

УДК 517.948

А. А. Миролюбов

## ОБ ОДНОМ НЕОДНОРОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

В статье исследуется линейное неоднородное функциональное уравнение вида

$$M(F) = W(z), \quad (1)$$

причем оператор  $M(F)$  определен соотношением (4). Соответствующее однородное уравнение было изучено А. Ф. Леонтьевым в работе [1]. При рассмотрении уравнения (1) применяется метод, развитый в работе [1].

Для дифференциально-разностного уравнения

$$\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n k_{pq} f^{(p)}(x + h_q) = g(x), \quad 0 = h_0 < \dots < h_n, \quad (*)$$

которое является частным случаем уравнения (1), в статье [2] построен ряд специального вида. Этот ряд при одних условиях ( $k_{p0} \neq 0$ ,  $p > 0$ ) сходится к решению  $f(x)$  уравнения (\*), а при других ( $k_{p0} = 0$ ,  $p > 0$ , но  $k_{00} \neq 0$ ) — к выражению  $f(x) - \frac{1}{2k_{00}} g(x)$ . Аналогично этому, решение уравнения (1) представляется здесь в виде предела некоторой функциональной последовательности (теорема 2).

В качестве иллюстрации полученных результатов найдено новое интегральное представление для решения неоднородного дифференциального уравнения бесконечного порядка.

## § 1. Основная формула

Пусть  $\{P_n(z)\}$  — система функций (не обязательно аналитических), определенных на бесконечном множестве  $D$  комплексной плоскости. Считаем, что эта система обладает свойством единственности на множестве  $G \subset D$ . Именно, если  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(z) = 0$  для  $z \in G \subset D$ , то  $c_k = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$  Будем считать также, что ряд

$$A(z, h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) h^k \quad (2)$$

сходится для всех  $z \in D$  и любых  $h$ .

Функция  $F(z)$  принадлежит классу  $A$ , если

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n P_n(z), \quad z \in G \subset D. \quad (3)$$

Для функции  $F(z) \in A$  вводятся операторы  $D^n F = \sum_{k=n}^{\infty} d_k P_{k-n}(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и требуется, чтобы соответствующие ряды тоже сходились на множестве  $G$ . Положим

$$M(F) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n F \quad (4)$$

и будем считать в дальнейшем характеристическую функцию  $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$  целой.

Установим формулу для решения  $F(z) \in A$  уравнения (1), правая часть которого тоже принадлежит классу  $A$ , т. е.

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(z), \quad z \in G. \quad (5)$$

При этом предполагаем, что на множестве  $G$  выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \{K_{n+k-1}[F] + |u| K_{n+k-2}[F] + \dots + |u|^{k-1} K_n[F]\} < \infty, \quad (6)$$

$n = 0, 1, \dots$ , в котором

$$K_m[F] = \sum_{s=0}^{\infty} |d_{s+m} P_s(z)|, \quad |u| < \infty,$$

и что ряд

$$\mathcal{L}(z, u) = \sum_{s=1}^{\infty} (d_{s-1} + u d_{s-2} + \dots + u^{s-1} d_0) P_s(z) \quad (7)$$

сходится для  $z \in G$  и любых  $u$ . Подставляя в (1) разложение (3) и учитывая равенство (5), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu+m} P_{\nu}(z) \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} P_{\nu}(z), \quad z \in G.$$

Опираясь на условие (6), последнее соотношение можно записать в виде

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} d_{\nu+m} c_m - \alpha_{\nu} \right) P_{\nu}(z) = 0.$$

Откуда, в силу свойства единственности, находим

$$\alpha_{\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} d_{\nu+m} c_m, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Пусть  $C$  — окружность  $|u| = q$ , на которой нет нулей характеристической функции  $\varphi(u)$ . Положим

$$R_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi[D^n F, u] \frac{du}{u^n \varphi(u)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\Phi[D^n F, u] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [D^{n+k-1} F + u D^{n+k-2} F + \dots + u^{k-1} D^n F].$$

Тогда

$$R_k - R_{k-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \{\Phi[D^k F, u] - u\Phi[D^{k-1} F, u]\} \frac{du}{u^k \varphi(u)}. \quad (9)$$

Поскольку [1]  $\Phi[D^n F, u] = \sum_{s=0}^{\infty} B_{n,s}(u) P_s(z)$ , причем ряд равномерно сходится, когда  $z \in G$  фиксировано и переменное  $u$  изменяется в любой ограниченной области, а выражения

$$B_{n,s}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (d_{k+n+s-1} + u d_{k+n+s-2} + \dots + u^{k-1} d_{s+n}); \quad n, s = 0, 1, 2, \dots,$$

