M. V. Saveliev, Classification of exactly integrable embeddings of two-dimensional manifolds. The coefficients of the third fundamental forms, *TMF*, 1984, Volume 60, Number 1, 9–23

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 1
июль, 1984

ЗАДАЧА КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ВЛОЖЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРЕТЬИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФОРМ

Савельев М. В.

Предложен метод классификации точно и вполне интегрируемых вложений в римановы или неримановы объемлющие пространства, в основе которого лежит алгебраический подход [6, 8] к интегрированию нелинейных динамических систем. При этом градуировочные условия и спектральный состав операторов Лакса, которые принимают значения в градуированной алгебре Ли, выделяющие интегрируемые классы двумерных систем, формулируются в терминах структуры тензоров третьих фундаментальных форм. В рамках данного метода каждому вложению трехмерной подалгебры $\mathrm{sl}(2)$ в простую конечномерную (бесконечномерную конечного роста) алгебру Ли $\mathfrak{G}$ сопоставляется определенный класс точно (вполне) интегрируемых вложений двумерного многообразия в соответствующее объемлющее пространство, снабженное структурой $\mathfrak{G}$.

1. Классической задачей геометрии является классификация многообразий, вложенных тем или иным образом в объемлющее риманово или нериманово пространство. В соответствии с теоремами вложения дифференциальной геометрии [1—4] многообразие $\tilde{V}_n$ определяется с точностью до движения в объемлющем пространстве $\tilde{V}_N$ как целого своими фундаментальными тензорами, удовлетворяющими уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (вообще говоря, обобщенным). Поэтому одним из важных аспектов конструктивного решения данной проблемы является исследование этих уравнений на предмет выделения их точно интегрируемых подклассов, классификации последних и построения их общих решений в смысле задачи Коши или Гурса, либо вполне интегрируемых в смысле обратной задачи рассеяния, обладающих достаточным спектром солитоноподобных решений. При этом характеристики объемлющего пространства, в частности его связности в точках $\tilde{V}_n$, входят в уравнения для тензоров $\tilde{V}_n$ как «внешние» функции, и при самосогласованной постановке задачи удобно рассматривать тройку вложенных многообразий $\tilde{V}_n\subset\tilde{V}_N\subset\tilde{S}_M$, где пространство $\tilde{S}_M$ имеет нулевой тензор Римана или его обобщение в неримановой геометрии.

В техническом отношении проблема заключается в том, что обсуждаемые уравнения представляют собой весьма сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, содержащую произвол как в выборе (псевдо) нормалей к многообразию $\tilde{V}_n$, так и параметров на нем (в этой связи важно также переформулировать уравнения в терминах приведенных функций, не имеющих данного произвола, т. е.

для калибровочно-инвариантных величин). Кроме того, даже при наличии методов их решения необходимо сформулировать принцип, согласно которому производится идентификация точно или вполне интегрируемых подклассов многообразий.

Во многом аналогичной обсуждаемой геометрической задаче является полностью завершенная проблема классификаций простых алгебр Ли и описания всех их полупростых подалгебр. Поэтому естественно ожидать, что применение в той или иной форме алгебраических понятий и методов окажется адекватным для решения задачи вложения дифференциальной геометрии. Указанием в пользу возможности конструктивного ее решения, побудившего к ее рассмотрению в данной постановке в работе [5], явилась прослеженная в последние годы [6, 7] тесная взаимосвязь задачи классификации простых алгебр Ли и описания вложений в них трехчленной подалгебры с проблемой выделения точно и вполне интегрируемых двумерных нелинейных систем (данная концепция, по сути дела, восходит к идее Ли о том, что группы непрерывных преобразований имеют определяющее значение для интегрирования дифференциальных уравнений и играют для последних ту же роль, что и группы Галуа для алгебраических).

В рамках алгебраического подхода [6, 8] исходными при построении точно и вполне интегрируемых нелинейных систем являются задание алгебры Ли $\mathfrak{G}$ и выбор той или иной ее градуировки, $\mathfrak{G}=\sum_{-M_-}^{M_+}\oplus\mathfrak{G}_a$, $[\mathfrak{G}_a,\mathfrak{G}_b]\subset\mathfrak{G}_{a+b}$, $d_a\equiv\dim\mathfrak{G}_a<\infty$ (для бесконечномерных алгебр $M_\pm=\infty$). Эти понятия закладываются при реализации представления типа Лакса

$$[\partial/\partial z_+ + \hat{A}_+,\ \partial/\partial z_- + \hat{A}_-]=0 \tag{1.1}$$

операторами, принимающими значения в $\mathfrak{G}$, $\hat{A}_\pm(z_+,\ z_-)\dot{\in}\mathfrak{G}$, и имеющими определенный спектральный состав, именно $\hat{A}_\pm\dot{\in}\sum_0^{m_\pm}\oplus\mathfrak{G}_{\pm a}$, $m_\pm<M_\pm$. В дифференциальной геометрии исходными являются сами уравнения (Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи), причем роль задания $\mathfrak{G}$ играют характеристики $\tilde{V}_N$ (точнее, структура группы Ли, которой снабжено $\tilde{V}_N$), а выбор градуировки и спектрального состава пары Лакса обеспечивают условия на компоненты фундаментальных тензоров $\tilde{V}_n$ [5, 9]. При этом определяющее значение имеет выяснение геометрического смысла этих условий и в соответствии с ним понятий градуировки и спектрального состава, чему и посвящена настоящая работа. Как будет показано ниже, соответствующими геометрическими величинами являются третьи фундаментальные формы, матричная структура коэффициентов которых отражает адекватным образом искомые алгебраические требования.

2. В этом разделе, следуя классической монографии Эйзенхарта [1], мы приведем необходимые сведения из теории римановых многообразий, а также некоторые определения неримановых геометрий [2, 3].

Рассмотрим риманово пространство V_N произвольной размерности N с координатами y^A и метрикой $G_{AB}(y)=G_{BA}$ (вообще говоря, индефинитной), согласованной с симметричной связностью $\Gamma_{BC}{}^A$. Вложение риманова многообразия V_n с координатами x^i в V_N определяется аналитической зависимостью $y^A = f^A(x^i)$ с матрицей $\partial f^A/\partial x^i \equiv y_{,i}{}^A$ ранга n. При этом [1])

$$(2.1)\qquad G_{AB}E_{\mathbf{C}}{}^A E_{\mathbf{D}}{}^B = \eta_{\mathbf{CD}}, \qquad \eta^{\mathbf{CD}}E_{\mathbf{C}}{}^A E_{\mathbf{D}}{}^B = G^{AB};$$

$$E_{\mathbf{C}}{}^A \equiv y_{,i}{}^A \delta_{\mathbf{C}}{}^i + n_a{}^A \delta_{\mathbf{C}}{}^a; \qquad \eta_{\mathbf{CD}} \equiv g_{ij}\delta_{\mathbf{C}}{}^i \delta_{\mathbf{D}}{}^j + \varepsilon_a \delta_{ab} \delta_{\mathbf{C}}{}^a \delta_{\mathbf{D}}{}^b,$$

