Б. А. Рубштейн, О неоднородных финитно бернуллиевских последовательностях измеримых разбиений,

Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 46–53

https://www.mathnet.ru/faa2128

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 46—53.

О НЕОДНОРОДНЫХ ФИНИТНО БЕРНУЛЛИЕВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ИЗМЕРИМЫХ РАЗБИЕНИЙ

Б. А. Рубштейн

§ 1. Введение

Две убывающие последовательности $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\xi' = \{\xi'_n\}_{n=0}^{\infty}$ измеримых разбиений пространств Лебега (X, μ) и (X', μ') соответственно называются *финитно изоморфными* [1], если для любого n существует изоморфизм S_n: $(X, \mu) \to (X', \mu')$ такой, что $S_n\xi_k = \xi'_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Если же $S\xi_n = \xi'_n$, $n = 1, 2, \ldots$, для некоторого изоморфизма S, то ξ и ξ' называются *изоморфными*. Последовательность $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *эргодической*, если $\bigwedge_{n=0}^{\infty} \xi_n = \nu_X$, где ν_X — тривиальное разбиение пространства X. Обозначим через $\Theta(\xi)$ неизмеримое пересечение последовательности ξ, т. е. разбиение X на множества вида $C(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_{\xi_n}(x)$, где $C_{\xi_n}(x)$ — элемент разбиения ξ_n, содержащий точку $x \in X$ *).

Очевидно, что изоморфные последовательности финитно изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно даже для эргодических последовательностей (см. [1] — [5]).

В этой работе рассматривается класс финитно бернуллиевских последовательностей, которые определяются следующим образом. Пусть I — конечное или счетное множество и $p = \{p_i\}_{i \in I}$ — распределение на I, $\sum_{i \in I} p_i = 1, p_i > 0$; мера P на I определена равенством $P(\{i\}) = p_i$, $i \in I$.

Обозначим через T_p эндоморфизм Бернулли с пространством состояний (I, P), т. е. односторонний сдвиг в пространстве $(X_p, \mu_p) = \prod_{n=1}^{\infty} (I, P)$. Положим $\beta_n = T_p^{-n}\varepsilon_{X_p}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где ε_{X_p} — разбиение X_p на точки; $\beta_p = \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$. Последовательность измеримых разбиений $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть *p-бернуллиевской* (*финитно p-бернуллиевской*), если она изоморфна (финитно изоморфна) последовательности β_p.

Отметим, что две бернуллиевские последовательности β_p и $\beta_{p'}$ изоморфны в том и только в том случае, когда они финитно изоморфны или когда (эквивалентное условие) распределения p и p' совпадают с точностью до нумерации.

В случае, когда распределение p однородно, т. е. I состоит из r точек и $p_i = 1/r$, $i \in I$, эргодические финитно p-бернуллиевские последовательности называются однородными *r-адическими* (при $r = 2$ *диадическими*). Такие последовательности рассматривались А. М. Вершиком [1], [2],

*) Разбиения такого вида называются *ручными* [9].

[6] и А. М. Стёпиным [3]. В частности, в [2] и [3] с помощью инвариантов энтропийного типа установлено существование континуума попарно неизоморфных диадических последовательностей. В то же время неизмеримые пересечения однородных эргодических последовательностей разбиений изоморфны между собой [6].

С p-бернуллиевскими последовательностями тесно связаны гиперфинитные группы не сингулярных преобразований, содержащие меру, которые изучены В. Кригером [8], а с финитно p-бернуллиевскими последовательностями — расширения таких групп. В настоящей работе вводится инвариант траекторного изоморфизма φ_f для расширений гиперфинитных групп преобразований, содержащих меру. Выделяются простейшие расширения (φ-расширения) групп, содержащих меру, для которых указанный инвариант φ_f является полным инвариантом. Следует отметить, что класс φ-расширений достаточно широк и, возможно, исчерпывает с точностью до траекторного изоморфизма все расширения групп, содержащих меру.

С помощью инварианта φ_f для любого неоднородного распределения p устанавливается существование континуума попарно неизоморфных эргодических финитно p-бернуллиевских последовательностей $\{\bar{\beta}_p^t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, для которых неизмеримые разбиения $\Theta\,(\bar{\beta}_p^t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, также попарно неизоморфны.