являются целыми функциями, то

$$\Phi[D^k F, u] - u\Phi[D^{k-1} F, u] = \sum_{s=0}^{\infty} [B_{k,s}(u) - u B_{k-1,s}(u)] P_s(z).$$

Величину, стоящую в правой части в квадратных скобках, обозначим через  $L_{ks}(u)$ . Тогда, пользуясь рядами для функций  $B_{n,s}(u)$  и (8), найдем  $L_{ks}(u) = \alpha_{s+k-1} - d_{s+k-1} \varphi(u)$ . В таком случае последовательно получаем  $\sum_{s=0}^{\infty} L_{ks}(u) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{s+k-1} P_s(z) - \varphi(u) \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{s+k-1} P_s(z) = D^{k-1} W - \varphi(u) D^{k-1} F$ .

С учетом последнего результата выражение (9) примет вид

$$R_k - R_{k-1} = -A_k D^{k-1} W + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{du}{u^k} D^{k-1} F,$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{du}{u^k \varphi(u)}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно,  $R_1 - R_0 = -A_1 W(z) + F(z)$ ,  $R_k - R_{k-1} = -A_k D^{k-1} W$ ,  $k > 1$ .

Полученные равенства позволяют представить решение  $F(z)$  в форме

$$F(z) = R_n - R_0 + \sum_{\lambda=1}^n A_\lambda D^{\lambda-1} W. \quad (10)$$

Преобразуем теперь выражение для  $R_0$ . Пусть

$$Q(z, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_C B_{0,0}(u) A(z, u) \frac{du}{\varphi(u)}, \quad (11)$$

где функция  $A(z, u)$  определена формулой (2). Имеем

$$-R_0 - Q(z, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \{\Phi[F, u] - B_{0,0}(u) A(z, u)\} \frac{du}{\varphi(u)}. \quad (12)$$

Пользуясь соотношениями, определяющими функции  $A(z, u)$  и  $\Phi[F, u]$ , получим

$$\Phi[F, u] - B_{0,0}(u) A(z, u) = \sum_{s=0}^{\infty} [B_{0,s}(u) - u^s B_{0,0}(u)] P_s(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s(u) P_s(u), \quad (13)$$

причем ряд в правой части сходится равномерно, если  $z$  фиксировано

и принадлежит множеству  $G$ , а переменное  $u$  изменяется в любой ограниченной области.

Найдем выражение для  $\nu_s(u)$ , учитывая состав функций  $B_{n,s}(u)$  и (8). Имеем  $\nu_{s+1}(u) = \alpha_s + u\nu_s(u) - d_s\varphi(u)$ . С помощью полученной рекуррентной формулы находим

$$\nu_s(u) = (\alpha_{s-1} + u\alpha_{s-2} + \dots + u^{s-1}\alpha_0) - (d_{s-1} + ud_{s-2} + \dots + u^{s-1}d_0)\varphi(u);$$

$s = 1, 2, \dots$  Пусть

$$H(z, u) = \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_{s-1} + u\alpha_{s-2} + \dots + u^{s-1}\alpha_0) P_s(z). \quad (14)$$

Тогда, учитывая выражение для  $\nu_s(u)$ , из равенства (13) заключаем, что  $H(z, u)$  — целая функция переменного  $u$  для  $z \in G$  (так как функция  $\mathcal{L}(z, u)$ , заданная рядом (7), целая). Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(u) (d_{s-1} + ud_{s-2} + \dots + u^{s-1}d_0) \frac{du}{\varphi(u)} = 0,$$

то из (12) и (13) получаем

$$-R_0 - Q(z, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_C H(z, u) \frac{du}{\varphi(u)} \equiv T(z, q). \quad (15)$$

Определяя величину  $R_0$  из последнего соотношения и подставляя затем найденное выражение в формулу (10), получим

$$F(z) - [Q(z, q) + T(z, q)] = \theta_n(z, q) + R_n(z, q), \quad (16)$$

где

$$\theta_n(z, q) = \sum_{\lambda=1}^n A_\lambda D^{\lambda-1} W \quad (17)$$

и  $R_n(z, q) = R_n$ . Таким образом, установлена

**Теорема 1.** Пусть на некотором множестве  $G$  функции  $F(z)$  и  $W(z)$  принадлежат классу  $A$ , и пусть на  $G$  реализуется условие (6).

Если  $F(z)$  есть решение уравнения (1) для  $z \in G$  и функция  $\mathcal{L}(z, u)$ , заданная равенством (7), целая, то на множестве  $G$  для  $F(z)$  справедливо представление (16), в котором  $n$  — любое целое положительное число.