где $n_a{}^A$ — компоненты векторных полей в V_N, нормальных к V_n в точках последнего, $g_{ij}(x)$ — метрика в V_n; числа ε_a равны $+1$ или -1. Тогда согласно теоремам вложения дифференциальной геометрии V_n описывается (с точностью до движения в объемлющем пространстве V_N как целого) своими фундаментальными тензорами $g_{ij}(x) = g_{ji}$, $q_{ij}{}^a(x) = q_{ji}{}^a$, $t_i{}^{ab} = -t_i{}^{ba}$, где $q_{ij}{}^a$ и $t_i{}^{ab}$ — компоненты вторых квадратичных форм и векторов кручения, соответственно. Эти функции удовлетворяют уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи:

$$(2.2)\qquad R_{ijkl} = \varepsilon_a (q_{ik}{}^a q_{jl}{}^a - q_{il}{}^a q_{jk}{}^a) + \overline{R}_{ABCD}\, y_{,i}{}^A y_{,j}{}^B y_{,k}{}^C y_{,l}{}^D;$$

$$\overset{a}{q}_{ij;k} - \overset{a}{q}_{ik;j} = \varepsilon_b (t_k{}^{ba} q_{ij}{}^b - t_j{}^{ba} q_{ik}{}^b) + \overline{R}_{ABCD}\, y_{,i}{}^A n_a{}^B y_{,j}{}^C y_{,k}{}^D;$$

$$\overset{ab}{t}_{j;k} - \overset{ab}{t}_{k;j} + \varepsilon_c (t_j{}^{ca} t_k{}^{cb} - t_k{}^{ca} t_j{}^{cb}) + g^{lm} (q_{lj}{}^a q_{mk}{}^b - q_{lk}{}^a q_{mj}{}^b) +$$
$$+ G^{AE} \overline{R}_{EBCD}\, n_A{}^a n^{Bb} y_{,j}{}^C y_{,k}{}^D = 0.$$

Здесь $\overline{R}_{ABCD}$ — тензор кривизны Римана для метрики G_{AB}, отнесенный к точкам V_n, «точка с запятой» означает ковариантное дифференцирование относительно метрики g_{ij}. Эти уравнения представляют собой условия интегрируемости деривационных формул Гаусса — Вейнгартена для векторов $y_{,i}{}^A$ и $n_a{}^A$ в движущейся системе,

$$(2.3)\qquad \overset{A}{y}_{;ij} = \varepsilon_a q_{ij}{}^a n_a{}^A - \overline{\Gamma}_{BC}{}^A y_{,i}{}^B y_{,j}{}^C;$$

$$\overset{A}{n}_{a;i} = -q_{ij}{}^a g^{jk} y_{,k}{}^A + \varepsilon_b t_i{}^{ba} n_b{}^A - \overline{\Gamma}_{BC}{}^A y_{,i}{}^C n_a{}^B$$

(в дальнейшем для краткости множители ε_a будем опускать).

Очевидно, что аналогичным образом выписываются соответствующие уравнения для многообразий, снабженных структурой и других, отличных от ортогональных, групп Ли.

Помимо первых двух фундаментальных квадратичных форм

$$Q_1 \equiv G_{AB} Dy^A Dy^B = g_{ij} dx^i dx^j,$$
$$Q_2{}^a \equiv -G_{AB} Dy^A Dn_a{}^B = q_{ij}{}^a dx^i dx^j;$$

$$Dy^A \equiv dy^A = y_i{}^A\, dx^i, \quad Dn_a{}^A \equiv \overset{A}{n}_{a,i}\, dx^i$$

в классической теории поверхностей иногда используются третьи формы

$$(2.4)\qquad Q_3{}^{ab} \equiv G_{AB} Dn_a{}^A Dn_b{}^B = (q_{ik}{}^a g^{kl} q_{lj}{}^b - t_i{}^{ac} t_j{}^{cb})\, dx^i dx^j,$$

которые допускают непосредственную геометрическую интерпретацию и будут для нас в дальнейшем иметь важное значение.

---

[1]) Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Область их изменения следующая: i, j, k, l, $(\mu, \nu, \rho, \tau) = 1, \ldots, n$; $A, B, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$, $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = 1, \ldots, N$; $a, b, c, d = n+1, \ldots, N$; $\Xi, \Lambda, \Omega, \Psi = N+1, \ldots, N+p$; $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D} = 1, \ldots, N+p$; $p \geqslant 0$.

Уравнения (2.2) и (2.3) существенно упрощаются для вложений многообразия V_n в плоское пространство S_N, $N \geqslant n+p$ (p — класс V_n). Они могут быть сформулированы полностью в терминах пространства V_n и естественно не содержат членов, связанных с тензором Римана и связностью V_N. По этой причине зачастую удобно рассматривать тройку пространств $V_n \subset V_N \subset S_{N+p}$ (с последующей редукцией) при исследовании свойств вложений V_n в риманово (не обязательно плоское) объемлющее пространство V_N и решения соответствующей задачи классификации[2]. Расчетную часть для изучения вложений, в частности V_2 в V_N, на основе тройки $V_n \subset V_N \subset S_{N+p}$, обеспечивают следующие формулы. Введем в объемлющем пространстве V_N репер $E_{\mathbf{A}}{}^{A}(y)$,

$$(2.5) \qquad E_{\mathbf{A}}{}^{A} E^{\mathbf{A}B} = G^{AB}, \qquad G_{AB} E_{\mathbf{A}}{}^{A} E_{\mathbf{B}}{}^{B} = \delta_{\mathbf{AB}}$$

и построим в терминах него «спиновые» связности $\gamma_A{}^{\mathbf{AB}} = -\gamma_A{}^{\mathbf{BA}}$,

$$(2.6) \qquad \partial E_{\mathbf{A}}{}^{A} / \partial y^B + \gamma_B{}^{\mathbf{AB}} E_{\mathbf{B}}{}^{A} - \bar{\Gamma}_{AB}{}^{C} E_{C}{}^{\mathbf{A}} = 0,$$

через которые, как нетрудно убедиться, выражается тензор Римана в V_N,

$$(2.7) \qquad \partial \gamma_D{}^{\mathbf{AB}} / \partial y^C - \partial \gamma_C{}^{\mathbf{AB}} / \partial y^D - \gamma_D{}^{\mathbf{AC}} \gamma_C{}^{\mathbf{CB}} + \gamma_C{}^{\mathbf{AC}} \gamma_D{}^{\mathbf{CB}} = \bar{R}_{ABCD} E^{\mathbf{A}A} E^{\mathbf{B}B}.$$

Тогда вложения V_n в V_N допускают следующую редукцию:

$$(2.8) \qquad y_{,i}{}^{D} \gamma_D{}^{\mathbf{AB}} = \gamma_i{}^{\mu\nu} \delta_\mu{}^{\mathbf{A}} \delta_\nu{}^{\mathbf{B}} - q_{ij}{}^{a} e^{j\mu} \delta_a{}^{\mathbf{A}} \delta_\mu{}^{\mathbf{B}} + t_i{}^{ab} \delta_a{}^{\mathbf{A}} \delta_b{}^{\mathbf{B}},$$

эквивалентную согласно (2.6) деривационным формулам (2.3) для $V_n \subset V_N$. Здесь $\gamma_i{}^{\mu\nu}(x)$ и $e_\mu{}^{i}(x)$ — аналогичные $\gamma_C{}^{\mathbf{AB}}$ и $E_{\mathbf{A}}{}^{A}$ величины, соответственно, определенные в V_n.

В случае неримановых пространств $\tilde{V}_n \subset \tilde{V}_N$ деривационные формулы для векторов $y_{,i}{}^{A}$ и псевдонормалей $n_a{}^{A}$, равно как и вытекающие из них уравнения интегрируемости, обобщающие (2.2), значительно усложняются. Они содержат три типа новых тензоров [3]:

$$(2.9) \qquad \omega_{ij}{}^{a} \equiv n^{a}_{A,B} y_{,i}{}^{A} y_{,j}{}^{B}; \qquad l_{aj}{}^{i} \equiv n^{A}_{a,B} x_{,A}{}^{i} y_{,j}{}^{B};$$

$$l_{ai}{}^{b} \equiv n^{A}_{a,B} n_A{}^{b} y_{,i}{}^{B};$$

именно

$$(2.10) \qquad y^{A}_{;ij} = -\omega_{ij}{}^{a} n_a{}^{A} - \bar{L}_{BC}{}^{A} y_{,i}{}^{B} y_{,j}{}^{C};$$

$$n^{A}_{a,i} = l_{ai}{}^{j} y_{,j}{}^{A} + l_{ai}{}^{b} n_b{}^{A} - \bar{L}_{BC}{}^{A} y_{,i}{}^{C} n_a{}^{B};$$