В случае, когда распределение $p = \{p_i\}_{i\in I}$ абсолютно неоднородно, т. е. $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$, $i, j \in I$, строится континуум попарно неизоморфных финитно p-бернуллиевских эргодических последовательностей $\{\tilde{\beta}_p^t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, для которых неизмеримые разбиения $\Theta\,(\tilde{\beta}_p^t)$ изоморфны $\Theta\,(\beta_p)$ при всех t. Эти последовательности являются вполне неоднородными (см. [5]).

В последнем параграфе приводится описание некоторых эндоморфизмов, связанных с финитно бернуллиевскими последовательностями разбиений.

Отметим, что в этой работе рассматриваются только пространства Лебега с конечной нормированной мерой. Изоморфизмы (автоморфизмы) подразумеваются сохраняющими меру. Равенства разбиений, отображений и т. п., если не оговорено противное, понимаются по mod 0.

Пользуясь случаем, автор приносит благодарность Б. С. Пицкелю, которому настоящая работа во многом обязана своим появлением, а также В. Г. Винокурову и М. М. Мельцеру за внимание и помощь.

§ 2. Расширения групп преобразований, содержащих меру

Пусть G — группа несингулярных преобразований пространства Лебега (X, μ) и $\Theta\,(G)$ — разбиение на траектории G. Через $[G]$ будем обозначать полную группу группы G, т. е. группу всех несингулярных преобразований (X, μ), оставляющих неподвижным разбиение $\Theta\,(G)$. Группы G и G' называются *траекторно изоморфными*, если изоморфны разбиения $\Theta\,(G)$ и $\Theta\,(G')$ или, что эквивалентно, изоморфны полные группы $[G]$ и $[G']$.

Если $\Theta\,(G) = \Theta\,(\xi)$ для некоторой убывающей последовательности измеримых разбиений $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что почти все элементы разбиений ξ_n конечны или счетны, то группа G называется *гиперфинитной* (ср. [8], [7], [9]). Известно, что все эргодические гиперфинитные группы автоморфизмов траекторно изоморфны между собой [8] (см. также [6], [10]). В. Кригер [8] решил вопрос о траекторной изоморфности для гиперфинитных групп, содержащих меру. Напомним, что группа G содержит меру, если существует счетная подгруппа $\Delta(G, \mu)$ группы положительных чисел R^+, для которой $\Delta(G, \mu) = \left\{\frac{dg\mu}{d\mu}(x),\ g \in G\right\}$ для почти всех $x \in X$ и группа автоморфизмов $G^0 = \{g \in G,\ g\mu = \mu\}$ — эргодическая *). Две гиперфинитные группы G и G', содержащие меры μ и μ' соответственно, траекторно изоморфны в том и только в том случае, когда $\Delta(G, \mu) = \Delta(G', \mu')$.

Пусть (Y, λ) — пространство Лебега, Γ_Y — группа всех автоморфизмов (Y, λ) со слабой топологией и $f(x, g)$, $x \in X$, $g \in G$, — коцикл группы G со значениями в Γ_Y, т. е. измеримое отображение $f\colon X \times G \to \Gamma_Y$, для которого $f(x, g_1g_2) = f(g_2x, g_1) \cdot f(x, g_2)$ при всех $g_1, g_2 \in G$ и почти всех $x \in X$. Каждому коциклу f группы G соответствует группа $G_f = \{g_f,\ g \in G\}$ несингулярных преобразований пространства $(M, m) = (X \times Y, \mu \times \lambda)$, где $g_f(x, y) = (gx, f(x, g)\, y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Группа G_f называется *расширением G с помощью коцикла f*.

Рассмотрим вопрос о траекторной изоморфности для расширений гиперфинитных групп, содержащих меру.

Через G в дальнейшем обозначается фиксированная гиперфинитная группа несингулярных преобразований (X, μ), содержащая меру μ. Для произвольного расширения G_f группы G положим $G_f^0 = \{\tilde{g} \in [G_f]\colon \tilde{g}m = m\}$ и обозначим через σ_f разбиение на эргодические компоненты группы автоморфизмов G_f^0. Пусть (Y_f, m_f) — фактор-пространство пространства (M, m) по разбиению σ_f и $\Gamma_f = \Gamma_{Y_f}$; для всякого измеримого подмножества L пространства Y_f через $\widetilde{L}$ обозначим соответствующее ему σ_f-множество в M; $\Delta = \Delta(G, \mu)$.