**Замечание.** Теорема верна и тогда, когда функции  $\varphi(u)$  и  $A(z, u)$  не целые, а, скажем, регулярные в некотором круге  $|u| < r$ .

Так, например, если в качестве основной системы  $\{P_n(z)\}$  взять систему  $\left\{\frac{1}{n!} B_n(z)\right\}$ , где  $B_n(z)$  — полином Бернулли степени  $n$ , то функция

$$A(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(z)}{k!} u^k = \frac{ue^{uz}}{e^u - 1}$$

будет регулярна в круге  $|u| < 2\pi$ . Пусть  $F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \frac{B_m(z)}{m!}$ . Тогда

$$D^n F = \sum_{m=n}^{\infty} d_m \frac{B_{m-n}(z)}{(m-n)!} = \sum_{m=n}^{\infty} d_m \frac{B_m^{(n)}(z)}{m!} = F^{(n)}(z),$$

поскольку  $B_m^{(n)}(z) = m(m-1)\dots(m-n+1)B_{m-n}(z)$ . Следовательно, если характеристическая функция  $\varphi(u)$  регулярна для  $|u| < 2\pi$ , то уравнение (1) примет вид  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z) = W(z)$ , и для его решения будет справедлива формула (16).

Отметим, что в формуле (16) правая часть не зависит от  $n$ . Поэтому натуральное число  $n$  следует выбирать так, чтобы оценка суммы  $\theta_n(z, q) + R_n(z, q)$  была наилучшей. В следующем параграфе будет показано, как можно осуществить этот выбор числа  $n$ .

## § 2. Применение основной формулы

Результат предыдущего параграфа можно усилить, накладывая дополнительные ограничения на множество  $D$  и функции  $P_n(z)$ . Будем говорить, что множество  $D$  обладает свойством  $\mathfrak{R}$ , если множество  $D(a, b) = \{R_1 = \inf_{z \in D} |z| < a < |z| < b < \sup_{z \in D} |z| = R_2\} \cap D$  непусто. Пусть функции  $P_n(z)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , определены на  $D$  и удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/p} |P_n(z)|^{1/n} = (\sigma \rho)^{1/p} |z|; \quad z \in D, \quad (18)$$

причем сходимость на всяком множестве  $D(r, \delta)$  равномерная. Предположим также, что система  $\{P_n(z)\}$  на любом множестве  $D(r, \delta)$  обладает свойством единственности. Как и ранее, считаем функцию  $F(z)$  принадлежащей классу  $A$ , если представление (3) имеет место на некотором множестве  $D(r, \delta)$ .

Будем считать, что характеристическая функция  $\varphi(u)$  — целая, порядка  $\rho > 0$  и типа  $\sigma_1$ .

Пусть  $W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(z)$ ,  $z \in D(r, \delta)$ , причем  $(r^\rho - \frac{\sigma_1}{\sigma})^{1/p} = r_2 \ll$

$\ll r_0 < R_2$ , и функция  $F(z)$  на множестве  $D(r_2, \delta)$  удовлетворяет уравнению (1). Тогда, в соответствии с теоремой 1 (см. также [1]), для  $z \in D(r_2, \delta)$  будет справедлива формула (16).

Получим теперь интегральное представление для функции  $H(z, u)$ , определенной рядом (14). С этой целью составим функцию

$$\phi = \frac{A\left(z, \frac{x}{t}\right) - A(z, u)}{\frac{x}{t} - u} = \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z) \left[ \left(\frac{x}{t}\right)^{s-1} + u \left(\frac{x}{t}\right)^{s-2} + \dots + u^{s-1} \right] \quad (19)$$

и заметим, что эта функция будет целой относительно переменных  $x$  и  $u$  и аналитической по  $t$  ( $t \neq 0$ ) при фиксированном  $z$  из множества  $D$ . Когда  $|t| = r_1 < r$ ,  $u$  фиксировано, а переменное  $x$  таково, что  $x \geq r_1$ ,  $x \geq r_1 |u|$ , имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{s=1}^N P_s(z) \left[ \left(\frac{x}{t}\right)^{s-1} + u \left(\frac{x}{t}\right)^{s-2} + \dots + u^{s-1} \right] \right| &< \sum_{s=0}^{\infty} |P_s(z)| \left(\frac{x}{r_1}\right)^{s-1} = \\ &= \frac{\partial A_1(z, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \frac{x}{r_1}}, \end{aligned}$$

где  $A_1(z, \zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} |P_s(z)| \zeta^s$ , а  $N$  — произвольное натуральное число.