где символом «;» обозначено ковариантное дифференцирование относительно связности $L_{ij}{}^{k}$ в $\tilde{V}_n$, а $\bar{L}_{BC}{}^{A}$ — связность в $\tilde{V}_N$, обе, вообще говоря, несимметричные. В случае, когда определитель $\omega_{ij}{}^{a}$ отличен от нуля и псевдонормали могут быть выбраны таким образом, что $l_{ai}{}^{b} = 0$, соотношениями $g^{ij} \omega_{jk}{}^{a} = l_{ak}{}^{i}$ определяется тензор g^{ij}, невырожденный при $\det l_{ak}{}^{i} \neq 0$, и g_{ij}, $g_{ij} g^{jk} = \delta_i{}^{k}$, $g^{ij} g_{jk} = \delta_k{}^{i}$. Последние служат для опускания и поднимания индексов у тензорных величин $\tilde{V}_n$. При этом аналогом плоского объемлющего пространства римановой геометрии является вариант с $\bar{L}^{A}_{BCD} \equiv$

[2] Очевидно, что на алгебраическом языке переход от V_N к S_N эквивалентен сжатию соответствующей алгебры.

$=\overline{L}^{A}_{BD,C}-\overline{L}^{A}_{BC,D}+\overline{L}_{BD}{}^{E}\overline{L}_{EC}{}^{A}-\overline{L}_{BC}{}^{E}\,\overline{L}_{ED}{}^{A}=0$. В дальнейшем для краткости пространства $\tilde{V}_N$ с нулевым тензором кривизны будем называть плоскими. В терминах тензора G^{AB} и связностей $L_{BC}{}^{A}$ и $L_{BC}{}'^{A}$, осуществляющих ковариантное дифференцирование ко- и контравариантных тензоров, соответственно, обобщения Вейля и Схоутена (см., например, [3]) римановых пространств заключается в введении в $\tilde{V}_N$ трех тензоров:

$$(2.11)\qquad G_{;C}{}^{AB}\equiv \underset{(1)}{G}{}_C{}^{AB},\quad L_{BC}{}^{A}-L_{CB}{}^{A}\equiv \underset{(2)}{G}{}_{BC}{}^{A},\quad L_{BC}{}^{A}-L_{BC}{}'^{A}\equiv \underset{(3)}{G}{}_{BC}{}^{A},$$

обращающихся в нуль в римановом случае. При этом, определяя в $\tilde{V}_N$ репер и «спиновые связности» формулами (2.5) и (2.6), можно убедиться в том, что симметричная часть этих связностей дается формулой

$$(2.12)\qquad \tilde{\gamma}_C{}^{AB}+\tilde{\gamma}_C{}^{BA}=\tilde{E}_D{}^{B}\tilde{E}_E{}^{A}\underset{(1)}{G}{}_C{}^{DE}.$$

3. При изучении проблемы вложения будем использовать алгебраический метод конструктивного исследования двумерных точно и вполне интегрируемых нелинейных систем [6, 8]. Этот метод основан на теории представлений алгебр или супералгебр Ли $\mathfrak{G}$ и представлении типа Лакса (1.1) в двумерном пространстве (z_+, z_-) парой операторов $\hat{A}_\pm$, принимающих значения в подпространствах $\sum\limits_{0}^{m_\pm}\oplus\,\mathfrak{G}_{\pm a}$ градуированной алгебры $\mathfrak{G}$. В частном случае, когда $\hat{A}_\pm$ принимают значения в локальной части $\hat{\mathfrak{G}}\equiv\mathfrak{G}_{-1}\oplus\mathfrak{G}_0\oplus\mathfrak{G}_1$ конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ $(m_\pm=1)$, снабженной градуировкой, согласованной с целочисленными вложениями трехмерной подалгебры $A_1=\{H, \mathfrak{J}_\pm;\ [H,\mathfrak{J}_\pm]=\pm2\mathfrak{J}_\pm,\ [\mathfrak{J}_+,\mathfrak{J}_-]=H\}$ в $\mathfrak{G}$, возникает система [8]

$$(3.1)\qquad \partial(g^{-1}\partial g/\partial z_-)/\partial z_+=[\mathfrak{J}_-, g^{-1}\mathfrak{J}_+g],$$

здесь g — элемент комплексной оболочки $\tilde{G}_0$ группы Ли G_0 с алгеброй Ли $\mathfrak{G}_0$. Эта система допускает явное решение задачи Гурса, характеризуемое $2d_1$ произвольными функциями $\varphi_{+\alpha}(z_+)$ и $\varphi_{-\alpha}(z_-)$, $1\leqslant\alpha\leqslant d_1$.

Рассмотрение в рамках данного подхода вполне интегрируемых систем связано с реализацией операторов Лакса на соответствующих подпространствах бесконечномерной алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{G}}$ конечного роста [14], наличие конечномерных представлений у которой обеспечивает возможность нетривиального введения спектрального параметра и построения солитонных решений методом обратной задачи рассеяния (см., например, [10]) или с помощью инвариантной конструкции, предложенной в работе [11]. При этом выбор определенного спектрального состава операторов $\hat{A}_\pm$ в алгебре $\tilde{\mathfrak{G}}$, $\hat{A}_\pm\,\dot{\in}\,\sum\limits_{0}^{m_\pm}\oplus\,\tilde{\mathfrak{G}}_{\pm a}$, эквивалентен в известном смысле их реализации на элементах соответствующей конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{G}$, осуществляющих вырожденное (конечномерное) представление образующих $\tilde{\mathfrak{G}}_{\pm a}$, $0\leqslant a\leqslant m_\pm$.

Следует отметить, что представление (1.1) форм-инвариантно относительно калибровочного преобразования

$$(3.2)\qquad \hat{A}_{\pm}\to g_0^{-1}\hat{A}_{\pm}g_0+g_0^{-1}\partial g_0/\partial z_{\pm},$$

сохраняющего спектральный состав операторов $\hat{A}_{\pm}$ при $g_0\in\tilde{G}_0$ в силу условия $[\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_a]\subset\mathfrak{G}_a$.

Обсуждаемый алгебраический подход вполне приспособлен к изучению задачи вложения именно двумерных многообразий дифференциальной геометрии. На системы в пространствах, имеющих больше двух измерений, его распространить пока не удалось, как, впрочем, и другие подходы к интегрированию нелинейных уравнений. При этом, если тензор $\bar{L}^A_{BCD}$ объемлющего пространства $\tilde{V}_N$ ненулевой, то следует в качестве промежуточного этапа рассмотреть тройку пространств $\tilde{V}_2\subset\tilde{V}_N\subset\tilde{S}_M$, у которой тензор кривизны пространства $\tilde{S}_M$ имеет нулевые компоненты. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем плоского объемлющего пространства $\tilde{V}_N$, отсылая за подробностями модификации рассуждений о вложениях в неплоское $\tilde{V}_N$ к работе [9].