Тройку $(A, A', \tilde{g})$, где $\tilde{g} \in [G_f]$ и A, A' — измеримые подмножества M положительной меры, будем называть *α-стрелкой* (ср. [7]), если выполняются условия:

1) множества A и A' независимы от разбиения σ_f и $A \cap A' = \phi$,

2) $\tilde{g}A = A'$ и $\tilde{g}$ — тождественно вне множества $A \cup A'$,

3) $\frac{d\tilde{g}m}{dm}(x, y) = \alpha$ для почти всех $(x, y) \in M$; $\alpha \in \Delta$.

Представлением группы Δ автоморфизмами пространства (Y, λ) будем назвать произвольный гомоморфизм $\varphi\colon \Delta \to \Gamma_Y$.

Предложение 1. *Существует единственное представление $\varphi_f\colon \Delta \to \Gamma_f$ такое, что для всякой α-стрелки $(A, A', \tilde{g})$ и любого измеримогс подмножества $L \subset Y_f$ положительной меры m_f имеет место равенство*

$$\tilde{g}(A \cap \widetilde{L}) = A' \cap \widetilde{\varphi_f(\alpha) L}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Delta$, L — измеримое подмножество Y_f положительной меры и $(A, A', \tilde{g})$ — α-стрелка. Возьмем любой автоморфизм h из G_f^0, тождественный вне множества A'. Тогда $(A, A', h\tilde{g})$ также является α-стрелкой, $\tilde{g}^{-1}h\tilde{g} \in G_f^0$ и потому $\tilde{g}(A \cap \widetilde{L}) = h\tilde{g}(A \cap \widetilde{L})$. Следовательно, существует единственное измеримое множество $L' \subset Y_f$ такое, что $\tilde{g}(A \cap \widetilde{L}) = A' \cap \widetilde{L'}$. Соответствие $L \to L'$, опеределяемое последним равенством, есть сохраняющий меру m_f автоморфизм σ-алгебры всех измеримых подмножеств пространства (Y_f, m_f) и, как нетрудно проверить, не зависит от выбора α-стрелки $(A, A', \tilde{g})$. Индуцированное этим автоморфизмом сохраняющее меру преобразование пространства Лебега (Y_f, m_f) обозначим через $\varphi_f(\alpha)$.

---

*) Через $g\mu$ обозначается мера на X, определенная на измеримых подмножествах $A \subset X$ равенством $(g\mu)A = \mu(g^{-1}A)$.

Полученное отображение φ_f: $\alpha \to \varphi_f(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, группы Δ в группу автоморфизмов Γ_f является представлением и по построению удовлетворяет равенству (1). Предложение доказано.

Два представления φ_i: $\Delta \to \Gamma_{Y_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, будем называть *эквивалентными*, если $\varphi_2(\alpha) S = S\varphi_1(\alpha)$ для всех $\alpha \in \Delta$ и некоторого изоморфизма S: $Y_1 \to Y_2$.

Следующая теорема показывает, что представление φ_f (точнее, класс эквивалентных представлений, содержащий φ_f) является инвариантом группы преобразований G_f относительно траекторного изоморфизма.

Теорема 1. *Пусть G — гиперфинитная группа преобразований пространства (X, μ), содержащая меру μ, и $\Delta = \Delta(G, \mu)$. Пусть G_{f_i} — расширения группы G с помощью коциклов f_i: $X \times Y_i \to \Gamma_{Y_i}$, $i = 1, 2$. Если существует изоморфизм S: $X \times Y_1 \to X \times Y_2$ такой, что $S(\Theta(G_{f_1})) = \Theta(G_{f_2})$, то $S\sigma_{f_1} = \sigma_{f_2}$ и $S^*\varphi_{f_1}(\alpha) = \varphi_{f_2}(\alpha) S^*$ для всех $\alpha \in \Delta$, где S^*: $Y_{f_1} \to Y_{f_2}$ — изоморфизм, индуцированный изоморфизмом S.*

Теорема следует непосредственно из определения представления φ_f (предложение 1).

Отметим, что группа G_f эргодична в том и только в том случае, когда эргодична группа автоморфизмов $\{\varphi_f(\alpha), \alpha \in \Delta\}$. В последнем случае пространство Y_f имеет непрерывную меру или состоит из конечного числа точек одинаковой меры.

