ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 455–463

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977

ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2005 г. В. В. Карпук, А. В. Метельский, С. А. Минюк

Введение. Исследуемая система (назовем ее Σ) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + A_2\dot{x}(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in H^- = [-h, 0], \tag{2}$$

$$y(t) = g'x(t), \quad t \in T = [0, t_1]. \tag{3}$$

Здесь $x = \operatorname{col}(x_1, x_2)$ – 2-вектор-столбец фазовых переменных решения [1, с. 36] уравнения (1); $0 < h$ – постоянное запаздывание; $A = (a_{ij})$, $A_1 = (a^1_{ij})$, $A_2 = (a^2_{ij})$ $(i, j = 1, 2)$ – постоянные 2×2-матрицы; b – постоянный 2-вектор-столбец; $u(t)$, $t \in T$, – суммируемое с квадратом управление; g' – постоянная 2-вектор-строка (штрих обозначает операцию транспонирования матрицы (столбца)); y – скалярная наблюдаемая величина (выход); $0 < t_1$ – фиксированный момент времени. Начальные функции φ считаем непрерывно дифференцируемыми: $\dot{\varphi} \in C$, где $C = C(H^-, R^2)$ – банахово пространство непрерывных функций.

Следуя работам [1, 2], под состоянием x_t системы Σ в момент времени $t \geq 0$ будем понимать [2, с. 150] "отрезок решения" $x_t = x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in H^-$.

Рассмотрим задачу полной идентифицируемости системы Σ, а также двойственные задачи конструктивной идентифицируемости и полной управляемости.

Полную идентифицируемость будем понимать в смысле Р. Калмана [3, с. 65] как взаимнооднозначное соответствие между множествами выходов и текущих состояний системы Σ, а конструктивную идентифицируемость – как возможность вычисления проекций текущего состояния x_{t_1} системы Σ по выходу (3) посредством интегральной операции. Это соответствует подходу Н.Н. Красовского [4, с. 269]. Под управляемостью системы Σ понимаем [4, с. 359] возможность успокоения системы выбором подходящего управления. Для уравнения (1) запаздывающего типа $(A_2 = 0)$ эта задача впервые исследована в работах [5, 6].

Цель настоящей работы – доказательство параметрических критериев разрешимости перечисленных выше задач для системы Σ нейтрального типа. Обратим внимание на принципиальные моменты, которые отличают эту работу, например, от работ [8–16] по системам с запаздыванием. В данной статье

1) показано, что спектральный критерий полной управляемости [16], справедливый для линейных автономных систем с запаздыванием и других линейных объектов, "не работает" для линейных автономных систем нейтрального типа: указанное условие не достаточно для полной управляемости таких объектов;

2) для линейных автономных систем нейтрального типа второго порядка дано конструктивное решение комплекса из трех важных задач: полной идентифицируемости, конструктивной идентифицируемости и полной управляемости на основе нового предложенного нами подхода.

1. Основные определения. В задачах идентификации считаем управление $u(t)$, $t \in T$, известным. В силу линейности системы Σ можно положить $u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$.

Пусть $Y = \{y | \ \dot{\varphi} \in C\}$ – совокупность всех выходов системы Σ. Один и тот же выход y может порождаться, вообще говоря, несколькими начальными функциями (2). Поэтому выходу y может отвечать несколько текущих состояний x_{t_1}, совместимых [7, с. 153] с выходом y. Множество всех таких состояний обозначим через $\{x_{t_1}\}_y$.

На многообразии Y гильбертова пространства $L_2 = L_2(T, R)$ рассмотрим оператор L_{t_1} : $y \to \{x_{t_1}\}_y$, который назовем оператором восстановления класса текущих состояний $\{x_{t_1}\}_y$.

Определение 1. Систему Σ назовем полностью идентифицируемой, если для любого $y \in Y$ класс $\{x_{t_1}\}_y$ состоит из одного элемента.

Другими словами, полная идентифицируемость системы Σ подразумевает биекцию между множеством выходов и множеством ее текущих состояний.

