Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева, О матричном разложении приведенной кубической иррациональности, *Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 1, 34–55

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 511.9.

# О МАТРИЧНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПРИВЕДЕННОЙ КУБИЧЕСКОЙ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ[1]

Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева (г. Тула, г. Москва)

**Аннотация**

В данной работе рассмотрено матричное разложение приведенной кубической иррациональности $\alpha$, удовлетворяющей уравнению

$$x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0.$$

Для матричного разложения

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 310941 \cdot k + 155427 & 156744 \cdot k + 78333 \\ 61578 \cdot k + 30882 & 31041 \cdot k + 15564 \end{pmatrix}$$

построен алгоритм перехода к обычной непрерывной дроби.

Ключевые слова: непрерывная дробь, матричное разложение, приведенная кубическая иррациональность, алгоритм перехода от матричного разложения к непрерывной дроби.
Библиография: 2 названия.

# ON MATRIX DECOMPOSITION OF ONE REDUCED CUBIC IRRATIONAL

N. M. Dobrovol'skii, V. N. Soboleva, D. K. Sobolev (Tula, Moscow)

**Abstract**

In this work we considered the matrix decomposition of the cubic irrational $\alpha$ satisfying the equation

$$x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0.$$

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ 11-01-00571

For decomposition of the matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 310941 \cdot k + 155427 & 156744 \cdot k + 78333 \\ 61578 \cdot k + 30882 & 31041 \cdot k + 15564 \end{pmatrix}$$

an algorithm of transition to regular continued fraction is constructed.

Keywords: continued fraction, matrix decomposition, reduced cubic irrational, algorithm of transition from matrix decomposition to continued fraction.

Bibliography: 2 titles.

*Посвящается 85-й годовщине со дня рождения*
*Зинаиды Никитичны Добровольской*
*(01.02.1928 — 30.06.1950)*



# 1. Введение

Пусть $\alpha$ приведенная кубическая иррациональность, то есть $\alpha^{(1)} = \alpha > 1$, а сопряженные алгебраические иррациональности удовлетворяют соотношению $-1 < \alpha^{(3)} < \alpha^{(2)} < 0$. Понятие приведенной кубической иррациональности является естественным обобщением приведенной квадратической иррациональности.

Нетрудно видеть, что положительный корень $\alpha$ уравнения

$$x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

является приведенной кубической иррациональностью.

Действительно, для многочлена $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 1$ имеем:

$$f(-1) = f(0) = f(5) = -1, \quad f(6) = 41, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

поэтому $\alpha = \alpha^{(1)} > 5$, $-1 < \alpha^{(3)} < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < \alpha^{(2)} < 0$.

В работах [1] и [2] рассматриваются матричные разложения алгебраических иррациональностей. В частности, для кубической иррациональности $\alpha$, удовлетворяющей уравнению

$$f(t) = t^3 + at^2 + bt + c, \quad f(\alpha) = 0$$

дается матричное разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \left( \begin{pmatrix} t & -at^2 - 2bt - 3c \\ 1 & 3t^2 + 2at + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ 0 & 3k+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 + 2at + b & -at^2 - 2bt - 3c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ab - 9c & 2b^2 - 6ac \\ 2a^2 - 6b & ab - 9c \end{pmatrix} \right) \quad (1)$$

и утверждается, что оно сходится при $t$, для которых разность $|t - \alpha|$ мала.

Общее определение сходимости матричного разложения следующее.

Определение 1. *Говорят, что матричное разложение*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*сходится к числу $\alpha$, если для матриц*

$$M_n = \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

*выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha.$$

*В этом случае пишется*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

Цель данной работы — получить новую форму матричного разложения приведенной кубической иррациональности $\alpha$, рассмотреть реализацию алгоритма Лагранжа разложения этой иррациональности в обыкновенную непрерывную дробь, построить алгоритм перевода матричного разложения в обыкновенную цепную дробь, сравнить результаты работы двух алгоритмов.

Во втором разделе рассматривается алгоритм Лагранжа разложения в непрерывную дробь для произвольной приведенной иррациональности $n$-ой степени.

Третий раздел содержит описание основных свойств матричных разложений.

Четвертый раздел посвящен построению алгоритма перевода матричного разложения в обыкновенную непрерывную дробь.

Пятый раздел содержит сравнение результатов работы двух алгоритмов для приведенной кубической иррациональности $\alpha$.

## 2. Алгоритм Лагранжа для приведенной алгебраической иррациональности $n$-ой степени

Прежде всего дадим определение приведенной алгебраической иррациональности $n$-ой степени.

Определение 2. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

*— произвольный целочисленный неприводимый многочлен*[2]*, у которого все корни* $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие условию*

$$-1 < \alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < 0, \quad \alpha^{(1)} > 1,$$

*тогда алгебраическое число* $\alpha = \alpha^{(1)}$ *называется приведенной алгебраической иррациональностью степени* $n$.

Заметим, что для минимального многочлена $f(x)$, задающего приведенную алгебраическую иррациональность $\alpha$ степени $n$, всегда выполнено неравенство $a_0 < 0$, так как на промежутке $[0; \infty)$ имеется только один корень $\alpha$, при $x > \alpha$ имеем $f(x) > 0$, поэтому $f(0) < 0$.

Для любого вещественного $\alpha$, являющегося приведенной алгебраической иррациональностью степени $n$, рассмотрим разложение в бесконечную непрерывную дробь

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Как обычно через $P_k$ и $Q_k$ будем обозначать числитель и знаменатель $k$-ой подходящей дроби

$$\frac{P_k}{Q_k} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k}}}, \quad k \geqslant 0,$$

[2]В частности, неприводимость многочлена означает, что $(a_0, \ldots, a_n) = 1$.