§ 3. Описание φ-расширений

В этом параграфе выделяется простейший класс финитно p-бернуллиевских последовательностей — φ-расширения последовательности β_p, для которых удается получить полную классификацию.

1. Пусть, как и раньше, G — гиперфинитная группа преобразований пространства (X, μ), содержащая меру μ, и $\Delta = \Delta(G, \mu)$.

Возьмем произвольное представление φ группы Δ автоморфизмами пространства (Y, λ) и положим

$$f(\varphi)(x, g) = \varphi\left(\frac{dg\mu}{d\mu}(x)\right), \qquad x \in X, \qquad g \in G.$$

Очевидно, $f(\varphi)$: $X \times G \to \Gamma_Y$ — коцикл. Расширение $G_{f(\varphi)}$ группы G с помощью коцикла $f(\varphi)$ назовем *φ-расширением* группы G. Группы преобразований такого вида в случае, когда группа Δ циклическая, рассматривались Кригером [11].

Непосредственно из определений коцикла $f(\varphi)$ и инварианта φ_f имеем:

$$\sigma_{f(\varphi)} = \nu_X \times \varepsilon_Y, \qquad Y_{f(\varphi)} = Y, \qquad \varphi_{f(\varphi)} = \varphi.$$

Из этих соотношений и теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Расширения $G_{f(\varphi_1)}$ и $G_{f(\varphi_2)}$ гиперфинитной группы G, содержащей меру μ, траекторно изоморфны в том и только в том случае, когда представления φ_1 и φ_2 группы $\Delta(G, \mu)$ эквивалентны.*

Таким образом, для φ-расширений класс представлений, эквивалентных представлению $\varphi_{f(\varphi)} = \varphi$, является полным инвариантом относительно траекторного изоморфизма.

Отметим, что φ-расширение $G_{f(\varphi)}$ является эргодическим в том и только в том случае, когда эргодична группа автоморфизмов $\{\varphi(\alpha), \alpha \in \Delta\}$.

В случае, когда $\Delta \neq \{1\}$ и (Y, λ) — пространство с непрерывной мерой, нетрудно указать несчетное множество $\{\varphi_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ попарно не эквивалентных эргодических представлений φ_t: $\Delta \to \Gamma_Y$ и получить несчетное множество $\{G_{f(\varphi_t)}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ эргодических расширений группы G, которые попарно не являются траекторно изоморфными.

Неизвестно, является ли произвольное расширение G_f гиперфинитной группы G, содержащей меру, траекторно изоморфным соответствующему φ_f-расширению $G_{f(\varphi_f)}$. Если этот факт имеет место, то φ_f является полным инвариантом расширений гиперфинитных групп, содержащих меру относительно траекторного изоморфизма.

2. Перейдем к описанию финитно p-бернуллиевских последовательностей разбиений, связанных с φ-расширениями групп, содержащих меру.

Пусть $\beta_p = \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ — p-бернуллиевская последовательность измеримых разбиений пространства (X_p, μ_p), $p = \{p_i\}_{i \in I}$ (см. § 1). Обозначим через G^p группу всех несингулярных преобразований X_p, оставляющих неподвижным неизмеримое разбиение $\Theta(\beta_p)$. Известно (см. [7]), что группа G^p гиперфинитна, содержит меру μ_p и $\Delta(G^p, \mu_p) = \Delta_p$, где Δ_p — подгруппа в R^+, порожденная множеством $\{p_i p_j^{-1},\ i, j \in I\}$.

Из теоремы 1 работы [5] следует, что для каждого коцикла f_p: $X_p \times G^p \to \Gamma_Y$ существует единственная убывающая последовательность $\beta_p(f) = \{\beta_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ измеримых разбиений пространства $(X_p \times Y, \mu_p \times \lambda)$, для которой $\Theta(\beta_p(f)) = \Theta(G_f^p)$ и $C_{\beta_n}(x) = \pi_1(C_{\beta_n(f)}(x, y))$ для почти всех $(x, y) \in X_p \times Y$ (здесь через π_1 обозначена проекция $X_p \times Y$ на X_p). Последовательность разбиений $\beta_p(f)$ будем называть *расширением* β_p *с помощью коцикла* f. Для любого коцикла f последовательность $\beta_p(f)$ — финитно p-бернуллиевская; обратно, любая финитно p-бернуллиевская последовательность изоморфна некоторому расширению последовательности β_p (см. [5]).

