(3)}_{102}-c^{(3)}_{201}+c^{(3)}_{210}$, $v_2=-c^{(3)}_{012}+c^{(3)}_{120}+c^{(3)}_{021}-c^{(3)}_{210}$, $v_3=-c^{(3)}_{102}+c^{(3)}_{120}+c^{(3)}_{012}-c^{(3)}_{201}$, $v_4=c^{(3)}_{003}-2c^{(3)}_{030}+c^{(3)}_{300}$.

Можно проверить, что функция $p=p(\tau)$, $\tau\in[-1,0]$, $p(\tau)=1+30\tau+210\tau^2+560\tau^3+630\tau^4+252\tau^5$, принадлежит $\mathscr{P}^{(3)}$. Для этой функции находим $\gamma_6=-1/838053216$, т. е. $\gamma_6\neq0$. Следовательно, из (3.14) и (3.19), в силу (3.16) и (3.18), получаем, что

$$\langle\tilde{\psi}(\sigma'), [\vec{G}, [\vec{G}, (\mathrm{ad}^3\vec{g})\,\vec{G}]]\,E\,(\tilde{x}(\sigma'))\rangle = 0 \quad \forall\sigma'\in O_\sigma.$$

Можно показать, что необходимое условие оптимальности третьего порядка (3.14) имеет вид:

$$\langle\psi_{x_1}, e^{(\sigma'-T)\mathrm{ad}\vec{g}}\,[(\mathrm{ad}^i\vec{g})\,\vec{G}, [(\mathrm{ad}^j\vec{g})\,\vec{G}, (\mathrm{ad}^k\vec{g})\,\vec{G}]]\,E\,(x_1)\rangle = 0$$
$$\forall\sigma'\in O_\sigma,\ \forall i+j+k=l,\ l=0, \ldots, m.$$

Литература

1. *Аграчев А. А., Вахрамеев С. А.* Хронологические ряды и теорема Коши — Ковалевской//Пробл. геометрии. Т. 12. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1981. С. 165—189.
2. *Аграчев А. А., Вахрамеев С. А., Гамкрелидзе Р. В.* Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления//Пробл. геометрии. Т. 14 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1983. С. 3—56.
3. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление//Матем. сб. 1978. Т. 107 (149). С. 467—532.
4. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля//Пробл. геометрии. Т. 11. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1980. С. 135—176.
5. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия//Матем. сб. 1976. Т. 100 (142). С. 610—643.
6. *Krener A. J.* The high order maximal principle and its application to singular extremals//SIAM J. Control. 1977. V. 15. P. 256—293.

Одесский государственный университет

Поступила в редакцию 29.VII.1985