Замечание 1. В силу линейности система Σ полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда
$$y = 0 \Rightarrow x_{t_1} = 0. \tag{4}$$

Определение 2. Систему Σ назовем конструктивно идентифицируемой в направлении $p(\tau)$, $\tau \in H^-$ $(p \in C)$, если найдется такая суммируемая с квадратом скалярная функция (назовем ее разрешающей) $v(t)$, $t \in T$, что для любого текущего состояния x_{t_1} выполняется соотношение
$$\int\limits_0^{t_1} v(t)y(t)\,dt = (p'(0) - p'(-h)A_2)x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t_1+h} p(t_1 - t)(A_1x(t-h) + A_2\dot{x}(t-h))\,dt. \tag{5}$$

Систему Σ назовем конструктивно идентифицируемой, если разрешающая функция $v(t)$, $t \in T$, существует для любого направления p $(\dot{p} \in C)$.

Замечание 2. Легко видеть, что полная идентифицируемость необходима для конструктивной идентифицируемости системы Σ. Если допустить, что конструктивно идентифицируемая система Σ не является полностью идентифицируемой, то, согласно замечанию 1, найдется текущее состояние $x^0_{t_1}$, совместимое с нулевым выходом. Тогда левая часть равенства (5) есть нуль. В то же время можно указать направление $p = p^0 \in C$, для которого правая часть равенства (5) будет отлична от нуля, так как $x^0_{t_1} \neq 0$.

Определение 3. Начальное состояние (2) назовем управляемым, если существует допустимое управление (назовем его успокаивающим) $u(t)$, $t \in T$, такое, что выполняются соотношения
$$x(t_1) = 0, \quad A_1x(t) + A_2\dot{x}(t) = 0, \quad t \in [t_1 - h, t_1].$$

Систему Σ назовем полностью управляемой, если успокаивающее управление найдется для любой начальной функции (2).

Замечание 3. Если система Σ полностью управляема, то, считая, что успокаивающее управление $u(t) \equiv 0$, $t > t_1$, получаем тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$.

2. Критерий полной идентифицируемости. Обозначим через $W(\lambda) = \lambda E - A - A_1\mu - A_2\lambda\mu$, $\mu = e^{-\lambda h}$, характеристическую матрицу уравнения (1). Здесь E – единичная матрица; λ – комплексная величина; $\lambda \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. Докажем следующий спектральный критерий полной идентифицируемости системы Σ.

Теорема 1. *Система Σ полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда*
$$\operatorname{rank}[g, W'(\lambda)]' = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость условия (6) доказывается так же, как при обосновании аналогичного критерия в [8] для линейной автономной системы запаздывающего типа $(A_2 = 0)$.

Достаточность. Пусть выполнено условие (6). Согласно замечанию 1, достаточно установить справедливость (4). Выделим два случая.

1) $\operatorname{rank}[g, A_2'g]' = 1$. С помощью невырожденного преобразования переменных $x = T\tilde{x}$, $\det T \neq 0$, перейдем к системе $\tilde{\Sigma}$, которая полностью идентифицируема ввиду замечания 1 тогда и только тогда, когда полностью идентифицируема система Σ. Для простоты сохраним прежние обозначения и будем говорить о системе Σ.

Замечание 4. Условие (6) для системы $\tilde{\Sigma}$ выполнено, очевидно, тогда и только тогда, когда оно выполнено для системы Σ.

Матрицу T выберем так, чтобы $g' = [1\ 0]$. Поскольку
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} g' \\ g'A_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^2_{11} & a^2_{12} \end{bmatrix} = 1,$$

отсюда следует, что $a_{12}^2 = 0$. Допустим, что $y(t) = x_1(t) = 0$, $t > 0$. Тогда из уравнения (1) получим

$$0 = a_{12}x_2 + a_{12}^1 x_2(t-h), \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{22}^1 x_2(t-h) + a_{22}^2 \dot{x}_2(t-h), \quad t > h. \tag{7}$$

Согласно замечанию 1, система Σ полностью идентифицируема в том и только в том случае, когда полностью идентифицируема система Σ_1 с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

1.1) Если $a_{22}^2 = 0$, то система Σ_1 запаздывающего типа. Поэтому условие (6) достаточно [9] для полной идентифицируемости системы Σ.