Пусть φ: $\Delta_p \to \Gamma_Y$ — представление; последовательность $\beta_p(f(\varphi))$ назовем *φ-расширением* β_p. Положим $\beta_p^{\varphi} = \beta_p(f(\varphi))$.

Теорема 3. *Для любых двух представлений* φ_i: $\Delta_p \to \Gamma_{Y_i}$, $i = 1, 2$, *следующие четыре условия равносильны*:

1) *представления* φ_1 *и* φ_2 *эквивалентны*;

2) *последовательности* $\beta_p^{\varphi_1}$ *и* $\beta_p^{\varphi_2}$ *изоморфны*;

3) *последовательности* $\beta_p^{\varphi_1}$ *и* $\beta_p^{\varphi_2}$ *лакунарно изоморфны* *);

4) *неизмеримые разбиения* $\Theta(\beta_p^{\varphi_1})$ *и* $\Theta(\beta_p^{\varphi_2})$ *изоморфны*.

Очевидно, 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4). Из теоремы 2 получаем, что 4) $\Rightarrow$ 1).

В случае $\Delta_p \neq \{1\}$, т. е. когда последовательность β_p неоднородная, выберем попарно не эквивалентные эргодические представления $\{\varphi_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ группы Δ_p и полагаем $\tilde{\beta}_p^t = \beta_p^{\varphi_t}$. Тогда $\{\beta_p^t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — континуум попарно не изоморфных эргодических финитно p-бернуллиевских последовательностей, причем неизмеримые разбиения $\Theta(\beta_p^t)$ попарно не изоморфны и все последовательности $\tilde{\beta}_p^t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, не являются лакунарно изоморфными (ср. [6]).

§ 4. Вполне неоднородные финитно p-бернуллиевские последовательности

Рассмотрим расширения последовательности β_p в случае, когда распределение $p = \{p_i\}_{i \in I}$ абсолютно неоднородно, т. е. $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

Пусть $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная убывающая последовательность измеримых разбиений; $B(\xi)$ — группа всех автоморфизмов, относитель-

*) Последовательности разбиений $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\xi_n'\}_{n=0}^{\infty}$ называются *лакунарно изоморфными* [6], если изоморфны последовательности $\{\xi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\xi_{n_k}'\}_{k=1}^{\infty}$ для некоторой последовательности индексов $n_1 < n_2 < \ldots$

но которых разбиения ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, вполне инвариантны, а $B_n(\xi)$ — группа всех автоморфизмов из $B(\xi)$, оставляющих неподвижным разбиение ξ_n. Последовательность ξ называется *абсолютно неоднородной* (*вполне неоднородной*) [1], [5], если группа $B(\xi)$ (группа $B_n(\xi)$) тривиальна, т. е. состоит из одного тождественного автоморфизма.

Нетрудно видеть, что p-бернуллиевская (финитно p-бернуллиевская) последовательность с абсолютно неоднородным распределением p является абсолютно неоднородной (вполне неоднородной).

Из теоремы 5 работы [5] получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $\beta_p(f_1)$ и $\beta_p(f_2)$ — расширения абсолютно неоднородной p-бернуллиевской последовательности β_p с помощью коциклов f_i: $X_p \times G^p \to \Gamma_Y$, $i = 1, 2$. Тогда*

1) если пространства Y_1 и Y_2 не изоморфны, то и последовательности $\beta_p(f_1)$ и $\beta_p(f_2)$ не изоморфны;

2) если $Y_1 = Y_2 = Y$, то последовательности $\beta_p(f_1)$ и $\beta_p(f_2)$ изоморфны в том и только в том случае, когда коциклы f_1 и f_2 когомологичны, т. е. $f_2(x, g) = \gamma(gx) f_1(x, g) \gamma^{-1}(x)$ для всех $g \in G^p$, почти всех $x \in X_p$ и некоторой измеримой функции γ: $X_p \to \Gamma_Y$.

Мы используем эту теорему для построения вполне неоднородных финитно p-бернуллиевских последовательностей, неизоморфных φ-расширениям β_p.