а через $\alpha_k$ — $k$-ую остаточную дробь

$$\alpha_k = q_k + \cfrac{1}{q_{k+1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \quad k \geqslant 0.$$

Таким образом $\alpha = \alpha_0$ и справедливо равенство

$$\alpha = \frac{\alpha_{k+1} P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}, \quad k \geqslant 0,$$

если принять обычное соглашение, что $P_{-1} = 1$ и $Q_{-1} = 0$.

Лемма 1. *Для произвольной приведенной алгебраической иррациональности $\alpha$ степени $n$ её остаточная дробь $\alpha_1$ также является приведенной алгебраической иррациональностью степени $n$, удовлетворяющей неприводимому многочлену*

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

*где*

$$a_{k,1} = \frac{b_k}{d}, \quad d = (b_0, \ldots, b_n), \quad b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$g(x) = -f\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

Так как $\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, то $g(\alpha_1) = 0$.

Справедливы равенства

$$f\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} (q_0 x + 1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \sum_{m=0}^{k} C_k^m q_0^m x^m =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{m=n-k}^{n} C_k^{m+k-n} q_0^{m+k-n} x^m = \sum_{k=0}^{n} x^k \sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n},$$

поэтому

$$b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

и $b_n = -f(q_0)$. Так как $q_0 < \alpha$, $f(\alpha) = 0$, $a_n > 0$ и $\alpha$ — единственный положительный корень многочлена $f(x)$, то $f(q_0) < 0$ и, следовательно, $b_n > 0$.

Поэтому, разделив многочлен $g(x)$ на наибольший общий делитель его коэффициентов, получим неприводимый многочлен $f_1(x)$.

Далее заметим, что корням $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ многочлена $f(x)$ соответствуют корни $\beta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ многочлена $g(x)$, которые связаны равенствами

$$\alpha^{(k)} = q_0 + \frac{1}{\beta^{(k)}}, \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)} - q_0} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что

$$-1 < \beta^{(k)} < 0 \quad (2 \leqslant k \leqslant n), \beta^{(1)} > 1$$

и, значит, $\alpha_1 = \beta^{(1)}$ — приведенная алгебраическая иррациональность степени $n$. Лемма полностью доказана. □

Теорема 1. *Для произвольной приведенной алгебраической иррациональности $\alpha$ степени $n$ все её остаточные дроби $\alpha_m$ также являются приведенными алгебраическими иррациональностями степени $n$, удовлетворяющими неприводимым многочленам*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$

*где*

$$a_{k,m} = \frac{b_{k,m}}{d_m}, \quad d_m = (b_{0,m}, \ldots, b_{n,m}),$$
$$b_{k,m} = -\sum_{l=n-k}^{n} a_{l,m-1} C_l^{l+k-n} q_{m-1}^{l+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Доказательство. Действительно, утверждение теоремы следует по индукции из леммы 1. □

Теорема 2. *Неполное частное $q_k$ определяется однозначно как натуральное число, удовлетворяющие условию*

$$f_k(q_k) < 0, \quad f_k(q_k + 1) > 0.$$

Доказательство. Действительно, так как $f_k(\alpha_k) = 0$, $q_k < \alpha_k < q_k + 1$, $a_{n,k} > 0$ и $\alpha_k$ — единственный положительный корень многочлена $f_k(x)$, то $f_k(q_k) < 0$ и $f_k(q_{k+1}) > 0$. □

Нетрудно понять, что для вычисления $q_k$ требуется $O(\ln q_k)$ вычислений значений $f_k(x)$. Действительно, рассмотрим последовательность $f_k(1)$, $f_k(2)$, ..., $f_k(2^m)$, $f_k(2^{m+1})$, где $m = [\log_2(q_k)]$. Ясно, что $f_k(2^j) < 0$ при $0 \leqslant j \leqslant m$ и

$f_k(2^{m+1}) > 0$. Далее методом деления пополам стягиваем отрезок $[2^m; 2^{m+1}]$ до отрезка $[q_k; q_k + 1]$, что потребует ещё вычисления $m$ значений $f_k(x)$.

Таким образом описание версии алгоритма Лагранжа для вычисления неполных частных разложения приведенной алгебраической иррациональности $\alpha$ степени $n$ в цепную дробь закончено.

Теорема 1 обобщается на случай цепной дроби произвольной чисто-вещественной алгебраической иррациональности $\alpha$ степени $n$. Докажем предварительно лемму о преобразовании корней.

Лемма 2. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

*— произвольный целочисленный неприводимый многочлен, у которого все корни* $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие условию*

$$\alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < \alpha^{(1)},$$

*и для целого* $q$ *справедливы неравенства*

$$\begin{cases} \alpha^{(k)} < q & \text{при } k \geqslant k_0, \\ q < \alpha^{(k)} < q + 1 & \text{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ \alpha^{(k)} > q + 1 & \text{при } k_1 > k \geqslant 1, \end{cases}$$

*тогда многочлен*

$$g(x) = -f\left(q + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

*имеет корни* $\beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)} - q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\begin{cases} \beta^{(k)} < 0 & \text{при } k \geqslant k_0, \\ 1 < \beta^{(k)} & \text{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ 0 < \beta^{(k)} < 1 & \text{при } k_1 > k \geqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение леммы доказывается аналогично доказательству леммы 1. □

Теорема 3. *Для произвольной чисто-вещественной алгебраической иррациональности* $\alpha$ *степени* $n$ *все её остаточные дроби* $\alpha_m$, *начиная с некоторого номера* $m_0 + 1$, *являются приведенными алгебраическими иррациональностями степени* $n$.