1.2) Считаем, что $a_{22}^2 \neq 0$. Условие (6) вычитанием первой строки, умноженной на число, из первой и второй строк матрицы $W(\lambda)$ приводится к виду

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a_{12} - a_{12}^1\mu \\ 0 & \lambda - a_{22} - a_{22}^1\mu - a_{22}^2\lambda\mu \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

В силу (8) система уравнений

$$a_{12} + a_{12}^1\mu = 0, \quad \lambda - a_{22} - a_{22}^1\mu - a_{22}^2\lambda\mu = 0 \tag{9}$$

относительно $\lambda \in \mathbb{C}$ несовместна.

1.2.1) Пусть $a_{12}^1 \neq 0$, тогда из системы уравнений (9) имеем

$$\mu = -a_{12}/a_{12}^1, \quad \lambda(a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2) = a_{12}^1 a_{22} - a_{12}a_{22}^1. \tag{10}$$

Аналогично из системы дифференциально-разностных уравнений (7) получаем

$$x_2(t-h) = -\frac{a_{12}}{a_{12}^1} x_2(t), \quad (a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2)\dot{x}_2(t) = (a_{12}^1 a_{22} - a_{12}a_{22}^1)x_2(t), \quad t > h. \tag{11}$$

1.2.1.1) Если $a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^1 = 0$, то ввиду несовместности системы (10) $a_{12}^1 a_{22} - a_{12}a_{22}^1 \neq 0$, и из (11) следует, что $x_2(t) \equiv 0$, $t > h$. Система Σ полностью идентифицируема.

1.2.1.2) Если $a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2 \neq 0$, то ввиду (11)

$$x_2(t) = x_2^0(t) = e^{\lambda_0 t} x_2^0, \quad t > h, \quad \lambda_0 = (a_{12}^1 a_{22} - a_{12}a_{22}^1)/(a_{12}^1 + a_{12}a_{22}^2).$$

Подставляя $x_2^0(t)$ в первое уравнение (7), имеем $(a_{12} + a_{12}^1\mu_0)e^{\lambda_0 t} x_2^0 \equiv 0$, $\mu_0 = e^{-\lambda_0 h}$.

Допустим, что $x_2^0 \neq 0$, тогда $a_{12} + a_{12}^1\mu_0 = 0$, что противоречит несовместности системы (9). Значит, $x_2(t) \equiv 0$, $t > h$, и система Σ полностью идентифицируема.

1.2.2) Пусть $a_{12}^1 = 0$, тогда ввиду несовместности (9) $a_{12} \neq 0$. Из первого уравнения системы (7) получаем $x_2(t) \equiv 0$, $t > h$. Система Σ полностью идентифицируема.

2) Пусть $\operatorname{rank}[g, A_2' g]' = 2$.

Согласно теореме Гамильтона–Кэли, $(A_2')^2 = \alpha A_2' + \beta E$. Выполним преобразование переменных $x = T\tilde{x}$, где $T = [g, A_2' g - \alpha g]$. Так как $T^{-1}T = E$, то $[T^{-1}g, T^{-1}(A_2' g - \alpha g)] = E$, следовательно,

$$T^{-1}g = [1, 0]', \quad T^{-1}(A_2' g - \alpha g) = [0, 1]'.$$

Матрица A_2' в новом базисе такова:

$$T^{-1}A_2' T = T^{-1}[A_2' g, ((A_2')^2 g - \alpha A_2' g)] = T^{-1}[A_2' g, \beta g] = [T^{-1}A_2' g, T^{-1}\beta g] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как и ранее, сохраним обозначения и рассмотрим систему Σ с матрицей $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 1 \\ a_{21}^2 & 0 \end{bmatrix}$ и нулевым выходом $y(t) = x_1(t) = 0,\ \ t > 0$. Покажем, что $x_2(t) \equiv 0$, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 0$. Из уравнения (1) получим

$$0 = a_{12}x_2 + a_{12}^1 x_2(t-h) + \dot{x}_2(t-h), \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{22}^1 x_2(t-h), \quad t > h. \tag{12}$$

Согласно замечанию 1, система Σ полностью идентифицируема в том и только в том случае, когда полностью идентифицируема система Σ_2 с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^1 \\ 0 & a_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Условие (6) равносильно следующему:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a_{12} - a_{12}^1\mu - \lambda\mu \\ 0 & \lambda - a_{22} - a_{22}^1\mu \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

что означает несовместность системы уравнений

$$a_{12} + a_{12}^1\mu + \lambda\mu = 0, \quad \lambda - a_{22} - a_{22}^1\mu = 0. \tag{14}$$

2.1) Пусть $a_{22}^1 = 0$. Аналогично случаю 1.2.1.2) из несовместности системы (14) следует полная идентифицируемость системы Σ.