Пусть $(\overline{X}_p, \bar{\mu}_p) = (X_p \times X_p, \mu_p \times \mu_p)$ и $\overline{G^p} = G^p \times G^p$. Для каждого представления φ: $\Delta_p \to \Gamma_Y$ определим коцикл $\bar{f}(\varphi)$: $\overline{X}_p \times \overline{G^p} \to \Gamma_Y$, полагая

$$\bar{f}(\varphi)((x, x'), \; g \times g') = f(\varphi)(x, g), \qquad (x, x') \in \overline{X}_p, \; g \times g' \in \overline{G^p}.$$

Зададим убывающую последовательность $\overline{\beta}_p = \{\overline{\beta}_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\overline{\beta}_{2k} = \beta_k \times \beta_k$ и $\overline{\beta}_{2k-1} = \beta_k \times \beta_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, последовательность $\overline{\beta}_p$ — p-бернуллиевская.

Теорема 5. *Пусть распределение p абсолютно неоднородно и φ, φ': $\Delta_p \to \Gamma_Y$ — представления. Тогда последовательности разбиений $\overline{\beta}_p(\bar{f}(\varphi))$ и $\overline{\beta}_p(\bar{f}(\varphi'))$ изоморфны в том и только в том случае, когда представления φ и φ' эквивалентны. Если при этом группа автоморфизмов $\{\varphi(\alpha), \alpha \in \Delta_p\}$ — эргодическая *), то неизмеримое разбиение $\Theta(\overline{\beta}_p(\bar{f}(\varphi)))$ изоморфно $\Theta(\beta_p)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\beta}_p(\bar{f}(\varphi))$ и $\overline{\beta}_p(\bar{f}(\varphi'))$ изоморфны, тогда по теореме 4 коциклы $\bar{f}(\varphi)$ и $\bar{f}(\varphi')$ когомологичны, т. е. существует измеримая функция $\gamma(\bar{x})$, $\bar{x} \in \overline{X}_p$, со значениями в Γ_Y, для которой

$$\bar{f}(\varphi')(\bar{x}, \bar{g}) = \gamma(\bar{g}\bar{x}) \bar{f}(\varphi)(\bar{x}, \bar{g}) \gamma^{-1}(\bar{x}) \tag{2}$$

при всех $\bar{g} \in \overline{G^p}$ и п. в. $\bar{x} \in \overline{X}_p$. Если $\bar{g} \in (G^p)^0 \times G^p$, то $\bar{f}(\varphi')(\bar{x}, \bar{g}) = \bar{f}(\varphi)(\bar{x}, \bar{g}) = e_Y$ для п. в. $\bar{x} \in \overline{X}_p$, где e_Y — единица Γ_Y. Поэтому из (2), учитывая эргодичность $(G^p)^0 \times G^p$, получаем, что $\gamma(\bar{x}) = \gamma_0$ для п. в. $\bar{x} \in \overline{X}_p$ и некоторого $\gamma_0 \in \Gamma_Y$. Если $\alpha \in \Delta_p$ и $(A, A', \bar{g})$ — α-стрелка в $\overline{X}_p$ (см. § 2), то для п. в. $\bar{x} \in A$ из равенства (2) следует, что $\varphi'(\alpha) = \gamma_0 \varphi(\alpha) \gamma_0^{-1}$. Таким образом, представления φ и φ' эквивалентны.

Обратное очевидно, а второе утверждение теоремы следует из леммы 2.3 работы [11].

---

*) Так же, как и для φ-расширений, эргодичность группы $\{\varphi(\alpha), \alpha \in \Delta_p\}$ равносильна эргодичности последовательности $\overline{\beta}(\bar{f}(\varphi))$.

Выбираем, как и в § 3, попарно не эквивалентные эргодические представления $\{\varphi_t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ группы Δ_p и полагаем $\bar{\beta}_p^t = \bar{\beta}_p(\bar{f}(\varphi_t))$. Тогда $\{\bar{\beta}_p^t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — континуум эргодических вполне неоднородных финитно p-бернуллиевских последовательностей, которые попарно не изоморфны между собой, при этом, в отличие от примеров § 3, все неизмеримые разбиения $\Theta(\bar{\beta}_p^t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, изоморфны разбиению $\Theta(\beta_p)$.