Доказательство. Действительно, пусть $\alpha = \alpha^{(j)}$ и

$$\alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < \alpha^{(1)}$$

— вещественные корни целочисленного неприводимого многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0.$$

Пусть $q_0 = [\alpha]$, $k_{0,0} = k_0$ и $k_{1,0} = k_1$ определены как и в лемме 2 при $q = q_0$, тогда $k_{0,0} > j \geqslant k_{1,0}$ и многочлен

$$f_1(x) = -f\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1} x^k$$

имеет корни

$$\alpha_1^{(n)} < \ldots < \alpha_1^{(2)} < \alpha_1^{(1)},$$

среди которых $n+1-k_{0,0}$ отрицательных корней, $k_{1,0}-1$ положительных, меньше 1 и $k_{0,0} - k_{1,0}$ положительных корней больше 1.

Заметим, что остаточная дробь $\alpha_1 = \alpha_1^{(j_1)}$ и $k_{0,0} - k_{1,0} \geqslant j_1 \geqslant 1$.

Пусть уже определен целочисленный многочлен $f_m(x)$ для остаточной дроби $\alpha_m = \alpha_m^{(j_m)}$, тогда, полагая $q = q_m = [\alpha_m]$, $k_{0,m} = k_0$ и $k_{1,m} = k_1$ определены как и в лемме 2, тогда $k_{0,m} > j_m \geqslant k_{1,m}$ и многочлен

$$f_{m+1}(x) = -f_m\left(q_m + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m+1} x^k$$

имеет корни

$$\alpha_{m+1}^{(n)} < \ldots < \alpha_{m+1}^{(2)} < \alpha_{m+1}^{(1)},$$

среди которых $n+1-k_{0,m}$ отрицательных корней, $k_{1,m}-1$ положительных, меньше 1 и $k_{0,m} - k_{1,m}$ положительных корней больше 1.

Заметим, что остаточная дробь $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+1}^{(j_{m+1})}$ и $k_{0,m} - k_{1,m} \geqslant j_{m+1} \geqslant 1$.

Из доказательства леммы 2 следует, что $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_m \geqslant \ldots$; $k_{0,1} \geqslant$ $\geqslant k_{0,2} = k_{0,1} - k_{1,0} + 1 \geqslant \ldots \geqslant k_{0,m} = k_{0,m-1} - k_{1,m-1} + 1 \geqslant \ldots$.

Величины $k_{0,m}$, $k_{1,m}$ имеют простой смысл — числа $\alpha_m^{(\nu)}$ при $k_{0,m} > \nu \geqslant k_{1,m}$ являются $m-$ыми остаточными дробями для чисел $\alpha^{(\nu+j-j_m)}$. Так как из однозначности разложения числа в цепную дробь следует, что найдется $m_0$ такое, что неполные частные $q_k$ при $0 \leqslant k < m_0 - 1$ одинаковые для чисел $\alpha^{(\nu)}$ при $k_2 \geqslant \nu \geqslant k_3$, $k_2 \geqslant j \geqslant k_3$ и неполное частное $q_{m_0-1}$ для числа $\alpha = \alpha^{(j)}$ отлично от соответствующих неполных частных для чисел $\alpha^{(\nu)}$ при $k_2 \geqslant \nu \geqslant k_3$, то $k_{0,m_0-1} = k_{1,m_0-1} + 1$, $k_{0,m_0} = 2$, $k_{1,m_0} = 1$. Отсюда следует, что $\alpha_{m_0+1} = \alpha_{m_0+1}^{(1)}$ является приведенной алгебраической иррациональностью. □

Остановимся на описании целого класса приведенных кубических иррациональностей.

Рассмотрим при натуральном $p \geqslant 4$ многочлены

$$f(p,x) = x(x+1)(x-p) - 1 = x^3 - (p-1)x^2 - px - 1.$$

Утверждается, что положительный корень $\alpha(p)$ уравнения $f(p,x)=0$ является приведенной кубической иррациональностью.

Действительно, для многочлена $f(p,x)=x^3-(p-1)x^2-px-1$ имеем:

$$f(p,-1)=f(p,0)=f(p,p)=-1, \quad f(p+1)=p^2+3p+1>0,$$
$$f\left(p,-\frac{1}{2}\right)=\frac{2p+1}{8}-1>0,$$

поэтому $p+1>\alpha(p)=\alpha^{(1)}>p$, $-1<\alpha^{(3)}<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<\alpha^{(2)}<0$. Так как многочлен $f(p,x)$ не имеет рациональных корней, то он неприводим.

```
cfki1(p,n) := | a ← (−1  −p  −p+1  1)^T, q_{floor((n−1)/40),39} ← 0, q_{0,0} ← p, D^⟨0⟩ ← a, D^⟨n⟩ ← a
              | l0 ← 0, l1 ← 1, b ← p
              | for k ∈ 1..n−1
              |   | r ← b, a ← (−a3  −a3·3·r − a2  −a3·3·r^2 − a2·2·r − a1  −a3·r^3 − a2·r^2 − a1·r − a0)^T
              |   | d ← −a0
              |   | for j ∈ 1..3
              |   |   | m ← d, l ← aj
              |   |   | r ← m, m ← l, l ← r  if m > 1
              |   |   | while m > 0
              |   |   |   r ← floor(l/m), r1 ← l − r·m, l ← m, m ← r1
              |   |   | d ← l
              |   | b ← 1, c ← 2, D^⟨k⟩ ← a
              |   | while [(a3·c + a2)·c + a1]·c + a0 < 0
              |   |   b ← c, c ← 2·c
              |   | m ← b
              |   | while m ≥ 1
              |   |   | r ← b + m, f ← [(a3·r + a2)·r + a1]·r + a0
              |   |   | b ← r  if f < 0
              |   |   | c ← r  otherwise
              |   |   | m ← m/2
              |   | q_{l0,l1} ← b, l1 ← l1 + 1
              |   | l0 ← l0 + 1, l1 ← 0  if l1 = 40
              | q
```

Рисунок 1.