2.2) Пусть $a_{22}^1 \neq 0$, тогда из системы дифференциальных уравнений (12) получаем

$$\begin{gathered} x_2(t-h) = (a_{22}^1)^{-1}(\dot{x}_2(t) - a_{22}x_2(t)), \\ \ddot{x}_2(t) + (a_{12}^1 - a_{22})\dot{x}_2(t) + (a_{12}a_{22}^1 - a_{12}^1 a_{22})x_2(t) = 0, \quad t > h. \end{gathered} \tag{15}$$

Определяя $x_2(t) = \sum_{i=1}^2 Q_i(t)e^{\lambda_i t},\ \ t > h$, где $Q_i(t)\ \ (i = 1, 2)$ – полиномы не выше первой степени, из второго уравнения системы (15) и подставляя в первое уравнение этой системы, получаем

$$\lambda_i^2 + (a_{12}^1 - a_{22})\lambda_i + a_{12}a_{22}^1 - a_{12}^1 a_{22} = 0, \quad \lambda_i - a_{22} - a_{22}^1\mu_i = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \tag{16}$$

если компонента $x_2(t) \not\equiv 0,\ \ t > h$. Равенства (16) противоречат несовместности системы (14), значит, $x_2(t) \equiv 0,\ \ t > h$, и система Σ_2 вместе с системой Σ полностью идентифицируемы. Теорема доказана.

3. Двойственность задач управляемости и конструктивной идентифицируемости. Наряду с системой наблюдения Σ рассмотрим систему управления в обратном времени (обозначим ее Σ^*)

$$\dot{z}(t) = -A'z(t) - A_1'z(t+h) + A_2'\dot{z}(t+h) - gu(t_1 - t), \quad t < t_1, \tag{17}$$

$$z(t) = q(t_1 - t), \quad t \in [t_1, t_1 + h], \quad \dot{q} \in C. \tag{18}$$

Определение 4. Систему управления Σ^* назовем двойственной системе наблюдения Σ.

Теорема 2 [10]. Если система Σ конструктивно идентифицируема в направлении p ($\dot{p} \in C$), то начальное состояние (18) двойственной системы управления Σ^*, где $q(\tau) = p(\tau)$, $\tau \in H^-$, полностью управляемо функцией $u(t_1 - t) = -v(t),\ \ t \in T$. Если начальное состояние (18) системы Σ^* полностью управляемо функцией $u(t_1 - t),\ \ t \in T$, то система Σ конструктивно идентифицируема в направлении $p(\tau) = q(\tau),\ \ \tau \in H^-$, причем разрешающая функция $v(t) = -u(t_1 - t),\ \ t \in T$.

Доказательство основано на формуле интегрирования по частям

$$\int_0^{t_1} d((z'(t) - z'(t+h)A_2)x(t)) = (z'(t) - z'(t+h)A_2)x(t)|_0^{t_1}, \tag{19}$$

где левая часть вычисляется в силу уравнений (1), (17).

Из (5), (19) с учетом равенств $z(t_1) = q(0) = p(0)$, $z(t_1 + h) = q(-h) = p(-h)$ получаем

$$\int_0^{t_1} v(t)g'x(t)\,dt = z'(0)(\varphi(0) - A_2\varphi(-h)) + \int_{-h}^{0} (z'(t+h)A_1 - \dot z'(t+h)A_2)\varphi(t)\,dt - \int_0^{t_1} u(t_1 - t)g'x(t)\,dt.$$

Полагая здесь $u(t_1 - t) = -v(t)$, $t \in T$, для произвольной функции $\dot\varphi \in C$ будем иметь

$$z'(0)(\varphi(0) - A_2\varphi(-h)) + \int_{-h}^{0} (z'(t+h)A_1 - \dot z'(t+h)A_2)\varphi(t)\,dt = 0. \tag{20}$$

Согласно рассуждениям, аналогичным доказательству леммы Лагранжа (основной леммы вариационного исчисления), из (20) заключаем, что

$$z'(0) = 0, \quad z'(t+h)A_1 - \dot z'(t+h)A_2 = 0, \quad t \in H^-. \tag{21}$$

По определению 3 это означает полную управляемость двойственной системы Σ^*. Теорема доказана.

