А. Г. Сергеев, Кэлерова геометрия универсального пространства Тейхмюллера и коприсоединенных орбит группы Вирасоро, *Труды МИАН*, 2006, том 253, 175–203

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2006, т. 253, с. 175–203

УДК 515.17

Кэлерова геометрия универсального пространства Тейхмюллера и коприсоединенных орбит группы Вирасоро[1]

©2006 г. А. Г. Сергеев[2]

Поступило в октябре 2005 г.

Памяти Анатолия Георгиевича Витушкина

Изучается кэлерова геометрия универсального пространства Тейхмюллера и связанных с ним бесконечномерных кэлеровых многообразий. Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ может быть реализовано в виде открытого подмножества в комплексном банаховом пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов в единичном круге. Классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где G — фуксова группа, содержатся в $\mathcal{T}$ в виде комплексных кэлеровых подмногообразий. С универсальным пространством $\mathcal{T}$ тесно связаны однородные пространства $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ и $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ группы диффеоморфизмов единичной окружности $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Они являются кэлеровыми многообразиями Фреше и реализуются в виде орбит коприсоединенного действия группы Вирасоро (исчерпывая все коприсоединенные орбиты группы Вирасоро, обладающие кэлеровой структурой).

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$, возникшее в работах Альфорса и Берса, играет ключевую роль в теории квазиконформных отображений и римановых поверхностей. Его можно определить как пространство квазисимметричных гомеоморфизмов единичной окружности S^1 (т.е. гомеоморфизмов S^1, продолжающихся до квазиконформных отображений единичного круга Δ) по модулю дробно-линейных автоморфизмов Δ. Пространство $\mathcal{T}$ обладает естественной кэлеровой структурой и может быть реализовано в виде голоморфно выпуклого открытого подмножества в комплексном банаховом пространстве $B_2(\Delta)$ голоморфных квадратичных дифференциалов в Δ с конечной нормой Нехари. Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ содержит в себе все классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где G — фуксова группа, и в том числе все конечномерные пространства Тейхмюллера, отвечающие компактным римановым поверхностям конечного рода. Пространства $T(G)$ вкладываются в $\mathcal{T}$ в виде комплексных кэлеровых подмногообразий, при этом каноническая кэлерова метрика на $\mathcal{T}$ редуцируется к стандартной метрике Петерсона–Вейля на каждом $T(G)$ (этот факт был отмечен Нагом в [13]).

“Гладкая” часть пространства $\mathcal{T}$ совпадает с однородным пространством $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, являющимся фактором группы диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ по модулю дробно-линейных автоморфизмов круга Δ. Это пространство, так же как и тесно связанное с ним другое однородное пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ по модулю вращений S^1, реализуется как коприсоединенная орбита группы Вирасоро Vir. Группа Вирасоро, являющаяся центральным расширением группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, играет важную роль в современной квантовой

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00236), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1542.2003.1) и программы “Математические методы в нелинейной динамике” Президиума РАН.

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: sergeev@mi.ras.ru

физике и в теории струн в особенности. В частности, принципиальное значение имеет исследование ее неприводимых представлений, которые можно строить с помощью метода орбит Кириллова–Костанта, реализующего неприводимые представления группы в пространствах функций (или, более общим образом, сечений расслоений) на ее коприсоединенных орбитах. В основе метода лежит тот факт, что указанные орбиты обладают канонической инвариантной симплектической структурой. Изучению коприсоединенных орбит группы Вирасоро посвящен целый ряд работ [6, 16, 18, 5], в которых получена их классификация. Среди всех орбит особый интерес с точки зрения физических приложений представляют те, которые обладают кэлеровой структурой, поскольку к ним применима процедура кэлерова квантования. В случае группы Вирасоро кэлеровы орбиты исчерпываются пространствами $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ и $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, рассматриваемыми в данной работе.

Коротко о ее содержании. В разд. 1 исследуется кэлерова геометрия универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Сначала мы напоминаем основные свойства квазиконформных отображений и их описание в терминах дифференциалов Бельтрами, следуя прекрасным лекциям Альфорса [1]. Затем даются определение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ как фактора пространства квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 по модулю дробно-линейных автоморфизмов круга Δ и эквивалентное определение в терминах квазикругов (т.е. образов Δ при квазиконформных отображениях). Кэлерова структура на $\mathcal{T}$ может быть введена с помощью вложения Берса, реализующего $\mathcal{T}$ в виде открытого подмножества в комплексном банаховом пространстве $B_2(\Delta)$ голоморфных квадратичных дифференциалов в Δ с конечной нормой Нехари.

Классические пространства Тейхмюллера $T(G)$ содержатся в $\mathcal{T}$ в виде комплексных кэлеровых подмногообразий, отвечающих G-инвариантным квазисимметричным гомеоморфизмам. При этом каноническая метрика Петерсона–Вейля на $T(G)$ может быть получена, следуя [13], редукцией кэлеровой метрики на $\mathcal{T}$. Стоит подчеркнуть, что квазикруги, отвечающие точкам $T(G)$, ведут себя весьма нерегулярным образом при подходе к границе, а именно все они имеют фрактальную границу.