На рисунке 1 приводится текст программы вычисления неполных частных приведенных кубических иррациональностей $\alpha(p)$.

Для заданного натурального $p \geqslant 4$ программа вычисляет $n$ неполных частных разложения $\alpha(p)$ в непрерывную дробь в виде таблицы по 40 значений в одной строке.

## 3. Свойства матричных разложений

В этой работе мы будем рассматривать только неотрицательные целочисленные невырожденные матрицы.

Отметим несколько простейших свойств матричных разложений.

Лемма 3. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*— сходящиеся матричное разложение, $i_1 < \ldots i_n < \ldots$ — произвольная монотонная последовательность натуральных чисел и $i_0 = 0$. Если матрицы $m_k$ заданы равенствами*

$$m_k = \prod_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

*то матричное произведение*

$$\prod_{k=0}^{\infty} m_k$$

*сходится к числу $\alpha$.*

Доказательство. Действительно, если

$$\prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = M_n \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} M_n,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha,$$

а, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{i_k-1}}{C_{i_k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{B_{i_k-1}}{D_{i_k-1}} = \alpha.$$

Но, применяя сочетательный закон матричного умножения, получим

$$\prod_{k=0}^{n} m_k = \prod_{k=0}^{n} \left( \prod_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \right) = \prod_{k=0}^{i_{n+1}-1} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_{i_{n+1}-1} & B_{i_{n+1}-1} \\ C_{i_{n+1}-1} & D_{i_{n+1}-1} \end{pmatrix} = M_{i_{n+1}-1},$$

поэтому матричное произведение

$$\prod_{k=0}^{\infty} m_k$$

сходится к числу $\alpha$. □

Лемма 4. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*— сходящиеся матричное разложение и*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \geqslant 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

*тогда матричное произведение*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*сходится к числу* $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$.

Доказательство. Действительно, если

$$\prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha,$$

а, следовательно,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA_n + bC_n & aB_n + bD_n \\ cA_n + dC_n & cB_n + dD_n \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{aA_n + bC_n}{cA_n + dC_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\frac{A_n}{C_n} + b}{c\frac{A_n}{C_n} + d} = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\frac{B_n}{D_n} + b}{c\frac{B_n}{D_n} + d} = \lim_{n\to\infty} \frac{aB_n + bD_n}{cB_n + dD_n},$$

поэтому лемма полностью доказана, так как все матрицы неотрицательные и $\alpha > 0$. □

Лемма 5. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*— сходящиеся матричное разложение, тогда для любого* $n > 0$ *матричное произведение*

$$\prod_{k=n}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*сходится к числу* $\beta_n$ *и* $\alpha = \frac{A_{n-1}\beta_n + B_{n-1}}{C_{n-1}\beta_n + D_{n-1}}$.

Доказательство. Действительно, утверждение леммы следует из предыдущей леммы при $a = A_{n-1}$, $b = B_{n-1}$, $c = C_{n-1}$ и $d = D_{n-1}$. □

Лемма 6. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*— сходящиеся матричное разложение,* $i_1 < \ldots i_n < \ldots$ *— произвольная монотонная последовательность неотрицательных целых чисел и*

$$\begin{pmatrix} a_{i_j} & b_{i_j} \\ c_{i_j} & d_{i_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j & 0 \\ 0 & f_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

*тогда матричное произведение*

$$\prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=i_{j-1}+1}^{i_j-1} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix},$$

*где* $i_0 = -1$, *сходится к числу* $\alpha$.

Доказательство. Действительно, пусть

$$M_n = \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix},$$

$$M'_m = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=i_{j-1}+1}^{i_j-1} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_m & B'_m \\ C'_m & D'_m \end{pmatrix}, \quad F_m = \prod_{j=1}^{m} f_j,$$

тогда

$$M_{i_m} = \begin{pmatrix} A_{i_m} & B_{i_m} \\ C_{i_m} & D_{i_m} \end{pmatrix} = F_m M'_m = \begin{pmatrix} F_m A'_m & F_m B'_m \\ F_m C'_m & F_m D'_m \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\alpha = \lim_{m\to\infty} \frac{A_{i_m}}{C_{i_m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{A'_m}{C'_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{B'_m}{D'_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{B_{i_m}}{D_{i_m}}$$

и лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*— сходящиеся матричное разложение к иррациональному числу* $\alpha$, *тогда все матрицы, входящие в разложение, — неособенные.*

Доказательство. В самом деле, пусть матрица

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

— особенная. Тогда и матрица

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

также будет особенной, то есть $\frac{B_n}{D_n} = \frac{A_n}{C_n}$ или $C_n = mA_n$, $D_n = mB_n$. Вычисляя

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} & B_{n+1} \\ C_{n+1} & D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что $\frac{A_{n+1}}{C_{n+1}} = \frac{B_{n+1}}{D_{n+1}} = \frac{A_n}{C_n}$ и, вообще, $\frac{A_k}{C_k} = \frac{B_k}{D_k} = \frac{A_n}{C_n}$ при $k \geqslant n$, поэтому лемма доказана. □

Положим $\Delta_n = \det M_n = A_n D_n - B_n C_n$, $\delta_n = a_n d_n - b_n c_n$.