В силу условия (18) функция  $A_1(z, \zeta)$  при любых  $\zeta$  подчиняется требованию

$$|A_1(z, \zeta)| < c(\varepsilon) \exp[(\sigma + \varepsilon)|z\zeta|^\rho]; \quad z \in D(r, \delta), \quad \varepsilon > 0. \quad (20)$$

Поэтому

$$\left| \frac{\partial A_1(z, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta = \frac{x}{r_1}} < c_1(\varepsilon) \exp\left[(\sigma + \varepsilon) \left(\frac{|z|x}{r_1}\right)^\rho\right].$$

Последние оценки обеспечивают возможность почленного интегрирования ряда (19). Полагая  $\tau(x) = -\exp(-\sigma x^\rho)$  и интегрируя, будем иметь

$$\int_0^\infty \psi d\tau(x) = \sum_{s=1}^\infty P_s(z) \left[ \frac{1}{a_{s-1} t^{s-1}} + \frac{u}{a_{s-2} t^{s-2}} + \dots + \frac{u^{s-1}}{a_0} \right], \quad z \in D(r_1, \delta).$$

При этом учитывается, что

$$\frac{1}{a_k} = \sigma^{-k/\rho} \Gamma\left(\frac{k}{\rho} + 1\right) = \int_0^\infty x^k d\tau(x).$$

Так как имеет место условие (18), то функция

$$W_1(z) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k a_k z^k, \quad a_k = \sigma^{k/\rho} \left[ \Gamma\left(\frac{k}{\rho} + 1\right) \right]^{-1},$$

регулярна в круге  $|z| < r_0$ ,  $r_2 \leq r_0 < R_2$ . Пусть  $r_1 < r_0$ , тогда, учитывая результат интегрирования функции  $\psi$ , получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_1} W_1(t) \frac{dt}{t} \int_0^\infty \psi d\tau(x) = \sum_{s=1}^\infty P_s(z) (a_{s-1} + u a_{s-2} + \dots + u^{s-1} a_0).$$

Согласно определению (14) правая часть последнего соотношения равна  $H(z, u)$ . Таким образом, установлена справедливость представления

$$H(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_1} W_1(t) \frac{dt}{t} \int_0^\infty \left[ A\left(z, \frac{x}{t}\right) - A(z, u) \right] \frac{d\tau(x)}{\frac{x}{t} - u}, \quad z \in D(r, \delta). \quad (21)$$

В рассматриваемом случае при некоторых предположениях относительно характеристической функции  $\varphi(u)$  можно установить в формуле (16) скорость сходимости выражения  $Q(z, q) + T(z, q)$  при  $q \rightarrow \infty$  к решению  $F(z)$ . А именно: пусть имеется последовательность окружностей  $|u| = q_m$ ,  $q_m \uparrow \infty$ , таких, что

$$\vartheta_m = \max_{|u|=q_m} \left| \frac{1}{\varphi(u)} \right| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Рассмотрим величину  $R_n(z, q)$  из [1]:

$$R_n(z, q) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|u|=q} \frac{du}{u^n \varphi(u)} \int_{|t|=r_1} \tilde{F}(t) \frac{dt}{t} \int_0^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^n \left[ \varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi(u) \right] A\left(z, \frac{x}{t}\right) \frac{d\tau(x)}{\frac{x}{t} - u}. \quad (23)$$

где

$$\tilde{F}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k a_k t^k, \quad a_k = \sigma^{k/p} \left[ \Gamma\left(\frac{k}{p} + 1\right) \right]^{-1}; \quad z \in D, \quad |z| < \left(r_1^p - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/p}, \quad r_1 < r. \quad (24)$$

Принимая во внимание оценку [3]

$$\left| \frac{\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi(u)}{\frac{x}{t} - u} \right| < |\varphi(u)| + c(\varepsilon) \exp\left[(\sigma_1 + \varepsilon) \left|\frac{x}{t}\right|^p\right], \quad (25)$$

а также соотношения (20) и (22), будем иметь

$$I = \left| \frac{1}{\varphi(u)} \int_0^{\infty} x^n \left[ \varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi(u) \right] \frac{A\left(z, \frac{x}{t}\right) d\tau(x)}{\frac{x}{t} - u} \right| < < c_0(\varepsilon) \left[ \int_0^{\infty} x^{n+p-1} e^{-\omega x^p} dx + \int_0^{\infty} x^{n+p-1} e^{-\beta x^p} dx \right].$$

Здесь

$$\omega = \sigma - \frac{\sigma_1 + (\sigma + \varepsilon) |z|^p + \varepsilon}{r_1^p}, \quad \beta = \sigma - \frac{(\sigma + \varepsilon) |z|^p}{r_1^p}, \quad (26)$$

$$z \in D, \quad |z| < \left(r_1^p - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/p}, \quad |u| = q_m, \quad |t| = r_1 < r, \quad \varepsilon > 0.$$