Группа квазисимметричных гомеоморфизмов S^1 действует с помощью замены переменных на соболевском пространстве $H = H_0^{1/2}(S^1,\mathbb{R})$ функций из $L^2(S^1,\mathbb{R})$ с нулевым средним по окружности, имеющих обобщенную производную порядка 1/2. Пространство H обладает естественной поляризацией, т.е. разложением комплексифицированного пространства $H^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$H^{\mathbb{C}} = H_+ \oplus H_-$$

подпространств, состоящих из функций, ряды Фурье которых содержат только положительные (соответственно только отрицательные) гармоники. Указанное действие квазисимметричных гомеоморфизмов S^1 на H порождает отображение универсального пространства Тейхмюллера в грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_+(H^{\mathbb{C}})$, состоящее из подпространств типа H_+ в $H^{\mathbb{C}}$. Это отображение является голоморфной иммерсией относительно естественной структуры комплексного банахова многообразия на $\mathrm{Gr}_+(H^{\mathbb{C}})$.

Раздел 2 посвящен исследованию кэлеровой геометрии многообразий $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ и $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$, являющихся коприсоединенными орбитами группы Вирасоро. Мы даем описание коприсоединенного действия группы Вирасоро, а также приводим его интерпретацию в терминах операторов Хилла, восходящую к работе Лазуткина–Панкратовой [8].

Затем мы переходим к пространству $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, которое можно рассматривать как "гладкую" часть пространства $\mathcal{T}$. Естественное вложение $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T}$ реализует $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ в виде комплексного кэлерова подмногообразия в $\mathcal{T}$. При этом, как отмечено в работе [13], образ указанного вложения трансверсально пересекает все классические пространства Тейхмюллера $T(G)$. Что, впрочем, не удивительно, учитывая, что квазикруги, отвечающие точкам $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, имеют гладкие границы в отличие от фрактальных границ квазикругов, отвечающих точкам $T(G)$.

По аналогии с грассмановой реализацией универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ можно построить и грассманову реализацию пространства $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ в виде подпространства гильбертова грассманиана $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$, состоящего из подпространств $H^{\mathbb{C}}$, проекция которых на подпространство H_+ "почти обратима" (является фредгольмовым оператором), а проекция на H_- "мала" (является оператором Гильберта–Шмидта).

Пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ тесно связано с пространством $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, будучи голоморфным круговым расслоением над $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$. Лемперт в работе [9] указал, что и сама группа Вирасоро является голоморфным расслоением над $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ со слоем $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus 0$. Пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ обладает двухпараметрическим семейством симплектических структур и согласованной с ними единственной канонической комплексной структурой, которую можно ввести, пользуясь реализацией $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ в виде пространства $\mathfrak{S}$ голоморфных однолистных функций в круге Δ, предложенной в работе Кириллова–Юрьева [7]. Пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ также допускает естественную грассманову реализацию в виде подпространства гильбертова грассманиана $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$.

1. УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ТЕЙХМЮЛЛЕРА

1. Квазиконформные отображения. Напомним (см. [1]), что гомеоморфизм $w\colon D_1 \to D_2$ между областями D_1, D_2 на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$ называется *квазиконформным*, если функция w имеет локально интегрируемые производные (в обобщенном смысле) в D_1, которые удовлетворяют уравнению Бельтрами

$$w_{\bar z} = \mu w_z, \qquad z \in D_1, \tag{1.1}$$

где μ — некоторая измеримая комплекснозначная функция на D_1, удовлетворяющая неравенству

$$\|\mu\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{z\in D_1}|\mu(z)| = k < 1. \tag{1.2}$$

Функция μ называется *дифференциалом Бельтрами* (или потенциалом уравнения (1.1)), а константа k часто указывается в названии k-квазиконформных отображений.

В частности, при $k=0$ гомеоморфизм w задает конформное отображение D_1 на D_2. Инфинитезимально квазиконформность отображения w означает, что оно отображает малые круги в эллипсы, эксцентриситет которых (отношение большой оси эллипса к малой) ограничен единой константой $K<\infty$, которая связана с константой $k=\|\mu\|_\infty$ формулой

$$K = \frac{1+k}{1-k}.$$

Константу K также иногда включают в название K-квазиконформных отображений.

Заметим, что композиция K_1-квазиконформного отображения $f\colon D_1\to D_2$ и K_2-квазиконформного отображения $g\colon D_2\to D_3$ является K_1K_2-квазиконформным отображением $f\circ g\colon D_1\to D_3$. Обратное отображение к K-квазиконформному отображению $f\colon D_1\to D_2$ является снова K-квазиконформным.