Представление (1.1) в обсуждаемом смысле его приложения является синонимом нулевой кривизны объемлющего пространства, причем операторы $\hat{A}_{\pm}$ суть редуцированные связности типа (2.8), сопряженные элементам $\mathscr{M}_{AB}$ ортогональной алгебры в римановом случае, $\hat{A}_{\pm}=$ $=y_{,\pm}{}^D\gamma_D{}^{AB}\mathscr{M}_{AB}$, где дифференцирование производится по переменным $z_{\pm}=\frac{1}{2}(x_1\mp ix_2)$. Таким образом, чтобы эффективно применять алгебраический подход для исследования вложений двумерных многообразий $\tilde{V}_2\subset\tilde{S}_N$, снабженных структурой алгебры Ли $\mathfrak{G}$, требуется переформулировать определяющую систему уравнений (2.2) (при $n=2$ и $\bar{R}_{ABCD}=0$) или их обобщения в нефримановом случае в виде представления (1.1), реализовав операторы $\hat{A}_{\pm}$ в градуированной алгебре $\mathfrak{G}$. При этом отмеченный в разделе 1 произвол в выборе (псевдо-) нормалей к $\tilde{V}_2$ и параметров на нем связан очевидным образом с преобразованием (3.2). Выделение различных типов точно интегрируемых вложений осуществляется в рамках алгебраического подхода путем выбора спектрального состава операторов $\hat{A}_{\pm}$ в алгебре $\mathfrak{G}$, градуировка которой согласована с целочисленными вложениями в нее подалгебры A_1. Это, как мы увидим в дальнейшем, приводит к условиям на коэффициентные функции в $\hat{A}_{\pm}$ при элементах $\mathfrak{G}$, которые определяют (с точностью до преобразований из группы Вейля $\mathfrak{G}$) структуру третьих фундаментальных форм. Очевидно, что для возможности рассмотрения вложений многообразий, снабженных структурой различных алгебр Ли $\mathfrak{G}$, следует реализовать операторы $\hat{A}_{\pm}$ на картановских элементах и корневых векторах $\mathfrak{G}$, а не в тензорном базисе типа $\mathscr{M}_{AB}$. В следующем разделе мы проиллюстрируем вышесказанное на примере вложений $V_2\subset$ $\subset S_N$, т. е. для $\mathfrak{G}\cong O(N)$.

Рассуждения для других типов простых алгебр Ли проводятся либо независимо, либо путем редукции по простым корням из D_l или B_l, например $D_4 \underset{\pi_4=\pi_3}{\longrightarrow} B_3 \underset{\pi_3=\pi_1}{\longrightarrow} G_2$. Для них, как и для серий B_l и D_l, имеется полная классификация Дынкина вложений трехмерных подалгебр. Изучение вложений нериманновых многообразий требует использования некомпактных вещественных форм и следует полностью аналогичной схеме. В частности, нериманово обобщение с ненулевым тензором $\underset{(1)}{G_C}{}^{AB}$ может быть получено на основе алгебры $\mathrm{SL}(N, \mathbf{R})$, симметричные части связностей $\tilde{\gamma}_C{}^{AB}$ (2.12) сопряжены симметричным касательным матрицам этой алгебры.

4. Рассмотрим вложение двумерного риманова многообразия V_2 в плоское евклидово объемлющее пространство S_N и реализуем представление нулевой кривизны (1.1) последнего операторами $\hat{A}_\pm = A_\pm{}^{AB}(z_+, z_-)\mathcal{M}_{AB}$, принимающими значения в ортогональной алгебре Ли ранга $[N/2]$ с элементами $\mathcal{M}_{AB} = -\mathcal{M}_{BA}$, удовлетворяющими соответствующим коммутационным соотношениям

$$(4.1)\qquad [\mathcal{M}_{AB}, \mathcal{M}_{CD}] = \delta_{AC}\mathcal{M}_{BD} + \delta_{BD}\mathcal{M}_{AC} - \delta_{BC}\mathcal{M}_{AD} - \delta_{AD}\mathcal{M}_{BC}$$

(отметим, что рассмотрение псевдоевклидовых объемлющих пространств осуществляется полностью аналогично с той лишь разницей, что символы Кронекера в (4.1) снабжаются множителями ε_A, отражающими псевдоевклидов характер метрики S_N и соответственно псевдоортогональность алгебры).

Для формулировки функций $A_\pm{}^{AB}(z_+, z_-)$ в терминах коэффициентов фундаментальных форм многообразия V_2, зависящих от параметров $x_j = i^{j-1}z_+ + (-i)^{j-1}z_-$ на нем, удобно перейти к комплексным структурам $q_{\pm j}{}^a \equiv q_{j1}{}^a \pm i q_{j2}{}^a$, $t_\pm{}^{ab} \equiv t_1{}^{ab} \pm i t_2{}^{ab}$, $\gamma_\pm{}^{\mu\nu} \equiv \gamma_1{}^{\mu\nu} \pm i\gamma_2{}^{\mu\nu}$, $e^{j\pm} \equiv e^{j1} \pm i e^{j2}$. Тогда нетрудно убедиться непосредственной проверкой с учетом соотношений (4.1), что подстановка операторов $\hat{A}_\pm = A_\pm{}^{AB}\mathcal{M}_{AB}$ с

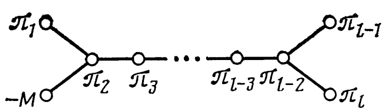
$$(4.2)\qquad A_\pm{}^{AB} = \gamma_\pm{}^{\mu\nu}\delta_\mu{}^A\delta_\nu{}^B + q_{\pm j}{}^a e^{j\mu}\delta_a{}^A\delta_\mu{}^B + t_\pm{}^{ab}\delta_a{}^A\delta_b{}^B$$

в представление (1.1) приводит к уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (2.2) для вложения V_2 в S_N. При этом операторы $\partial/\partial x^i + {}^1/{}_2\gamma_i{}^{\mu\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu} \equiv \partial_i + \gamma_i{}^{21}\mathcal{M}_{12}$ осуществляют ковариантное дифференцирование соответствующих тензорных величин (отметим, что ту же роль для вложений V_N в S_{N+p} играют операторы $\partial/\partial y^A + {}^1/{}_2\gamma_A{}^{AB}\mathcal{M}_{AB}$).

Операторы $\hat{A}_\pm$ могут быть эквивалентным образом разложены по элементам $E^{AB} = -E^{BA}$ ($E^{ij} \equiv e^{i\mu}e^{j\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu}$, $E^{ia} \equiv e^{i\mu}\mathcal{M}_{\mu a}$, $E^{ab} \equiv \mathcal{M}_{ab}$) алгебры Ли, удовлетворяющим коммутационным соотношениям (4.1), в которых символы δ_{AB} заменены на $\Delta^{AB} \equiv g^{ij}\delta_i{}^A\delta_j{}^B + \delta^{ab}\delta_a{}^A\delta_b{}^B$.

Перепишем выражение для операторов $\hat{A}_\pm$ в инвариантном корневом базисе Картана — Вейля. Вследствие того что ортогональные алгебры четной ($N=2l$) и нечетной ($N=2l+1$) размерностей отвечают разным классическим сериям (D_l и B_l, соответственно) то рассмотрим вначале четный случай, следуя обозначениям [12]. Серия D_l описывается расширенной схемой Дынкина

(4.3)



$(l \geqslant 4)$,

здесь $-M \equiv -\left(\pi_1 + 2\sum\limits_{\beta=2}^{l-2}\pi_\beta + \pi_{l-1} + \pi_l\right)$ — минимальный корень, а π_α — простые корни, отвечающие которым картановские образующие h_α и корневые векторы $X_\alpha^\pm$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

(4.4) $$[h_\alpha, h_\beta]=0, \qquad [h_\alpha, X_\beta^\pm]=\pm k_{\beta\alpha}^{\mathfrak{G}} X_\beta^\pm, \qquad [X_\alpha^+, X_\beta^-]=\delta_{\alpha\beta} h_\alpha,$$

где $k^{\mathfrak{G}}$ — матрицы Картана $\mathfrak{G}=D_l$. Корневые векторы всех положительных и отрицательных корней алгебры обозначаются $X_\Lambda^\pm$, $1\leqslant\Lambda\leqslant l(l-1)$. Рассмотрим в корневом пространстве $\mathbf{R}^l$ канонический базис (ε_a), в котором $\pi_\alpha=\varepsilon_\alpha-\varepsilon_{\alpha+1}$, $1\leqslant\alpha\leqslant l-1$, $\pi_l=\varepsilon_{l-1}+\varepsilon_l$, а все положительные корни даются формулами

$$\varepsilon_\alpha-\varepsilon_\beta=\sum_{\gamma=\alpha}^{\beta-1}\pi_\gamma, \qquad 1\leqslant\alpha<\beta\leqslant l;$$

$$\varepsilon_\alpha+\varepsilon_l=\sum_{\gamma=\alpha}^{l-2}\pi_\gamma+\pi_l, \qquad 1\leqslant\alpha\leqslant l-1;$$

$$\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta=\sum_{\gamma=\alpha}^{\beta-1}\pi_\gamma+2\sum_{\gamma=\beta}^{l-2}\pi_\gamma+\pi_{l-1}+\pi_l, \qquad 1\leqslant\alpha<\beta\leqslant l-1.$$