Поскольку  $\omega > 0$ , то, вычисляя интегралы, стоящие в правой части последнего неравенства, и замечая, что  $\omega < \beta$ , найдем

$$I < \hat{c}(\varepsilon) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)}{\omega^{n/p+1}}.$$

Пусть  $\tilde{M} = \max_{|t|=r_1} |\tilde{F}(t)|$ . Тогда полученная оценка позволяет записать для выражения  $R_n(z, q)$ , представленного в виде (23), следующее:

$$|R_n(z, q)| < \hat{c}(\varepsilon) \tilde{M} \frac{q \Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)}{\omega (r_1 q \omega^{1/p})^n}, \quad q = q_m.$$

Отсюда, применив формулу Стирлинга, получим  $|R_n(z, q_m)| < c^*(\varepsilon) \tilde{M} q_m \frac{\sqrt{n}}{\omega} \left(\frac{n}{ae\rho}\right)^{n/p}$ ,  $a = (r_1 q_m)^p \omega$ . Подчиним теперь выбор числа  $n$  условию:  $n = n_1$ , где  $n_1 = [a\rho]$ . Тогда предыдущее неравенство примет вид

$$|R_{n_1}(z, q_m)| < \exp[(\sigma_1 + \sigma |z|^p - \sigma r_1^p + \varepsilon) q_m^p]; \quad (27)$$

$$z \in D, \quad |z| < \left(r_1^p - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/p}, \quad m > m_0(\varepsilon).$$

Обратимся к выражению (17). В силу условия (22) получаем

$$|A_\lambda(q_m)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=q_m} \frac{du}{u^\lambda \varphi(u)} \right| < \vartheta_m q_m^{1-\lambda}; \quad \lambda = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Для оценки оператора [1]

$$D^k W = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_1} W_1(t) dt \int_0^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^k A\left(z, \frac{x}{t}\right) d\tau(x); \quad z \in D, |z| < r_1 < r_0,$$

используем неравенство (20). Тогда

$$|D^k W| < c(\varepsilon) M_1 r_1^{-k} \int_0^\infty x^k \exp\left[(\sigma + \varepsilon) \left(\frac{|z|x}{r_1}\right)^\rho\right] d\tau(x) = \frac{l}{\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + 1\right)}{(r_1 \beta^{1/\rho})^k}, \quad (29)$$

где  $M_1 = \max_{|t|=r_1} |W_1(t)|$ , величина  $l$  не зависит от  $k$ , а  $\beta$  взято из (26).

В силу оценок (28) и (29) на окружности  $|u| = q_m$  имеем

$$|\theta_n(z, q)| < \vartheta_m \frac{l}{\beta} \sum_{\lambda=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda-1}{\rho} + 1\right)}{(q r_1 \beta^{1/\rho})^{\lambda-1}}, \quad q = q_m.$$

Откуда, учитывая неравенство

$$\Gamma\left(\frac{k}{\rho} + 1\right) < \tilde{c}(\varepsilon_1) \left[\frac{k}{(1-\varepsilon_1)e\rho}\right]^{k/\rho}, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

справедливое при любом  $k$ , получим

$$|\theta_n(z, q_m)| < \vartheta_m B \left[1 + \sum_{\lambda=2}^n \left(\frac{\lambda-1}{b\rho e}\right)^{\frac{\lambda-1}{\rho}}\right]; \quad z \in D, |z| < r_1 < r_0,$$

где величина  $B$  не зависит от  $n$  и  $q_m$ , а  $b = (1 - \varepsilon_1)\beta(r_1 q_m)^\rho$ .

Заметим, что функция  $\eta(x) = \left(\frac{x}{be}\right)^x$  монотонно убывает для  $0 < x < b$ . Поэтому, положив в предыдущем соотношении  $n = n_2 = [b\rho]$ , будем иметь

$$|\theta_{n_2}(z, q_m)| < \vartheta_m B \left[2 + O\left(\frac{1}{b}\right)\right]; \quad z \in D, |z| < r_1 < r_0. \quad (30)$$

Поскольку  $\omega < \beta$ , то при достаточно малом  $\varepsilon_1$  можно записать  $b > a = (r_1 q_m)^\rho$ , и, следовательно,  $n_2 > n_1 = [a\rho]$ . В таком случае оценка (30) будет верна и при замене числа  $n_2$  числом  $n_1$ . Учитывая сделанное замечание, а также соотношение (27), получим

$$|R_n(z, q_m) + \theta_n(z, q_m)| < \exp[(\sigma_1 + \sigma|z|^\rho - \sigma r_1^\rho + \varepsilon) q_m] + \vartheta_m B_1, \quad n = n_1,$$