Лемма 8. *Пусть в бесконечном матричном произведении*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

*все матрицы — неособенные, целочисленные, положительные с условием*

$$\delta_k < 0, \quad \min\left(\frac{|\delta_n|}{a_n d_n}, \frac{|\delta_n|}{c_n b_n}\right) \leqslant \delta < 1,$$

*тогда матричное произведение сходится.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что

$$\begin{aligned} \Delta_n = \det M_n = A_n D_n - B_n C_n = \\ = (A_{n-1}a_n + B_{n-1}c_n)(C_{n-1}b_n + D_{n-1}d_n) - \\ -(A_{n-1}b_n + B_{n-1}d_n)(C_{n-1}a_n + D_{n-1}c_n) = \\ = (A_{n-1}D_{n-1} - B_{n-1}C_{n-1})(a_n d_n - b_n c_n) = \Delta_{n-1}\delta_n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\Delta_n = (-1)^{n+1}|\Delta_n| \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Рассмотрим разности $\frac{A_n}{C_n} - \frac{B_n}{D_n}$ при $n = 0, 1, \ldots$. Имеем:

$$\frac{A_n}{C_n} - \frac{B_n}{D_n} = \frac{\Delta_n}{C_n D_n} = \frac{\Delta_{n-1}\delta_n}{(C_{n-1}a_n + D_{n-1}c_n)(C_{n-1}b_n + D_{n-1}d_n)},$$

$$\left|\frac{A_n}{C_n}-\frac{B_n}{D_n}\right| \leqslant \frac{|\Delta_{n-1}|}{C_{n-1}D_{n-1}}\min\left(\frac{|\delta_n|}{a_nd_n},\frac{|\delta_n|}{c_nb_n}\right) < \frac{|\Delta_{n-1}|\delta}{C_{n-1}D_{n-1}};$$

$$\frac{A_n}{C_n}-\frac{A_{n-1}}{C_{n-1}} = \frac{(A_{n-1}a_n+B_{n-1}c_n)C_{n-1}-A_{n-1}(C_{n-1}a_n+D_{n-1}c_n)}{C_nC_{n-1}} =$$
$$= \frac{c_n(B_{n-1}C_{n-1}-A_{n-1}D_{n-1})}{C_nC_{n-1}} = \frac{-c_n\Delta_{n-1}}{C_nC_{n-1}};$$

$$\frac{B_n}{D_n}-\frac{B_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{(A_{n-1}b_n+B_{n-1}d_n)D_{n-1}-B_{n-1}(C_{n-1}b_n+D_{n-1}d_n)}{D_nD_{n-1}} =$$
$$= \frac{b_n(A_{n-1}D_{n-1}-B_{n-1}C_{n-1})}{D_nD_{n-1}} = \frac{b_n\Delta_{n-1}}{D_nD_{n-1}};$$

$$\frac{A_n}{C_n}-\frac{B_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{(A_{n-1}a_n+B_{n-1}c_n)D_{n-1}-(C_{n-1}a_n+D_{n-1}c_n)B_{n-1}}{C_nD_{n-1}} =$$
$$= \frac{a_n(A_{n-1}D_{n-1}-B_{n-1}C_{n-1})}{C_nD_{n-1}} = \frac{a_n\Delta_{n-1}}{C_nD_{n-1}};$$

$$\frac{B_n}{D_n}-\frac{A_{n-1}}{C_{n-1}} = \frac{(A_{n-1}b_n+B_{n-1}d_n)C_{n-1}-(C_{n-1}b_n+D_{n-1}d_n)A_{n-1}}{D_nC_{n-1}} =$$
$$= \frac{-d_n(A_{n-1}D_{n-1}-B_{n-1}C_{n-1})}{D_nC_{n-1}} = \frac{-d_n\Delta_{n-1}}{D_nC_{n-1}}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$\frac{A_0}{C_0} < \frac{B_0}{D_0}, \quad \frac{A_{2k}}{C_{2k}} < \frac{B_{2k}}{D_{2k}}, \quad \frac{B_{2k+1}}{D_{2k+1}} < \frac{A_{2k+1}}{C_{2k+1}},$$
$$\left[\frac{A_0}{C_0};\frac{B_0}{D_0}\right] \supset \left[\frac{B_1}{D_1};\frac{A_1}{C_1}\right] \supset \left[\frac{A_2}{C_2};\frac{B_2}{D_2}\right] \supset \ldots \supset$$
$$\supset \left[\frac{A_{2k}}{C_{2k}};\frac{B_{2k}}{D_{2k}}\right] \supset \left[\frac{B_{2k+1}}{D_{2k+1}};\frac{A_{2k+1}}{C_{2k+1}}\right] \supset \left[\frac{A_{2k+2}}{C_{2k+2}};\frac{B_{2k+2}}{D_{2k+2}}\right] \supset \ldots$$

Таким образом, мы имеем стягивающуюся последовательность вложенных отрезков, а значит последовательность их концов сходится к общему пределу, что и доказывает утверждение леммы. □