В этих обозначениях операторы $\hat{A}_\pm$ имеют вид

(4.5) $$\hat{A}_\pm=\sum_{\alpha=1}^{l} U_\pm{}^\alpha h_\alpha+\sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant l}\operatorname{Sp} R_\pm{}^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta},$$

где след берется по индексам $i, j=1, 2$ матриц

(4.6) $$X_{\alpha\beta}^{ij}\equiv\begin{pmatrix} X^+_{\varepsilon_\alpha-\tilde{\varepsilon}_\beta} & X^-_{\varepsilon_\alpha+\tilde{\varepsilon}_\beta} \\ -X^+_{\varepsilon_\alpha+\tilde{\varepsilon}_\beta} & -X^-_{\varepsilon_\alpha-\tilde{\varepsilon}_\beta}\end{pmatrix}, \qquad \tilde{\varepsilon}_\beta\equiv\varepsilon_\beta(-1)^{\delta_{\beta l}l};$$

$$R^{\alpha\beta}_{\pm ij}\equiv v\begin{pmatrix} r_\pm^{2\alpha-1,\,2\beta-1} & r_\pm^{2\alpha-1,\,2\beta} \\ r_\pm^{2\alpha,\,2\beta-1} & r_\pm^{2\alpha,\,2\beta}\end{pmatrix} v^{-1}, \qquad v\equiv\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix};$$

$$U_\pm{}^\alpha\equiv-i\left[2\sum_{\gamma=1}^{\alpha-1} t_\pm^{2\gamma+1,\,2\gamma+2}+\gamma_\pm{}^{21}\right], \qquad 1\leqslant\alpha\leqslant l-2;$$

$$U_\pm^{l+\varepsilon_l-1}\equiv i\left[2t_\pm^{2l-1,\,2l}-\sum_{\gamma=1}^{l-1} t_\pm^{2(l-\gamma)+1,\,2(l-\gamma)+2}-{}^1/_2\gamma_\pm{}^{21}\right];$$

$$U_\pm^{l-\varepsilon_l}\equiv-i\left[\sum_{\gamma=1}^{l-1} t_\pm^{2(l-\gamma)+1,\,2(l-\gamma)+2}+{}^1/_2\,\gamma_\pm^{21}\right]; \qquad \varepsilon_l\equiv\begin{cases}1, & l \text{ нечетное},\\ 0, & l \text{ четное}.\end{cases}$$

Функции $r_\pm{}^{aA}=-r_\pm{}^{Aa}$ даются формулой

(4.7) $$r_\pm{}^{\mu b}\equiv q_{\pm j}{}^b e^{j\mu}, \qquad r_\pm{}^{ab}\equiv t_\pm{}^{ab}, \qquad \mu=1, 2; \qquad 3\leqslant a, b\leqslant 2l, \qquad 1\leqslant A\leqslant 2l.$$

При этом третьи фундаментальные формы (2.4) выражаются через функции (4.7) или матрицы (4.6) в виде

(4.8) $$Q_3{}^{ab}=r_{\theta_1}{}^{aA} r_{\theta_2}{}^{Ab} dz_{\theta_1} dz_{\theta_2}=(v^{-1}R_{\theta_1}{}^{\alpha\gamma}R_{\theta_2}{}^{\gamma\beta}v)_{ij}\, dz_{\theta_1} dz_{\theta_2},$$

$$\theta_1, \theta_2=\pm; \qquad a=2\alpha+i-2; \qquad b=2\beta+j-2; \qquad i, j=1, 2.$$

Для выделения точно интегрируемых подклассов системы уравнений (2.2), вытекающей из подстановки операторов (4.5) в представление (1.1), рассмотрим в соответствии с общей конструкцией [8] градуировки алгебры D_l, согласованные с целочисленными вложениями в нее трехмерной подалгебры. При этом картановский элемент вложения H играет роль оператора градуировки, $[H, \mathfrak{G}_a]=2a\mathfrak{G}_a$. Вследствие того что процедура Дынкина [13] описания возможных типов вложений для всех конечномерных простых алгебр Ли $\mathfrak{G}$ единообразна (за вычетом нескольких вложений: $[(l-2)/2]$ для D_l и $[(l'-3)/2]$ для $E_{l'}$, $l'=6, 7, 8$), напомним вначале кратко основные ее этапы для произвольной $\mathfrak{G}$.

Каждое вложение однозначно определяется (с точностью до эквивалентности) структурой разложения картановского элемента H подалгебры A_1 по образующим h_α алгебры $\mathfrak{G}$, $H=\sum\limits_{\alpha=1}^{l} c_\alpha h_\alpha$, $l=\operatorname{rank}\mathfrak{G}$. Искомые постоянные c_α вложения находятся следующим образом. Рассматривается расширенная схема Дынкина для $\mathfrak{G}$, и из нее исключается набор $P^{(s)}\equiv\equiv\{p_1,\dots,p_s;\ s\leqslant l\}$ любых корней, отвечающих некоторой полупростой подалгебре $\mathfrak{G}^{(s)}$ ранга $l_s\leqslant l$ исходной алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда искомый элемент $H=\sum\limits_{\alpha=1}^{s} c_\alpha h_{p_\alpha}$ получается из условия $[H, X_{p_\alpha}^{\pm}]=\pm 2X_{p_\alpha}^{\pm}$. При этом такое вложение A_1 в $\mathfrak{G}$ (главное), при котором $[H, X_\alpha^{\pm}]=\pm 2X_\alpha^{\pm}$, $1\leqslant\alpha\leqslant l$, играет выделенную роль, т. к. описание всех вложений $A_1\subset\mathfrak{G}$ (за вычетом отмеченных выше для D_l и $E_{l'}$) сводится к рассмотрению главных во всех алгебрах $\mathfrak{G}^{(s)}$. Таким образом, записывая данное условие в виде

$$(4.9)\qquad [H, X_\alpha^{\pm}]=\pm 2X_\alpha^{\pm},\quad 1\leqslant\alpha\neq s\leqslant l;\qquad [H, X_M^{\mp}]=\pm 2X_M^{\mp}$$

при $1\leqslant s\leqslant l$, путем последующей редукции устанавливается структура H для остальных вложений (не максимальных). Из формулы (4.9) находим

$$(4.10)\qquad H=H^{(s)}=\sum_{\alpha=1}^{l} k_\alpha^{(s)} h_\alpha,\quad k_\alpha^{(s)}=2\sum_{\beta=1}^{l}(k^{-1})_{\alpha\beta}-$$
$$-2\nu_s(k^{-1})_{\alpha s},\quad \nu_s\equiv\left(1+\sum_{\beta=1}^{l} d_\beta^M\right)\Big/ d_s^M,$$

где d_α^Λ — коэффициенты разложения корня Λ по простым, $\Lambda=\sum\limits_{\alpha=1}^{l} d_\alpha^\Lambda\pi_\alpha$ (в данном случае максимального корня M), k — матрица Картана $\mathfrak{G}$. Поэтому с учетом соотношения $[H, X_\Lambda^{\pm}]=\pm 2\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{l} d_\alpha^\Lambda-d_s^\Lambda\nu_s\right)X_\Lambda^{\pm}$, приходим к следующей структуре локальной части $\hat{\mathfrak{G}}$ алгебры $\mathfrak{G}$, снабженной градуировкой $H^{(s)}$:

$$(4.11\text{а})\qquad \mathfrak{G}_0=\left\{h_\alpha,\ 1\leqslant\alpha\leqslant l;\ X_\Lambda{}^+, X_\Lambda{}^-:\sum_{\alpha=1}^{l} d_\alpha{}^\Lambda=d_s{}^\Lambda\,\nu_s\right\},$$

$$\mathfrak{G}_{\pm1}=\left\{X_\Lambda{}^\pm:\sum_{\alpha=1}^{l} d_\alpha{}^\Lambda=d_s{}^\Lambda\nu_s+1\right\};\qquad 1\leqslant s\leqslant l.$$