где  $m > m_0(\varepsilon)$  и величина  $B_1$  не зависит от  $q_m$ . Таким образом, если  $z \in D$ ,  $|z| < \left(r_1^\rho - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$  и  $n = [a\rho]$ , то в силу условия (22) из формулы

(16) находим

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} [Q(z, q_m) + T(z, q_m)]. \quad (31)$$

Итак, установлена

**Теорема 2.** Пусть  $D$  — плоское множество, обладающее свойством  $\mathfrak{N}$ , а система  $\{P_n(z)\}$  на  $D$  подчинена условию (18) и на любом множестве  $D(r, \delta)$  обладает свойством единственности. Пусть, далее, функции  $W(z)$  и  $F(z)$  принадлежат классу  $A$ , а характеристическая функция  $\varphi(u)$  — целая, порядка  $\rho > 0$  и типа  $\sigma_1$ .

Если  $M(F) = W(z)$ ,  $z \in D(r, \delta)$ ,  $|z| < \left(r^{\rho} - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$ , и выполнено требование (22), то для  $z \in D(r, \delta)$ ,  $|z| < \left(r_1^{\rho} - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$ ,  $r_1 < r_0$ , справедливо представление (31).

Замечание. Из существования предела (31) не следует существование пределов каждой из функций  $Q(z, q_m)$  и  $T(z, q_m)$  при  $m \rightarrow \infty$  для всех  $z \in D$ ,  $|z| < \left(r_1^{\rho} - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$ .

В подтверждение сказанного приведем пример. Положим  $P_n(z) = \frac{z^n}{n!}$  и  $W(z) = e^z$ . Тогда  $D^n F = F^{(n)}(z)$  и

$$H(z, u) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + u + \dots + u^{k-1}) \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{u-1} (e^{uz} - e^z).$$

Класс  $A$  в этом случае будет состоять из функций, регулярных в некотором круге  $|z| < R$ . Возьмем в качестве характеристической функции  $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n$  функцию  $u \sin \pi u$ . При таком выборе можно

считать  $q_m = m + \frac{1}{2}$ , поскольку  $\vartheta_m = \max_{|u|=m+\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{u \sin \pi u} \right| \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ , и, следовательно, условие (22) выполняется. Поэтому, если уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z) = e^z \quad (32)$$

имеет решение  $F(z)$  из класса  $A$ , то для  $F(z)$  будет верна формула (31), в которой функция

$$T(z, q_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=m+\frac{1}{2}} \frac{e^{uz} - e^z}{(u-1)u \sin \pi u} du.$$

Вычисляя последний интеграл, найдем

$$T(z, q_m) = \frac{1}{\pi} \left\{ (e^z - z - 1) - (ze^z + e^{-z} - e^z) + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^k}{k} \left[ \frac{e^{kz} - e^z}{k-1} + \frac{e^{-kz} - e^z}{k+1} \right] \right\}.$$

Отсюда следует, что для функции  $T(z, q_m)$  не существует предела при  $m \rightarrow \infty$ , если  $\operatorname{Re} z \neq 0$ .

Покажем теперь, что рассматриваемое уравнение имеет решение из класса  $A$ . Так как  $\varphi(u) = u \sin \pi u = \frac{u}{2i} (e^{i\pi u} - e^{-i\pi u})$ , то уравнение (32) можно переписать в виде  $[F(z + i\pi) - F(z - i\pi)]' = 2ie^z$ , и легко проверить, что функция  $F^*(z) = -\frac{z}{\pi} e^z$  удовлетворяет этому уравнению. Принадлежность  $F^*(z)$  к классу  $A$  очевидна.

## § 3. Некоторые оценки

Считая выполненными условия предыдущего параграфа, найдем оценки для функций  $B_{0,0}(u)$  и  $A(z, u)$ . На основании представления [1]

$$B_{0,0}(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_1} \tilde{F}(t) \frac{dt}{t} \int_0^{\infty} \frac{\varphi\left(\frac{x}{t}\right) - \varphi(u)}{\frac{x}{t} - u} d\tau(x), \quad \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/p} < r_1 < r,$$

найдем

$$\begin{aligned} |B_{0,0}(u)| &< \frac{1}{2\pi r_1} \int_{|t|=r_1} |\tilde{F}(t) dt| \int_0^{\infty} \left\{ |\varphi(u)| + c(\varepsilon) \exp\left[(\sigma_1 + \varepsilon) \left(\frac{x}{r_1}\right)^p\right] \right\} d\tau(x) < \\ &< \tilde{M} [|\varphi(u)| + c^0(\varepsilon)], \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\tilde{M} = \max_{|t|=r_1} |\tilde{F}(t)|$ .