Заметим, что из доказательства леммы следует, что имеем две монотонные последовательности дробей, сходящихся к $\alpha$:

$$\frac{A_0}{C_0} < \frac{B_1}{D_1} < \frac{A_2}{C_2} < \ldots < \frac{A_{2k}}{C_{2k}} < \frac{B_{2k+1}}{D_{2k+1}} < \frac{A_{2k+2}}{C_{2k+2}} < \ldots, \tag{2}$$

$$\frac{B_0}{D_0} > \frac{A_1}{C_1} > \frac{B_2}{D_2} > \ldots > \frac{B_{2k}}{D_{2k}} > \frac{A_{2k+1}}{C_{2k+1}} > \frac{B_{2k+2}}{D_{2k+2}} > \ldots. \tag{3}$$

Рассмотрим следующую последовательность матриц:

$$M_n = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{n+1}+(-1)^{n+1} & 2\cdot 2^n+(-1)^n \\ 2^{n+1} & 2^n \end{pmatrix} \quad (n \geqslant 0). \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что

$$M_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_n = M_{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \geqslant 1).$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n + (-1)^n & 2 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1} \\ 2^n & 2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{n+1} + (-1)^{n+1} & 2 \cdot 2^n + (-1)^n \\ 2^{n+1} & 2^n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$M_n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^n$$

и матричное произведение

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

сходится к натуральному числу 2, то есть имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Последовательность матриц (4) и матричное произведение (5) демонстрируют, что не всякое матричное произведение можно перевести в обыкновенную цепную дробь.

Выделим класс матриц $\mathfrak{M}^+$ и подклассы $\mathfrak{M}^+(q)$, $\mathfrak{M}^\pm$, $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{M}^*(q)$ $(q \in \mathbb{N})$.

Определение 3. *Будем говорить, что целочисленная неотрицательная матриц $M \in \mathfrak{M}^+$, если выполнены условия*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; a \geqslant c \geqslant 0, \; b \geqslant d \geqslant 0, \quad \det M = ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

*Подкласс $\mathfrak{M}^\pm$ задается равенством*

$$\mathfrak{M}^\pm = \left\{ M \in \mathfrak{M}^+ | \det M < 0 \right\}, \tag{7}$$

*а подкласс $\mathfrak{M}^+(q)$ — равенством*

$$\mathfrak{M}^+(q) = \left\{ M \in \mathfrak{M}^+ \left| \left[ \frac{a}{c} \right] = \left[ \frac{b}{d} \right] = q \right. \right\}, \tag{8}$$

Лемма 9. *$\mathfrak{M}^+$ — мультипликативная полугруппа.*
*Для любых матриц $M, K, L \in \mathfrak{M}^\pm$ справедливо включение*

$$M \cdot K \cdot L \in \mathfrak{M}^\pm.$$

Доказательство. Действительно, если

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad M, K \in \mathfrak{M}^+,$$

то

$$ae + bg \geqslant ce + dg \geqslant 0, \quad af + bh \geqslant cf + dh \geqslant 0, \quad \det MK = \det M \det K \neq 0,$$

поэтому $M \cdot K \in \mathfrak{M}^+$ и первое утверждение леммы доказано.

Если

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M \cdot K \cdot L,$$

то $a \geqslant c \geqslant 0$, $b \geqslant d \geqslant 0$ и $\det M \cdot K \cdot L < 0$ и лемма полностью доказана. □

Определение 4. *Будем говорить, что целочисленная неотрицательная матриц $M \in \mathfrak{M}^*$, если выполнены условия*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^\pm, \quad \left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{b}{d}\right] \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

*Подкласс $\mathfrak{M}^*(q)$ задается равенством*

$$\mathfrak{M}^*(q) = \left\{ M \in \mathfrak{M}^* \,\middle|\, \left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{b}{d}\right] = q \right\}. \tag{10}$$

Ясно, что

$$\mathfrak{M}^* = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^*(q).$$

Лемма 10. *Пусть матрица*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^*(q)$$

*и*

$$K = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

*— произвольная невырожденная целочисленная матрица, удовлетворяющая условию* $\det K > 0$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1 \geqslant 0$, *тогда* $M \cdot K \in \mathfrak{M}^*(q)$.

Доказательство. Действительно, из условия следует, что $a = qc + r$, $0 \leqslant r < c$, $b = qd + s$, $0 \leqslant s < d$. Далее имеем:

$$M \cdot K = \begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} q(ca_1 + dc_1) + ra_1 + sc_1 & q(cb_1 + dd_1) + rb_1 + sd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det M \cdot K < 0$, $0 \leqslant ra_1 + sc_1 < ca_1 + dc_1$, $0 \leqslant rb_1 + sd_1 < cb_1 + dd_1$, то

$$\left[\frac{aa_1 + bc_1}{ca_1 + dc_1}\right] = \left[\frac{ab_1 + bd_1}{cb_1 + dd_1}\right] = q$$

и утверждение леммы полностью доказано. □

Теорема 4. *Пусть в бесконечном матричном произведении*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} m_k, \quad m_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \tag{11}$$

*все матрицы $m_k \in \mathfrak{M}^*$, тогда матричное произведение сходится к числу $\alpha > 1$.*

*Если число $\alpha$ — иррациональное, то для любой матрицы $m \in \mathfrak{M}^+ \setminus \mathfrak{M}^*$ и $n \in \mathbb{N}$ найдется $t \geqslant n$ такое, что*

$$m \prod_{k=n}^{t} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^*.$$

Доказательство. Положим $q_k = \left[\frac{a_k}{c_k}\right] = \left[\frac{b_k}{d_k}\right]$ и $\alpha_k = \left\{\frac{a_k}{c_k}\right\}$, $\beta_k = \left\{\frac{b_k}{d_k}\right\}$, тогда $a_k = (q_k + \alpha_k) \cdot c_k$, $b_k = (q_k + \beta_k)d_k$ и $\delta_k = a_k d_k - b_k c_k = c_k d_k(\alpha_k - \beta_k) < 0$. Поэтому

$$\min\left(\frac{|\delta_k|}{a_k d_k}, \frac{|\delta_k|}{c_k b_k}\right) = \min\left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{q_k + \alpha_k}, \frac{\beta_k - \alpha_k}{q_k + \beta_k}\right) < \frac{\beta_k}{1 + \beta_k} < \frac{1}{2}$$

и по лемме 8 матричное произведение (11) сходится к числу $\alpha > q_0 \geqslant 1$.