При этом естественно, что канонической градуировке (главной A_1 подалгебре $\mathfrak{G}$) отвечает $s=0$, т. е.

$$(4.11\text{б})\qquad \mathfrak{G}_0=\{h_\alpha,\ 1\leqslant\alpha\leqslant l\},\qquad \mathfrak{G}_{\pm1}=\{X_\alpha{}^\pm,\ 1\leqslant\alpha\leqslant l\}.$$

В рассматриваемом случае серии D_l из (4.11а) имеем

$$(4.12\text{а})\qquad \mathfrak{G}_0=\{h_\gamma,\ 1\leqslant\gamma\leqslant l;\ \xi_s X^+_{\sum\limits_{\gamma=1}^{l-1}\pi_\gamma},\ \xi_s X^-_{\sum\limits_{\gamma=1}^{l-1}\pi_\gamma};\ \xi_s X^+_{\sum\limits_{\gamma=\alpha}^{l-2}\pi_\gamma+\sum\limits_{\gamma=l-\alpha+1}^{l}\pi_\gamma},$$

$$\xi_s X^-_{\sum\limits_{\gamma=\alpha}^{l-2}\pi_\gamma+\sum\limits_{\gamma=l-\alpha+1}^{l}\pi_\gamma},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant\min(s,\ l-s)\},$$

$$\mathfrak{G}_{\pm1}=\{X^\pm_{\pi_\gamma},\ 1\leqslant\gamma\neq s\leqslant l;\ X^\mp_M;$$

$$\xi_s X^\pm_{\sum\limits_{\gamma=\alpha}^{l-2}\pi_\gamma+\sum\limits_{\gamma=l-\alpha}^{l}\pi_\gamma},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant\min(s,\ l-s-1)\},$$

$$\xi_s\equiv\begin{cases}0, & s=1,\ l-1,\ l,\\ 1, & 2\leqslant s\leqslant l-2,\end{cases}$$

или

$$(4.12\text{б})\qquad \mathfrak{G}_0=\{h_\gamma,\ 1\leqslant\gamma\leqslant l;\quad \xi_s X_{\varepsilon_1-\varepsilon_l};\quad \xi_s X_{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_{l-\alpha+1}},$$

$$1\leqslant\alpha\leqslant\min(s,l-s)\},$$

$$\mathfrak{G}_{\pm1}=\{X^\pm_{\varepsilon_\gamma-\varepsilon_{\gamma+1}},\quad \gamma\neq s;\quad X^\pm_{\varepsilon_{l-1}+\varepsilon_l};\quad X^\mp_{\varepsilon_1+\varepsilon_2};$$

$$\xi_s X^\pm_{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_{l-\alpha}},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant\min(s,l-s-1)\}.$$

Часть этих градуировок, естественно, эквивалентна, что легко увидеть из схемы (4.3) при вычеркивании соответствующих точек.

Сохраняя в разложении (4.5) для операторов $\hat{A}_+$ и $\hat{A}_-$ лишь члены, содержащие элементы подпространств $\mathfrak{G}_0\oplus\mathfrak{G}_{+1}$ и $\mathfrak{G}_0\oplus\mathfrak{G}_{-1}$, соответственно, при учете таблицы (4.12), из условия приравнивания нулю коэффициентных функций при остальных корневых векторах получаем искомые соотношения для величин $r_\pm{}^{aA}$ из (4.7). Перечислим все неэквивалентные возможности. При четных l имеем

$$\textbf{Случай } s=1:\quad R^{\alpha\beta}_{+11}=R^{\alpha\beta}_{+11}\sum_{\gamma=2}^{l-1}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\alpha+1},$$

$$(4.13)\qquad R^{\alpha\beta}_{+21}=R^{\alpha\beta}_{+21}\delta_{\alpha1}\delta_{\beta2},\qquad R^{\alpha\beta}_{+12}=R^{\alpha\beta}_{+12}\delta_{\alpha l-1}\delta_{\beta l},\qquad R^{\alpha\beta}_{+22}=0;$$

Случай $2\leqslant s+\leqslant[(l+1)/2]$:

$$R_{+11}^{\alpha\beta}=R_{+11}^{\alpha\beta}\left[\delta_{\alpha1}\delta_{\beta l}+\sum_{\substack{\gamma=1\\ \gamma\neq s}}^{l-1}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\alpha+1}\right],$$

$$R_{+21}^{\alpha\beta}=R_{+21}^{\alpha\beta}\left[\delta_{\alpha1}\delta_{\beta2}+\sum_{\gamma=1}^{s}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta l-\alpha+1}\right],$$

$$R_{+12}^{\alpha\beta}=R_{+12}^{\alpha\beta}\left[\sum_{\gamma=1}^{s}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta l-\alpha+1}+\sum_{\gamma=1}^{\min(s,l-s-1)}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta l-\alpha}+\delta_{\alpha l-1}\delta_{\beta l}\right],$$

$$R_{+22}^{\alpha\beta}=R_{+22}^{\alpha\beta}\delta_{\alpha1}\delta_{\beta l}.$$

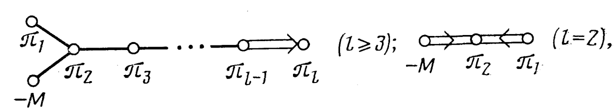
Функции $R_{-ij}^{\alpha\beta}$ согласно их определению получаются из $R_{+ij}^{\alpha\beta}$ по формуле

(4.14) $$R_{-ij}^{\alpha\beta}=[(R_+{}^{\alpha\beta})^{-1}\det R_+{}^{\alpha\beta}]_{ij}^{*}.$$

Для нечетных l следует в (4.13) и (4.14) сделать замену $R_{\pm j1}^{\alpha l}\rightleftarrows R_{\pm j2}^{\alpha l}$.

Для решения аналогичной задачи в случае ортогональных алгебр нечетных размерностей в корневой системе серии D_{l+1} достаточно приравнять простые корни π_l и π_{l+1}, что соответствует переходу от (4.3) к π-системе для серии B_l:

(4.15)



$$-M\equiv-\pi_1-2\sum_{\beta=2}^{l}\pi_\beta,$$

или на языке коэффициентных функций равенствам $r_{\pm}^{2l-1,A}=0$.

Таким образом, в соответствии с выражением (4.8) классификация точно интегрируемых вложений V_2 в S_N определяется структурой третьих фундаментальных форм, имеющих ненулевые коэффициентные функции (4.13) и (4.14). Именно в терминах ненулевых элементов матрицы $Q_3{}^{ab}$ может быть сформулирована система (3.1), описывающая такие вложения. С этой целью следует, пользуясь форм-инвариантностью (1.1) относительно преобразований (3.2) с $g_0\in\tilde{G}_0$, привести разложение (4.5) к виду [8]

(4.16) $$\hat{A}_+=g^{-1}\mathfrak{I}_+g,\qquad \hat{A}_-=\mathfrak{I}_-+g^{-1}\partial g/\partial z_-,$$

выразив групповые параметры элемента g из $\tilde{G}_0$ через коэффициенты при дифференциалах (2.4).

Проиллюстрируем общие выводы на примере нетривиальных вложений V_2 в объемлющие пространства S_3 и S_5, связанные с алгебрами B_1 ($\simeq A_1$) и B_2, а также проследим редукцию к случаю объемлющего пространства, снабженного структурой алгебры G_2.