Обратимся теперь к функции  $H(z, u)$  с представлением (21). Прежде всего оценим функцию  $\psi$ , определенную равенством (19). Для этого воспользуемся приемом, указанным в работе [3]. Заметим, что из условия (18) следует оценка

$$|A(z, u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |P_n(z)| |u|^n < c_4(\varepsilon) \exp[(\sigma + \varepsilon) |zu|^p], \quad (34)$$

в которой  $z \in D(r, \delta)$ ,  $R_1 < \delta < r < R_2$ ,  $\varepsilon > 0$ , а  $u$  — любое. Неравенство вида (34) будет, очевидно, верно и для производной  $A'_u(z, u)$ ,  $z \in D(r, \delta)$ . Пусть  $\left|\frac{x}{t} - u\right| \geq 1$ . Тогда согласно (34) имеем

$$|\psi| < |A(z, u)| + c_4(\varepsilon) \exp\left[(\sigma + \varepsilon) \left|\frac{zx}{t}\right|^p\right]. \quad (35)$$

Если же  $\left|\frac{x}{t} - u\right| < 1$ , то на основании соотношения

$$\psi = \frac{1}{\frac{x}{t} - u} \int_u^{\frac{x}{t}} A'_y(z, y) dy$$

получим

$$|\psi| \leq \frac{1}{\left|\frac{x}{t} - u\right|} \int_u^{\frac{x}{t}} |A'_y(z, y)| dy = |A'_y(z, y)|_{y=\eta},$$

где  $\eta$  — некоторая точка прямолинейного отрезка, соединяющего точки  $u$  и  $\frac{x}{t}$  и служащего здесь линией интегрирования. Поскольку

$\left|\frac{x}{t} - \eta\right| < 1$ , то на основании (34) можно записать

$$|\psi| < c_4(\varepsilon) \exp\left\{(\sigma + \varepsilon) \left[|z| \left(\left|\frac{x}{t}\right| + 1\right)\right]^p\right\},$$

или

$$|\psi| < c_4(\varepsilon) \exp(a|z|^p) \exp\left[(\sigma + 2\varepsilon) \left|\frac{zx}{t}\right|^p\right],$$

так как всегда  $(\sigma + \varepsilon) \left[\left|\frac{x}{t}\right| + 1\right]^p < a + (\sigma + 2\varepsilon) \left|\frac{zx}{t}\right|^p$ , где  $a = a(\varepsilon)$  —

некоторая постоянная. Сопоставляя последний результат с оценкой (35), найдем

$$|\psi| < |A(z, u)| + c_4(\varepsilon) \exp(a|z|^\rho) \exp\left[(\sigma + 2\varepsilon) \left|\frac{zx}{t}\right|^\rho\right]. \quad (36)$$

Пусть  $M_1 = \max_{|t|=r_1} |W_1(t)|$ . Тогда соотношения (21) и (36) дают

$$|H(z, u)| < M_1 \left\{ |A(z, u)| + c_4(\varepsilon) \exp(a|z|^\rho) \int_0^\infty \exp\left[(\sigma + 2\varepsilon) \left(\frac{|z|}{r_1} x\right)^\rho\right] \times \right. \\ \left. \times d\tau(x) \right\} = M_1 \left\{ |A(z, u)| + c_4(\varepsilon) \sigma \rho \exp(a|z|^\rho) \int_0^\infty x^{\rho-1} \exp(-hx^\rho) dx \right\},$$

где  $h = \sigma - (\sigma + 2\varepsilon) \left(\frac{|z|}{r_1}\right)^\rho > 0$ , если  $z \in D(r_1, \delta)$ . Отсюда получаем требуемую оценку

$$|H(z, u)| < M_1 \left\{ |A(z, u)| + \frac{c_5(\varepsilon)}{h} \exp(a|z|^\rho) \right\}, \quad (37)$$

причем  $z \in D(r_1, \delta)$ , а  $u$  — любое.

#### § 4. Частный случай

С помощью результатов, установленных выше, можно получить в одном частном случае иное интегральное представление для функций  $Q(z, q_m)$  и  $T(z, q_m)$  из (31).