§ 5. Эндоморфизмы, порождающие φ-расширения последовательности β_p

Убывающая последовательность измеримых разбиений $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *стационарной*, если она порождается некоторым эндоморфизмом T, т. е. $\xi_n = T^{-n}\varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$

Пусть $u = \{U_k\}_{k \in I}$ — набор автоморфизмов пространства (Y, λ) и $p = \{p_k\}_{k \in I}$ — распределение на I. Рассмотрим эндоморфизм $T_{p,u}$ пространства $X_p \times Y$, который является косым произведением над эндоморфизмом Бернулли T_p и задается равенством

$$T_{p,u}(x, y) = (T_p x, U_x, y), \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X_p, \quad y \in Y.$$

Как известно, эндоморфизм $T_{p,u}$ соответствует случайному блужданию по траекториям автоморфизмов U_k с вероятностями p_k, $k \in I$.

Условимся называть набор $u = \{U_k\}_{k \in I}$ *согласованным с распределением* $p = \{p_k\}_{k \in I}$ *и представлением* $\varphi\colon \Delta_p \to \Gamma_Y$, если U_k, $k \in I$, попарно коммутируют и $U_k U_l^{-1} = \varphi(p_k p_l^{-1})$ при всех $k, l \in I$.

Т е о р е м а 6. 1) *Эндоморфизм T пространства $X_p \times Y$ порождает последовательность разбиений β_p^{φ} в том, а для абсолютно неоднородных распределений p — и только в том случае, когда $T = T_{p,u}$ где $u = \{U_k\}_{k \in I}$ — набор автоморфизмов Y, согласованный с p и φ.*

2) *Эндоморфизмы $T_{p,u}$ и $T_{p,u'}$, порождающие последовательность разбиений β_p^{φ}, изоморфны в том и только в том случае, когда наборы $u = \{U_k\}_{k \in I}$ и $u' = \{U_k'\}_{k \in I}$ изоморфны, т. е. $SU_k = U_k'S$ при всех $k \in I$ и некоторого $S \in \Gamma_Y$. При этом $S\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha)S$ для всех $\alpha \in \Delta_p$.*

Таким образом, всякое φ-расширение β_p^{φ} последовательности β_p является стационарной последовательностью. При этом, если для представления $\varphi\colon \Delta_p \to \Gamma_Y$ пространство Y имеет непрерывную меру, то существует континуум попарно не изоморфных эндоморфизмов, порождающих последовательность β_p^{φ}.

Отметим в заключение, что последовательности $\bar{\beta}_p(\bar{f}(\varphi))$, построенные в § 4, не являются стационарными, если только представление φ не тривиально (ср. [3], [4]).

Ташкентский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
30 января 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В е р ш и к А. М., Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения, ДАН СССР **193**, № 4 (1970), 748—751.
2. В е р ш и к А. М., Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей, Функц. анализ **5**, вып. 3 (1971), 16—18.
3. С т ё п и н А. М., Об энтропийном инварианте убывающих последовательностей измеримых разбиений, Функц. анализ **5**, вып. 3 (1971), 80—84.
4. Р у б ш т е й н Б. А., Об одном классе убывающих последовательностей измеримых разбиений пространства Лебега, Изв. вузов, Математика, № 4 (1973), 99—105.

5. Рубштейн Б. А., Об убывающих последовательностях измеримых разбиений, ДАН СССР **205**, № 3 (1972), 526—529.
6. Вершик А. М., Теорема о лакунарном изоморфизме монотонных последовательностей разбиений, Функц. анализ, **2**, вып. 3 (1968), 17—21.
7. Dye H. A., On groups of measure preserving transformations. I, Amer. Z. Math. **89** (1959), 119—159.
8. Krieger W., On nonsingular transformations of measure space. I, II, Z. Wahr. verw. Geb. **11** (1969), 83—97, 98—119.
9. Вершик А. М., Неизмеримые разбиения. Траекторная теория, алгебры операторов, ДАН СССР **199**, № 5 (1971), 1004—1007.
10. Белинская Р. М., Разбиения пространства Лебега на траектории, определяемые эргодическими автоморфизмами, Функц. анализ **2**, вып. 3 (1968), 4—16.
11. Krieger W., On a class of hiperfinite factors that arise from null recurient Markov, Chains. J. Func. Analisis **7** (1971), 27—42.