Переходя от системы Σ^* к системе в прямом времени заменой переменных $\tau = t_1 - t$, $w(\tau) = z(t_1 - \tau)$, $\tau \in [-h, t_1]$, получаем систему управления Σ'

$$\dot w(\tau) = A'w(\tau) + A_1'w(\tau - h) + A_2'\dot w(\tau - h) + gu(\tau), \quad \tau \in T, \quad w(\tau) = q(\tau), \quad \tau \in H^-. \tag{22}$$

Согласно теореме 2, успокаивающее управление для системы Σ' равно $u(\tau) = -v(t_1 - \tau)$, $\tau \in T$.

Замечание 5. Как видно из доказательства леммы Лагранжа, при переходе от (20) к (21) можно ограничиться достаточно гладкими функциями φ, удовлетворяющими граничным условиям

$$\varphi^{(j+1)}(0) = A\varphi^{(j)}(0) + A_1\varphi^{(j)}(-h) + A_2\varphi^{(j+1)}(-h), \quad j = \overline{0, \nu - 1}, \quad \nu \geq 1.$$

Линейное многообразие таких функций обозначим $\tilde C^\nu = \tilde C^\nu(H^-, R^2)$.

4. Вычисление текущего состояния системы Σ с характеристическим квазиполиномом запаздывающего типа. Для полностью идентифицируемой системы Σ_2 с матрицами (13) построим интегральную операцию

$$x_{t_1} = x(t_1 + \tau) = \int_0^{t_1} V(\tau, t)y(t)\,dt, \quad \tau \in H^-, \tag{23}$$

восстанавливающую текущее состояние по выходу $y(t)$, $t \in T$. Здесь $V(\tau, t)$ – некоторая кусочно-непрерывная функция. Это необходимо для последующего решения задачи полной управляемости системы Σ на основе теоремы 2.

Очевидно, что наличия операции (23) достаточно для конструктивной идентифицируемости системы Σ. Разрешающая функция $v(t)$ для заданного направления $p \in C$ находится из формулы (5) после подстановки выражения (23).

Замечание 6. Если система запаздывающего типа $(A_2 = 0)$ полностью идентифицируема (удовлетворяет спектральному критерию (6)), то операция (23) всегда существует [11]. Для систем нейтрального типа это не так, что будет показано ниже (см. п. 6) на примере 2.

Для достаточно гладких начальных функций (2) выход $y(t)$ удовлетворяет [12, с. 73] дифференциально-разностному уравнению

$$y^{(2)}(t) + \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} r_{ij} y^{(2-i)}(t - jh) = 0, \quad t > 2h, \tag{24}$$

где r_{ij} – коэффициенты характеристического уравнения $W(\lambda) = 0$. В случае системы Σ_2 (см. (13)) $\det W(\lambda)$ – квазиполином запаздывающего типа, и уравнение (24) имеет вид

$$\ddot{y}(t) - a_{22}\dot{y}(t) - a_{22}^1\dot{y}(t - h) = 0, \quad t > h. \tag{25}$$

Анализ уравнений системы Σ_2

$$\dot{x}_1(t) = a_{12}x_2(t) + a_{12}^1 x_2(t-h) + \dot{x}_2(t-h), \quad \dot{x}_2(t) = a_{22}x_2(t) + a_{22}^1 x_2(t-h), \quad t > 0, \tag{26}$$

показывает, что при $t \neq kh$, $k = 0, 1, \ldots$, гладкость решения повышается: если $t \in (kh, (k+1)h)$, то функция $x(t)$ $(k+1)$ раз непрерывно дифференцируема. Имея в виду замечание 5, ограничимся начальными функциями (2) из класса $\tilde{C}^1$. Тогда [13] при $t = kh$, $k = 0, 1, \ldots$, производная $\dot{x}(t)$ непрерывна и

$$\dot{x}_t(0) = Ax_t(0) + A_1x_t(-h) + A_2\dot{x}_t(-h), \quad t > 0. \tag{27}$$