Допустим, что характеристическая функция  $\varphi(u)$  имеет порядок  $\rho < 1$  и все ее нули расположены на положительной части действительной оси. Допустим также, что пересечение множества  $D(r, \delta)$ ,  $R_1 < \delta < r < R_2$ , с полуплоскостью  $\operatorname{Re} z < 0$  не пусто. Выберем исходную систему  $\{P_n(z)\}$  таким образом, чтобы функция  $A(z, u)$ , определенная равенством (2), имела вид

$$A(z, u) = e^{zu} a(z, u). \quad (38)$$

Относительно функций  $a(z, u)$  и  $\varphi(u)$  будем предполагать следующее:

ф) отношение  $|b(z, u)| = \left| \frac{a(z, u)}{\varphi(u)} \right|$  ограничено на лучах  $\arg u = \pm \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое число и  $z \in D(r, \delta)$ ;

г) существует последовательность  $\{S_k\}$  дуг  $|u| = \rho_k$ ,  $\rho_k \uparrow \infty$ ,  $|\arg u| \leq \varepsilon$ , на которой модуль функции  $b(z, u)$  для  $z \in D(r, \delta)$  тоже ограничен;

h)  $|\varphi(u)| > |u|^{1+\gamma}$ ,  $u \in S_k$ ,  $\gamma > 0$ .

Обозначим через  $C_k$  замкнутый контур, состоящий из отрезков ломаной  $|\arg u| = \varepsilon$ ,  $|u| \leq \rho_k$  и дуги  $S_k$ . Тогда, в силу сделанных предположений, из формул (11) и (15) соответственно получаем:

$$Q(z, \rho_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} B_{0,0}(u) b(z, u) e^{zu} du \quad (11^*)$$

и 
$$T(z, \rho_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} H(z, u) \frac{du}{\varphi(u)}. \quad (15^*)$$

Поскольку порядок характеристической функции  $\varphi(u)$  меньше единицы, то на основании оценки (33) и условия г) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_k} B_{0,0}(u) b(z, u) e^{zu} du \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

для  $z \in D(r, \delta)$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$ . Поэтому, переходя в равенстве (11\*) к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим

$$Q(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q(z, \rho_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_L B_{0,0}(u) b(z, u) e^{zu} du. \quad (39)$$

Контур  $L$  состоит здесь из двух лучей  $\arg u = \varepsilon$  и  $\arg u = -\varepsilon$ . Интеграл (39) сходится для  $z \in D(r, \delta)$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$  в силу неравенства (33) и условия f).

Преобразуем теперь интеграл (15\*). Опираясь на оценку (37) и учитывая представление (38), можем записать

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_k} H(z, u) \frac{du}{\varphi(u)} \right| < \frac{M_1}{2\pi} \int_{S_k} |b(z, u) e^{zu}| + k(z) \int_{S_k} \left| \frac{du}{\varphi(u)} \right|,$$

где  $k(z) = \frac{M_1}{2\pi h} c_5(\varepsilon) \exp(a|z|^\rho)$ . Согласно условию g) первый интеграл из правой части последнего соотношения стремится к нулю, если  $k \rightarrow \infty$  и  $z \in D(r_1, \delta)$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$ , а второй интеграл будет стремиться к нулю на основании предложения h). Поэтому предельный переход при  $k \rightarrow \infty$  в равенстве (15\*) нам дает

$$T(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(z, \rho_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_L H(z, u) \frac{du}{\varphi(u)}, \quad (40)$$

причем контур  $L$  был определен выше. Сходимость полученного интеграла для  $z \in D(r_1, \delta)$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$  гарантируется оценкой (37) и условиями f) и h).

Пусть при указанных ограничениях уравнение (1) имеет решение  $F(z)$  из класса  $A$ . Тогда, на основании равенств (39) и (40), из формулы (31) получаем искомое представление  $F(z) = Q(z) + T(z)$ . Здесь  $z \in D(r_1, \delta)$ ,  $|z| < \left(r_1^\rho - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{1/\rho}$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$ .

В заключение отметим, что если в выражении (38) считать  $a(z, u) \equiv 1$ , то уравнение (1) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z) = W(z). \quad (1^*)$$

Класс  $A$  будет состоять из функций, регулярных в некотором круге с центром в начале. Пусть уравнение (1\*) имеет решение  $F(z)$  из класса  $A$ , тогда

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L B_{0,0}(u) e^{zu} \frac{du}{\varphi(u)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L H(z, u) \frac{du}{\varphi(u)}.$$

Переменное  $z$  принадлежит здесь некоторому полукругу  $|z| < r$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$ . Выбор характеристической функции  $\varphi(u)$  в данном случае возможен на основании результата п. 8.74 из книги [4].

г. Горький

Поступило  
31 X 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А. Ф. Об одном функциональном уравнении. ИАН СССР. Сер. матем., т. 29, № 4, 1965, с. 725—756.
2. Verblunsky S. On a class of differential-difference equations. Proc. London Math. Soc., Third ser., v. 6, № 23, 1956, p. 355—365.
3. Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. Об одном обобщении ряда Фурье. Матем. сб., т. 29 (71): 3, 1951, с. 477—500.
4. Титчмарш Е. Теория функций. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.