Пусть

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M_{n,t} = \prod_{k=n}^{t} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = M_{n-1}^{-1} M_t = \begin{pmatrix} A_{n,t} & B_{n,t} \\ C_{n,t} & D_{n,t} \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 5 имеем:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_{n,t}}{C_{n,t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{B_{n,t}}{D_{n,t}} = \beta_n.$$

Так как $\alpha$ — иррациональное число, то и $\beta_n$ — иррациональное число для любого натурального $n$.

Заметим, что

$$m \cdot M_{n,t} = \begin{pmatrix} aA_{n,t} + bC_{n,t} & aB_{n,t} + bD_{n,t} \\ cA_{n,t} + dC_{n,t} & cB_{n,t} + dD_{n,t} \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{aA_{n,t} + bC_{n,t}}{cA_{n,t} + dC_{n,t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{aB_{n,t} + bD_{n,t}}{cB_{n,t} + dD_{n,t}} = \frac{a\beta_n + b}{c\beta_n + d} \notin \mathbb{Q},$$

поэтому найдется натуральное $t_0$ такое, что для любого $t \geqslant t_0$ выполняется равенство

$$\left[\frac{aA_{n,t} + bC_{n,t}}{cA_{n,t} + dC_{n,t}}\right] = \left[\frac{a\beta_n + b}{c\beta_n + d}\right] = \left[\frac{aB_{n,t} + bD_{n,t}}{cB_{n,t} + dD_{n,t}}\right],$$

что и доказывает утверждение теоремы, если положить

$$t = \begin{cases} t_0, & \text{при } \det m \cdot (-1)^{t_0-n} > 0, \\ t_0 + 1, & \text{при } \det m \cdot (-1)^{t_0-n} < 0. \end{cases}$$

□

Лемма 11. *Пусть матрица*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q),$$

*тогда её можно представить в виде*

$$M = \left(\prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot K \qquad (12)$$

*и матрица*

$$K = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^+ \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $M \in \mathfrak{M}^+(q)$, то

$$M = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ a - qc & b - qd \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a - qc & b - qd \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^+$$

и это представление единственное. Отметим, что $\max(c, d) > \max(a - qc, b - qd)$, $\max(a, b) \geqslant \max(c, d)$. Поэтому, если

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a - qc & b - qd \end{pmatrix} \in \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q),$$

то процесс выделения сомножителей вида

$$\begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

можно продолжить, но он оборвется за конечное число шагов. Оставшаяся матрица $K$, будет принадлежать множеству

$$\mathfrak{M}^+ \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q).$$

□

# 4. Алгоритм перевода матричного разложения в обыкновенную цепную дробь

Для $\alpha(p)$ рассмотрим матричное разложение (1) при $t = p$, $a = -p + 1$, $b = -p$ и $c = -1$, получим

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha(p) \\ 1 \end{pmatrix} &= \prod_{k=0}^{\infty} \left( \begin{pmatrix} p & p^3 + p^2 + 3 \\ 1 & p^2 + p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ 0 & 3k+1 \end{pmatrix} \cdot \right. \\
&\left. \cdot \begin{pmatrix} p^2 + p & p^3 + p^2 + 3 \\ 1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 - p + 9 & 2p^2 - 6p + 6 \\ 2p^2 + 2p + 2 & p^2 - p + 9 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} M(p,k), \qquad (13)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M(p,k) = &\begin{pmatrix} p & p^3 + p^2 + 3 \\ 1 & p^2 + p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ 0 & 3k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 + p & p^3 + p^2 + 3 \\ 1 & p \end{pmatrix} \cdot \\
&\cdot \begin{pmatrix} p^2 - p + 9 & 2p^2 - 6p + 6 \\ 2p^2 + 2p + 2 & p^2 - p + 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k(p) & B_k(p) \\ C_k(p) & D_k(p) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_k(p) &= (27 + 9p + 33p^2 + 32p^3 + 8p^4 + 10p^5 + 4p^6)k + \\
&\quad + 9 + 5p + 16p^2 + 16p^3 + 4p^4 + 5p^5 + 2p^6, \\
B_k(p) &= (18 + 36p + 12p^2 + 24p^3 + 8p^4 + 4p^5 + 2p^6)k + \\
&\quad + 6 + 21p + 5p^2 + 12p^3 + 4p^4 + 2p^5 + p^6, \\
C_k(p) &= (6 + 24p + 26p^2 + 8p^3 + 10p^4 + 4p^5)k + \\
&\quad + 4 + 13p + 14p^2 + 4p^3 + 5p^4 + 2p^5, \\
D_k(p) &= (27 + 9p + 21p^2 + 8p^3 + 4p^4 + 2p^5)k + \\
&\quad + 18 + 4p + 11p^2 + 4p^3 + 2p^4 + p^5.
\end{aligned}$$

В следующей программе на рисунке 2 реализован алгоритм перехода от матричного разложения $\alpha(5)$ к обычной непрерывной дроби.