Из системы (26) имеем

$$x_2(t-h) = (a_{22}^1)^{-1}(\dot{x}_2(t) - a_{22}x_2(t)),$$

$$\ddot{x}_2(t) + (a_{12}^1 - a_{22})\dot{x}_2(t) + (a_{12}a_{22}^1 - a_{12}^1 a_{22})x_2(t) = a_{22}^1\dot{x}_1(t), \quad t \geq h.$$

Поэтому компонента $x_2(t_1 + \tau)$, $\tau \in H^-$, текущего состояния x_{t_1}, $t_1 \geq 2h$, находится [13] по выходу $y(t) = x_1(t)$, $t \in T$, как решение граничной задачи

$$\begin{gathered}\ddot{x}_2(t) + (a_{12}^1 - a_{22})\dot{x}_2(t) - (a_{12}a_{22}^1 - a_{12}^1 a_{22})x_2(t) = a_{22}^1\dot{y}(t), \quad t \in [t_1 - h, t_1],\\ \dot{y}(t_1) = a_{12}x_2(t_1) + a_{12}^1 x_2(t_1 - h) + \dot{x}_2(t_1 - h), \quad \dot{x}_2(t_1) = a_{22}x_2(t_1) + a_{22}^1 x_2(t_1 - h).\end{gathered} \tag{28}$$

Отсюда найдем $x_2(t_1 + \tau)$, $\tau \in H^-$, в виде линейной операции от $\dot{y}(t_1 + \tau)$, $\tau \in H^-$. Чтобы прийти к выражению (23), получим интегральное представление выхода $y(t) = x_1(t)$, $t \geq h$.

Проинтегрировав дважды обе части уравнения (25) от h до $t > h$, получим

$$y(t) - y(h) - (t-h)(\dot{y}(h) - a_{22}y(h) - a_{22}^1 y(0)) - a_{22}\int_h^t y(\tau)\,d\tau - a_{22}^1\int_h^t y(\tau - h)\,d\tau = 0.$$

Пусть $\delta_0(t) = 1$, $\delta_1(t) = t - h$, $t \in [h, 2h]$, δ_{ij} – символ Кронекера. Выберем функции $\alpha_i(t)$, $i = 0, 1$, $t \in [h, 2h]$, из условий $\int_h^{2h}\delta_i(t)\alpha_j(t)\,dt = \delta_{ij}$. Обозначим $b_0 = y(h)$, $b_1 = \dot{y}(h) - a_{22}y(h) - a_{22}^1 y(0)$, тогда [11]

$$b_i = -a_{22}^1\int_0^h\int_{\tau+h}^{2h}\alpha_i(s)\,ds\,y(\tau)\,d\tau + \int_h^{2h}\biggl(\alpha_i(\tau) - a_{22}\int_\tau^{2h}\alpha_i(s)\,ds\biggr)y(\tau)\,d\tau, \quad i = 0, 1,$$

и интегральное представление выхода (3) имеет вид

$$y(t) = b_0 + (t-h)b_1 + a_{22}^1 \int_0^{t-h} y(\tau)\,d\tau + a_{22} \int_h^t y(\tau)\,d\tau, \quad t \geq h. \tag{29}$$

Таким образом, граничная задача (28) в совокупности с $x_1(t) = y(t)$, $t \geq h$, и представлением (29) приводит к восстанавливающей операции вида (23).

Подставляя выражение (23) для $x(t_1 + \tau)$, $\tau \in H^-$, в правую часть соотношения (5), получаем, что система Σ_2 конструктивно идентифицируема.

5. Исследование полной управляемости системы Σ. Без потери общности можно считать, что в уравнении (1) $b = \mathrm{col}(1,0)$. Этого можно достичь подходящей заменой переменных $x = T\tilde{x}$, $\det T \neq 0$. Кроме того, можно за новое управление $\tilde{u}(t)$, $t \in T$, принять

$$\tilde{u}(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{11}^1 x_1(t-h) + a_{12}^1 x_2(t-h) + a_{11}^2 \dot{x}_1(t-h) + a_{12}^2 \dot{x}_2(t-h) + u(t), \quad t \in T.$$

Тогда система Σ будет иметь вид

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{21}^1 x_1(t-h) + a_{22}^1 x_2(t-h) +$$
$$+ a_{21}^2 \dot{x}_1(t-h) + a_{22}^2 \dot{x}_2(t-h), \quad t > 0. \tag{30}$$