Алгебра B_1. Формула (4.5) в этом случае приводится к виду

(4.17) $$\hat{A}_\pm = u^\pm H + f_+{}^\pm X^+ + f_-{}^\pm X^-,$$

где $f_+{}^\pm \equiv q_{\pm j} e^{j-}$, $f_-{}^\pm \equiv q_{\pm j} e^{j+}$, $u^\pm \equiv {}^1/_2 i\gamma_\pm{}^{12}$ (здесь и в дальнейшем несущественные числовые нормировочные множители при корневых векторах будем для краткости опускать). Из условия приравнивания нулю коэффициентов при X^- в $\hat{A}_+$ и X^+ в $\hat{A}_-$, т. е. $f_-{}^+ = f_+{}^- = 0$, получаем $q_{1j}e^{j1} - q_{2j}e^{j2} = 0$, $q_{1j}e^{j2} + q_{2j}e^{j1} = 0$, откуда $q_{ik}g^{kj} = q_{ij}{}^{-1}\det(qe)$. В инвариантной форме это условие записывается так:

(4.18) $$q_{ik}g^{kl}q_{lj} = \delta_{ij}\exp\rho \quad \text{или} \quad Q_3 = \exp\rho\,(dx^j)^2.$$

Подставляя (4.17) с $f_-{}^+ = f_+{}^- = 0$ в представление (1.1), приходим к системе уравнений $u^+_{,z_-} - u^-_{,+z} = f_+{}^+ f_-{}^-$, $(\ln f_+{}^+)_{,z_-} = -2u^-$, $(\ln f_-{}^-)_{,z_+} = 2u^+$, вследствие которых ф—ция ρ удовлетворяет уравнению Лиувилля $\rho_{,z_+z_-} = 2\exp\rho$. В конформно-плоской метрике $g_{kl} = \lambda^{-2}\delta_{kl}\exp\rho$, $\lambda = \text{const}$, условие (4.18) в терминах тензора $b_i{}^j = b_j{}^i \equiv q_{ik}g^{kj}$ имеет вид $b_i{}^k b_j{}^k = \delta_{ij}\lambda^2$, откуда следует, что точно интегрируемое вложение, описываемое уравнением Лиувилля, отвечает либо минимальной поверхности с $\sum_j b_j{}^j = 0$, либо поверхности постоянной кривизны с $b_i{}^j = \lambda\delta_i{}^j$.

Хорошо известно, что в метрике Чебышева поверхность постоянной кривизны описывается уравнением (вполне интегрируемым) синус-Гордон, $\rho_{,z_+z_-} = 2\exp\rho - 2\exp(-\rho)$. Для получения его в рамках данной конструкции (см. раздел 1) нужно сохранить в (4.17) все члены, наложив на них условия $f_+{}^+ f_-{}^+ = f_-{}^- f_+{}^- = 1$, отвечающие канонической градуировке бесконечномерной алгебры Ли $\tilde{A}_1$ конечного роста [14] в вырожденном ее представлении (с $\tilde{X}_1{}^\pm = X^\pm$, $\tilde{X}_2{}^\pm = X^\mp$, $\tilde{h}_1 = -\tilde{h}_2 = H$). Эти условия эквивалентны равенству

(4.19) $$q_{ik}g^{kl}q_{lj} = \delta_{ij}[\delta_{i1}\exp\rho + \delta_{i2}(\exp\rho - 1)]$$

или

$$Q_3 = \exp\rho\,(dx^1)^2 + (\exp\rho - 1)(dx^2)^2.$$

Алгебра B_2. Для операторов $\hat{A}_\pm$ **имеем**

(4.20) $$\hat{A}_\pm = u_1{}^\pm h_1 + u_2{}^\pm h_2 + f_{+1}{}^\pm X_1{}^+ + f_{-1}{}^\pm X_1{}^- + f_{+2}{}^\pm X_2{}^+ + f_{-2}{}^\pm X_2{}^- + $$
$$+ f_{12}{}^\pm X_{12}{}^+ + f_{-12}^\pm X_{12}{}^- + f_{122}^\pm X_{122}^+ + f_{-122}^\pm X_{122}^-,$$

где $f_1{}^\pm = (q_{\pm j}{}^3 + iq_{\pm j}{}^4)e^{j-}$, $f_{-1}{}^\pm = (q_{\pm j}{}^3 - iq_{\pm j}{}^4)e^{j+}$, $f^\pm_{122} = (q_{\pm j}{}^3 - iq_{\pm j}{}^4)e^{j-}$, $f^\pm_{-122} = (q_{\pm j}{}^3 + iq_{\pm j}{}^4)e^{j+}$, $f_2{}^\pm = t_\pm{}^{35} + it_\pm{}^{45}$, $f_{-2}{}^\pm = t_\pm{}^{35} - it_\pm{}^{45}$, $f_{12}{}^\pm = q_{\pm j}{}^5 e^{j-}$, $f^\pm_{-12} = q_{\pm j}{}^5 e^{j+}$, $u_1{}^\pm = -2\gamma_\pm{}^{12}$, $u_2{}^\pm = \gamma_\pm{}^{12} - t_\pm{}^{34}$; индексы у корневых векторов обозначают число соответствующих простых корней π_1 и π_2, по которым данный корень разлагается. В данном случае получаем две неэквивалентные градуировки, согласованные с целочисленными вложениями A_1 в B_2, для которых локальные части (с точностью до вейлевских отражений) имеют вид

(4.21а) $$\mathfrak{G}_0 = \{h_1, h_2\}, \quad \mathfrak{G}_{\pm1} = \{X_1{}^\pm, X_2{}^\pm\};$$

(4.21б) $$\mathfrak{G}_0 = \{h_1, h_2; X_{2\pm}\}, \quad \mathfrak{G}_{\pm1} = \{X_1{}^\pm, X_{12}{}^\pm, X_{122}^\pm\}.$$

В первом варианте (4.21а), отвечающем точно интегрируемой системе (цепочка Тоды для B_2)

$$\rho_{\alpha z_+ z_-}=k_{\alpha\beta}\exp\rho_\beta,\quad k=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

условия на спектральный состав $\hat{A}_\pm$: $f^{\pm}_{122}=f^{\pm}_{-122}=f_{12}{}^{\pm}=f^{\pm}_{-12}=f_{+1}{}^{-}=f_{+2}{}^{-}=$ $=f_{-1}{}^{+}=f_{-2}{}^{+}=0$ — дают

$$(4.22)\qquad \begin{aligned} &q_{ik}{}^3 g^{kl} q_{lj}{}^3=\delta_{ij}\exp\rho_1=q_{ik}{}^4 g^{kl} q_{lj}{}^4;\\ &q_{ik}{}^3 g^{kl} q_{lj}{}^4=\varepsilon_{ij}\exp\rho_1;\qquad q_{ik}{}^a g^{kl} q_{lj}{}^5=0\quad \forall a=3,4,5;\\ &t_i{}^{35}=-\varepsilon_{ij}t_j{}^{45}\qquad ((t_1{}^{35})^2+(t_2{}^{35})^2=\exp\rho_2);\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Во втором варианте (4.21б), отвечающем точно интегрируемой системе струнного типа [15]

$$\begin{aligned} &\rho_{1,z_+z_-}=2\exp\rho_1-2\omega_{,z_+}\omega_{,z_-}\,\mathrm{sh}\,[(\rho_1-\rho_2)/2]\,/\,\mathrm{ch}^3\,[(\rho_1-\rho_2)/2],\\ &\rho_{2,z_+z_-}=2\exp\rho_2+2\omega_{,z_+}\omega_{,z_-}\,\mathrm{sh}\,[(\rho_1-\rho_2)/2]\,/\,\mathrm{ch}^3\,[(\rho_1-\rho_2)/2],\\ &\{\mathrm{th}^2\,[(\rho_1-\rho_2)/2]\,\omega_{,z_+}\}_{,z_-}+\{\mathrm{th}^2\,[(\rho_1-\rho_2)/2]\,\omega_{,z_-}\}_{,z_+}=0,\end{aligned}$$