Символьные вычисления дают следующие значения:

$$M(4,k)=\begin{pmatrix} 31311k+15645 & 16226k+8106 \\ 7686k+3864 & 3983k+2002 \end{pmatrix},$$
$$M(5,k)=\begin{pmatrix} 103647k+51809 & 52248k+26111 \\ 20526k+10294 & 10347k+5188 \end{pmatrix}$$

Значение $M(5,k)$ использовано в указанной программе.

```
cfki(n) := | M ← (1 0; 0 1), j ← 0, l ← 0
           | for k ∈ 0..n
           |   | M ← M·(103647·k + 51809   52248·k + 26111;
           |   |        20526·k + 10294    10347·k + 5188)
           |   | A ← M[0,0], B ← M[0,1], C ← M[1,0], D ← M[1,1]
           |   | r ← floor(A/C)
           |   | while r = floor(B/D)
           |   |   | r1 ← A − C·r, A ← C, C ← r1
           |   |   | r1 ← B − D·r, B ← D, D ← r1
           |   |   | q[l,j] ← r, j ← j + 1
           |   |   | l ← l + 1, j ← 0  if j = 40
           |   |   | r ← floor(A/C), M ← (A B; C D)
           |   | a ← (A B C D)^T
           |   | d ← a[0]
           |   | for kk ∈ 1..3
           |   |   | p ← d, nn ← a[kk]
           |   |   | r ← p, p ← nn, nn ← r  if p > nn
           |   |   | while p > 0
           |   |   |   r ← floor(nn/p), r1 ← nn − r·p, nn ← p, p ← r1
           |   |   | d ← nn
           |   | M ← M·(1/d)
           | q
```

Рисунок 2.

Лемма 12. *Программа на рисунке 2 реализует алгоритм перевода матричного разложения в цепную дробь.*

Доказательство. Действительно, прежде всего заметим что

$$\left[\frac{103647k+51809}{20526k+10294}\right]=5+\left[\frac{1017k+319}{20526k+10294}\right]=5,$$
$$\left[\frac{52248k+26111}{10347k+5188}\right]=5+\left[\frac{513k+171}{10347k+5188}\right]=5$$

и

$$\begin{pmatrix} 103647k+51809 & 52248k+26111 \\ 20526k+10294 & 10347k+5188 \end{pmatrix}\in\mathfrak{M}^*,$$

поэтому на основании теоремы 4 матричное разложение

$$\prod_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix} 103647k+51809 & 52248k+26111 \\ 20526k+10294 & 10347k+5188 \end{pmatrix}$$

сходится.

Далее заметим, что внешний цикл $for\, k\in 0..n$ реализует вычисление произведения

$$\prod_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} 103647k+51809 & 52248k+26111 \\ 20526k+10294 & 10347k+5188 \end{pmatrix}$$

и выделение произведения

$$\prod_{j=0}^{J}\begin{pmatrix} q_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

с помощью внутреннего цикла $while\, r=floor\left(\frac{B}{D}\right)$.

Вспомогательный цикл $for\, kk\in 1..3$ позволяет уменьшить числа в матрице $M$, если это возможно. Согласно лемме 6 сокращение на общий делитель всех элементов матрицы не меняет значение матричного разложения. Поэтому на основании теоремы 4 и леммы 11 указанная программа осуществляет вычисление неполных частных. □

# 5. Результаты символьных расчетов

Символьные вычисления по программам на рисунках 1 и 2 показывают, что программы дают одни и те же неполные частные. Вычисление с помощью программы, основанной на матричном разложении, оказываются более быстрыми.

Вычисления $cfki(100)$ дает значения 592 неполных частных, а $cfki(200)$ уже — 1194 значений. Так как результаты представлены в виде матрицы, содержащий 40 элементов в каждой строке, то последние элементы последней строки могут быть нулевыми. Приведем распределение значений неполных частных с учетом указанных нулевых значений, которые не являются неполными частными.

Это распределение вычисленно с помощью программы на рисунке 4.

$$\mathrm{submatrix}(St,0,1,0,19) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 6 & 484 & 196 & 114 & 75 & 51 & 44 & 30 & 17 & 20 & 11 & 11 & 14 & 9 & 6 & 10 & 5 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{submatrix}(St,0,1,20,39) \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 27 & 28 & 29 & 30 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 40 & 42 & 43 & 44 & 47 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{submatrix}(St,0,1,40,59) \rightarrow \begin{pmatrix} 54 & 55 & 60 & 63 & 68 & 78 & 79 & 82 & 84 & 87 & 93 & 95 & 97 & 111 & 120 & 123 & 128 & 129 & 134 & 140 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{submatrix}(St,0,1,60,75) \rightarrow \begin{pmatrix} 141 & 154 & 164 & 176 & 180 & 201 & 228 & 234 & 244 & 255 & 288 & 425 & 467 & 1333 & 1813 & 3139 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3.

```
R := cfki(200)

St := | t4000 ← 0
      | for k ∈ 0..29
      |   for j ∈ 0..39
      |     r ← R(k,j), t(r) ← t(r) + 1
      | j ← 0
      | for k ∈ 0..4000
      |   N(0,j) ← k, N(1,j) ← t(k), j ← j + 1  if  t(k) > 0
      | N
```

Рисунок 4.

В заключение авторы выражают свою глубокую благодарность профессорам Г. И. Архипову и В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Подсыпанин В. Д. О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8. Вып. 3(23). С. 43—46.

2. Подсыпанин Е. В. О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8. Вып. 3(23). С. 47—49.


Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Московский педагогический государственный университет
Поступило 10.01.2013