Здесь, как и ранее, сохранены исходные обозначения. Прежде всего отметим, что спектральное условие

$$\mathrm{rank}[W(\lambda), b] = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \tag{31}$$

необходимо для полной управляемости системы Σ. Это вытекает из теоремы 2, замечания 2 и теоремы 1. Для системы Σ запаздывающего типа ($A_2 = 0$) условие (31) и достаточно [14–16] для полной управляемости. Критерий полной управляемости системы Σ нейтрального типа второго порядка ($n = 2$) выражает следующая

Теорема 3. *Для того чтобы система Σ была полностью управляема, необходимо и достаточно, чтобы одновременно 1) выполнялось спектральное условие (31) и 2)* $\mathrm{rank}[b, A_2] = \mathrm{rank}[b, A_2 b]$.

Доказательство. Как и при исследовании полной идентифицируемости в п. 2, выделим два основных случая.

1) $\mathrm{rank}[b, A_2 b] = 1$. Если $\mathrm{rank}[b, A_2 b] = 1$, то $a_{21}^2 = 0$.

1.1) Пусть $a_{22}^2 = 0$, тогда система (30) запаздывающего типа. Поэтому спектральное условие (31) необходимо и достаточно для ее полной управляемости. Условие 2) теоремы 3 здесь также выполнено.

1.2) В случае $a_{22}^2 \neq 0$ условие 2) теоремы 3 нарушается. Покажем, что система Σ не может быть полностью управляема. Если допустить, что система (30) полностью управляема, то для любой начальной функции $\varphi(t)$, $\tau \in H^-$, выбором управления $u(t)$, $t \in T$ ($u(t) \equiv 0$, $t > t_1$), обеспечим $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$. Следовательно, $\dot{x}_2(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$. Выражая производную $\dot{x}_2(t-h)$, $t > 0$, из второго уравнения системы (30), получаем, что она является непрерывной функцией. Поэтому $\dot{x}_2(-0) = \dot{x}_2(+0)$:

$$\dot{\varphi}_2(0) = a_{21}\varphi_1(0) + a_{22}\varphi_2(0) + a_{21}^1 \varphi_1(-h) + a_{22}^1 \varphi_2(-h) + a_{22}^2 \dot{\varphi}_2(-h). \tag{32}$$

Значит, тождество $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, возможно лишь для функций $\varphi(t)$, $t \in H^-$, удовлетворяющих (32). Система (30) в этом случае не является полностью управляемой.

2) В случае $\mathrm{rank}[b, A_2 b] = 2$ условие 2) теоремы 3 в наличии. Аналогично п. 2 (случай $\mathrm{rank}[g, A_2' g] = 2$) невырожденным преобразованием переменных приведем систему Σ к виду

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{21}^1(t-h) + a_{22}^1 x_2(t-h) + \dot{x}_1(t-h), \quad t > 0. \tag{33}$$

Система (33) и двойственная ей система наблюдения Σ_2 (с матрицами вида (13)) имеют характеристический квазиполином запаздывающего типа. Поскольку выполнено условие (31), то двойственная система наблюдения Σ_2 конструктивно идентифицируема, что установлено в п. 4. Согласно теореме 2, система (33) управляема.

Замечание 7. Согласно теореме 2, из теоремы 3 следует критерий конструктивной идентифицируемости системы Σ, а именно: необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись спектральное равенство (6) и $\operatorname{rank}[g, A_2'g]' = \operatorname{rank}[g, A_2']'$.

6. Примеры. Покажем, что запаздывающий тип характеристического квазиполинома не является существенным для конструктивной идентифицируемости системы Σ, а в силу теоремы 2 и для ее полной управляемости.

Пример 1. Возьмем систему Σ $(h = 1)$ с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Запишем характеристическую матрицу $W(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda\mu & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Очевидно, что $\det W(\lambda) = \lambda^2 - \lambda^2\mu$ – квазиполином незапаздывающего типа. Вместе с тем, согласно замечанию 7, система (34) конструктивно идентифицируема. Проверим это непосредственно.