условия на спектральный состав $\hat{A}_\pm$: $f_{-1}{}^{+}=f_{+1}{}^{-}=f^{+}_{-12}=f^{-}_{+12}=f^{+}_{-122}=f^{-}_{+122}=0$ — приводят к

$$(4.23)\qquad q_{ik}{}^a g^{kl} q_{lj}{}^a=\delta_{ij}\exp\,[\rho_{(a)}(z_+,z_-)].$$

Алгебра G'_2. Операторы $\hat{A}_\pm$, реализующие вложение двумерной поверхности в плоское пространство, снабженное структурой группы G_2, могут быть построены из соответствующих операторов для $V_2\subset S_7$ приравниванием корней в π-системе B_3, $\pi_3=\pi_1$. Это эквивалентно условиям $(q_{\pm j}{}^a+i\theta q_{\pm j}^{a+1})e^{j(-\theta)}=t_\pm^{9-a,7}+i\theta t_\pm^{8-a,7}$; $\qquad i\theta q_{\pm j}{}^7 e^{j(-\theta)}=t_\pm{}^{35}-t_\pm{}^{46}-i\theta(t_\pm{}^{36}+t_\pm{}^{45})$; $t_\pm{}^{34}+t_\pm{}^{56}={}^1/_2\gamma_\pm{}^{21}$; $a=3{,}5$; $\theta\equiv\pm$; и приводит к следующему выражению:

$$(4.24)\qquad \begin{aligned} \hat{A}_\pm=&-i\gamma_\pm{}^{21}h_1-i(\gamma_\pm{}^{21}+2t_\pm{}^{34})h_2+(q_{\pm j}{}^3-i\theta q_{\pm j}{}^4)e^{j\theta}X_1{}^\theta+\\ &+(q_{\pm j}{}^5-i\theta q_{\pm j}{}^6)e^{j\theta}X_{12}{}^\theta-(q_{\pm j}{}^3+i\theta q_{\pm j}{}^4)e^{j\theta}X^{\theta}_{11122}-\\ &-(q_{\pm j}{}^5+i\theta q_{\pm j}{}^6)e^{j\theta}X^{\theta}_{1112}+[t_\pm{}^{35}+t_\pm{}^{46}-i\theta(t_\pm{}^{36}-t_\pm{}^{45})]X_2{}^\theta+\\ &+[t_\pm{}^{35}-t_\pm{}^{46}+i\theta(t_\pm{}^{36}+t_\pm{}^{45})]X^{\theta}_{112}\end{aligned}$$

(здесь приняты те же обозначения, что и в формуле (4.20) для индексов простых корней G_2). Последующее выделение точно интегрируемых вложений полностью следует описанной выше общей конструкции.

5. Резюмируем кратко основные выводы. Предложен метод классификации вложений точно и вполне интегрируемых многообразий $\tilde{V}_n$ в римановы или неримановы объемлющие пространства $\tilde{V}_N$. Он, однако, является конструктивным лишь для двумерных многообразий ($n=2$) из-за отсутствия эффективных методов интегрирования нелинейных систем в пространствах измерений больших двух ($n>2$). В основе предлагаемой классификации лежит алгебраический подход к интегрированию нелиней-

ных динамических систем [6, 8], ассоциируемых посредством представления типа Лакса (нулевой кривизны объемлющего пространства) с алгебрами Ли $\mathfrak{G}$, градуировка которых согласована с вложениями в них трехмерной подалгебры sl(2). При этом коэффициентные функции разложения операторов Лакса по элементам $\mathfrak{G}$ выражаются определенным образом через тензоры основных фундаментальных форм. Таким образом, выбор градуировки $\mathfrak{G}$ и спектрального состава операторов, приводящий к системам уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (в интегрируемом в указанном смысле секторе) и, следовательно, к искомой классификации многообразий, устанавливает геометрический смысл последней в терминах структуры третьих фундаментальных форм.

В частности, для вложений двумерной римановой поверхности V_2 в плоское объемлющее пространство S_N приведена таблица (4.13) условий на коэффициенты, определяющие третьи формы, отвечающие каждому неэквивалентному вложению sl(2) в алгебру ортогонального типа ранга $[N/2]$.

По-видимому, как это видно из рассмотренных в конце предыдущего раздела примеров, требования на эти коэффициенты могут быть выражены более непосредственным и наглядным языком через собственные значения матрицы третьей формы, если эффективным образом использовать калибровочный произвол (3.2).

В заключение я хочу выразить искреннюю признательность А. Н. Лезнову, Ю. И. Манину и А. Т. Фоменко за полезные обсуждения.

Литература

[1] *Eisenhart L. P.* Riemannian Geometry. Princeton: Univ. Press., 1926.
[2] *Eisenhart L. P.* Non-Riemanian Geometry. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. VIII, 1927.
[3] *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии. М.: МГУ, 1933.
[4] *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of Differential Geometry. N. Y.: Interscience Pub., 1963. *Helgason S.* Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces. N. Y.: Acad. Press, 1978.
[5] *Савельев М. В.* О построении двумерных римановых многообразий, вложенных в объемлющее евклидовое (псевдоевклидовое) пространство, Препринт 83-32, Серпухов: ИФВЭ, 1983.
[6] *Leznov A. N., Saveliev M. V.*— Commun. Math. Phys., 1980, *74*, № 1, 111—118. *Лезнов А. Н., Савельев М. В., Смирнов В. Г.*— ТМФ, 1981, *48*, № 1, 3—12. *Leznov A. N., Saveliev M. V.*— Physica, 1981, *3D*, № 1, 2; 62—73. *Лезнов А. Н., Савельев М. В.*— Функц. анализ и его прилож., 1980, *14*, № 2, 87—89.
[7] *Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б.*— ТМФ, 1982, *51*, № 1, 10—21.
[8] *Leznov A. N., Saveliev M. V.*— Commun. Math. Phys., 1983, *89*, № 1, 59—75.
[9] *Габескирия М. А., Савельев М. В.* Представление типа Лакса для вложений римановых многообразий. Препринт 83-58, Серпухов: ИФВЭ, 1983.
[10] *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. *Фаддеев Л. Д.*— Соврем. проблемы матем., 1974, *3*, 93—134.
[11] *Лезнов А. Н.*— ТМФ, 1984, *58*, № 1, 156—160.
[12] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.
[13] *Дынкин Е. Б.*— Матем. сб., 1952, *30*, 349—462; Тр. ММО, 1952, *1* — 145.
[14] *Кац В. Г.*— Изв. АН СССР, сер. матем., 1968, *2*, № 4, 1271—1311.
[15] *Barbashov B. M., Nesterenko V. V., Cherviakov A. M.*— Commun. Math. Phys., 1982, *84*, № 4, 471—486.

Институт физики высоких энергий

Поступила в редакцию
10.VIII.1983 г.

CLASSIFICATION PROBLEM FOR EXACTLY INTEGRABLE EMBEDDINGS OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS AND COEFFICIENTS OF THE THIRD FUNDAMENTAL FORMS

Saveliev M. V.

A method is proposed for classification of exactly and completely integrable embeddings of two-dimensional manifolds into Riemannian and non-Riemannian enveloping spaces, which is based on the algebraic approach [6, 8] to the integration of nonlinear dynamical systems. Here the grading conditions and spectral structure of the Lax-pair operators taking values in a graded Lie algebra, which single out integrable classes of nonlinear systems, are formulated in terms of the structure of the 3-rd fundamental form tensors. Corresponding to every embedding of three-dimensional subalgebra sl(2) into a simple finite-dimensional (infinite-dimensional of finite growth) Lie algebra $\mathfrak{G}$ is a definite class of exactly (completely) integrable embeddings of two-dimensional manifold into enveloping space provided with the structure $\mathfrak{G}$.