Имеем систему

$$x_2(t) \equiv x_2^0, \quad t \geq 0, \quad \dot{y}(t) = x_2^0 + \dot{y}(t-1) = 0, \quad t \in [1, 2].$$

Проинтегрируем последнее уравнение от t до 2:

$$(2-t)x_2^0 = -y(t) + y(t-1) + (y(2) - y(1)). \tag{35}$$

Возьмем $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t \in [1,2]$, такими, что

$$\int_1^2 \alpha(t)\,dt = 0, \quad \int_1^2 \alpha(t)(2-t)\,dt = 1, \quad \int_1^2 \beta(t)\,dt = 1, \quad \int_1^2 \beta(t)(2-t)\,dt = 0.$$

Умножая (35) последовательно на $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и интегрируя, находим, что

$$x_2^0 = \int_1^2 (y(t-1) - y(t))\alpha(t)\,dt, \quad x_1(2) - x_1(1) = y(2) - y(1) = \int_1^2 (y(t) - y(t-1))\beta(t)\,dt.$$

Вычислим правую часть соотношения (5) при $t_1 = 2$:

$$\int_0^2 v(t)y(t)\,dt = p_1(0)(x_1(2) - x_1(1)) + p_2(0)x_2(2) + \int_1^2 \dot{p}_1(1-t)x_1(t)\,dt =$$

$$= p_1(0)\int_1^2 (y(t) - y(t-1))\beta(t)\,dt - p_2(0)\int_1^2 (y(t) - y(t-1))\alpha(t)\,dt + \int_1^2 \dot{p}_1(1-t)y(t)\,dt.$$

Таким образом, в равенстве (5)

$$v(t) = \begin{cases} p_2(0)\alpha(t+1) - p_1(0)\beta(t+1), & t \in [0,1), \\ \dot{p}_1(1-t) + p_1(0)\beta(t) - p_2(0)\alpha(t), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Согласно теореме 1, успокаивающее управление для системы управления

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_1(t-1) + u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t), \quad t > 0, \quad x(t) = \operatorname{col}(p_1(t), p_2(t)), \quad t \in [-1, 0], \tag{36}$$

двойственной системе (34), будет иметь вид

$$u(t) = -v(2-t) = \begin{cases} -p_2(0)\alpha(3-t) + p_1(0)\beta(3-t), & t \in [1,2], \\ -\dot{p}_1(t-1) - p_1(0)\beta(2-t) + p_2(0)\alpha(2-t), & t \in [0,1]. \end{cases}$$

В этом можно убедиться, подставив $u(t)$, $t \in [0,2]$, в систему (36).

Теперь покажем, что равенство 2) теоремы 3 не зависит от спектрального условия (31).

Пример 2. Рассмотрим систему Σ $(h = 1)$ с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Здесь

$$\operatorname{rank}[W(\lambda), b] = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 & 1 \\ -\mu & \lambda + \lambda\mu & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \tag{38}$$

т.е. выполнено спектральное условие (31). В то же время легко проверить, что условие 2) теоремы 3 не имеет места.

Согласно теореме 3, система (37) не управляема. В силу теоремы 2 двойственная к (37) система наблюдения (назовем ее $(37')$) не является конструктивно идентифицируемой. Ввиду (38) и теоремы 1 она полностью идентифицируема. Но восстанавливающая операция (23) для системы наблюдения $(37')$ невозможна из-за отсутствия конструктивной идентифицируемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
2. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории. М., 1971.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
5. *Красовский Н.Н.* // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 938–939.
6. *Куржанский А.Б.* // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1121–1124.
7. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
8. *Метельский А.В., Минюк С.А.* // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 4. С. 624–633.
9. *Шкляр Б.Ш.* // Problems of Control and Information Theory. 1980. V. 9. № 6. P. 417–428.
10. *Минюк С.А., Метельский А.В.* // Тез. докл. междунар. конф. AMADE, 4–9 сент. 2003 г. Минск, 2003. С. 125–126.
11. *Минюк С.А., Метельский А.В.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1052–1057.
12. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.
13. *Метельский А.В.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1353–1360.
14. *Габелая А.Г.* // Сообщ. АН ГССР. 1976. Т. 83. № 1. С. 53–55.
15. *Минюк С.А., Метельский А.В.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1977. № 4. С. 30–36.
16. *Марченко В.М.* // Problems of Control and Information Theory. 1979. V. 8. № 5–6. P. 421–432.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск,
Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

Поступила в редакцию
16.12.2003 г.