Название "дифференциал Бельтрами" объясняется поведением потенциалов μ при конформных заменах координат, а именно при такой замене, задаваемой голоморфным отображением f, потенциал μ уравнения Бельтрами (1.1) преобразуется по правилу

$$\mu(f(z)) = \mu(z)\frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}.$$

Вообще назовем функцию φ в области D *дифференциалом типа* (m,n), где $m,n\in\mathbb{Z}$, если величина $\varphi\,dz^m\,d\bar z^n$ остается инвариантной при конформных заменах координат. Тогда дифференциал Бельтрами μ есть дифференциал типа $(-1,1)$ в смысле этого определения.

В теории квазиконформных отображений ключевую роль играет теорема Альфорса–Берса о разрешимости уравнения Бельтрами (1.1) на комплексной плоскости.

Теорема Альфорса–Берса. *Для любой измеримой функции μ на комплексной плоскости такой, что $\|\mu\|_\infty = k < 1$, найдется решение w уравнения Бельтрами*

$$w_{\bar z} = \mu w_z,$$

задающее квазиконформное отображение $w\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Любое другое решение $\widetilde{w}$ этого уравнения имеет вид

$$\widetilde{w} = w\circ f,$$

где f — конформное отображение. В частности, существует единственное решение уравнения (1.1), *оставляющее три различные точки $\overline{\mathbb{C}}$ неподвижными.*

Подробное доказательство теоремы дано в лекциях Альфорса [1], здесь мы ограничимся изложением схемы построения решения в случае, когда потенциал μ имеет компактный носитель (общий случай сводится к этому с помощью аппроксимации и стандартных рассуждений, использующих нормальные семейства). Покажем, что при указанном предположении существует единственное решение уравнения Бельтрами (1.1), удовлетворяющее условиям

$$w(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad w_z - 1 \in L^p,$$

где $p>2$ — некоторое число, достаточно близкое к 2, которое будет выбрано позже.

Введем *оператор Коши–Грина*

$$Ph(\zeta) := -\frac{1}{\pi}\int h(z)\left(\frac{1}{z-\zeta}-\frac{1}{z}\right)dx\,dy,$$

где интеграл берется по всей комплексной плоскости. Указанный оператор корректно определен для функций $h\in L^p$ с $p>2$ и задает непрерывную (и даже непрерывную по Гёльдеру с показателем $1-\frac{2}{p}$) функцию от ζ. Частные производные Ph (в обобщенном смысле) удовлетворяют уравнению

$$(Ph)_{\bar z} = h, \qquad (Ph)_z = Th,$$

где T — *интегральный оператор типа Кальдерона–Зигмунда*

$$Th(\zeta) := -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P.V.}\int h(z)\frac{1}{(z-\zeta)^2}\,dx\,dy,$$

в котором интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.

$$Th(\zeta) := -\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|z-\zeta|>\epsilon} h(z)\frac{1}{(z-\zeta)^2}\,dx\,dy.$$

Оператор Th корректно определен на функциях $h\in L^p$ при $p>1$ и ограничен, т.е.

$$\|Th\|_p \le C_p\|h\|_p,$$

где $C_p\to 1$ при $p\to 2$. Поэтому мы можем выбрать $p>2$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|\mu\|_\infty C_p < 1$.

Вернемся к уравнению Бельтрами (1.1). Допустим, что мы нашли решение w этого уравнения, удовлетворяющее условиям $w(0)=0$ и $w_z - 1 \in L^p$. Рассмотрим функцию

$$W := w - P(w_{\bar z}).$$

Ее частная производная по $\bar z$ равна нулю, поэтому W является целой функцией. С другой стороны, из условия $w_z - 1 \in L^p$ вытекает, что производная W, равная $W' = w_z - T(w_{\bar z})$, удовлетворяет условию $W' - 1 \in L^p$, поскольку $w_{\bar z} = \mu w_z$ принадлежит L^p. Это возможно только в том случае, если $W' \equiv 1$, т.е. $W(z) \equiv z + \mathrm{const}$. Константа ввиду нормировки равна нулю, откуда $W(z) \equiv z$ и, следовательно,

$$w = P(w_{\bar z}) + z.$$

Дифференцируя это соотношение по z, получим

$$w_z = T(w_{\bar z}) + 1 = T(\mu w_z) + 1,$$

т.е. интегральное уравнение на w_z, в котором оператор $T(\mu w_z)$ является сжимающим, поскольку

$$\|T(\mu w_z)\| \le \|\mu\|_\infty C_p < 1.$$

Теперь ясно, что единственное решение интегрального уравнения

$$h = T(\mu h) + T\mu$$

будет давать нам решение уравнения Бельтрами (1.1) по формуле

$$w = P(\mu(h+1)) + z.$$

Пользуясь теоремой Альфорса–Берса, нетрудно построить решение уравнения Бельтрами (1.1) в верхней полуплоскости $H = H_+$. Для этого достаточно продолжить потенциал μ на нижнюю полуплоскость $H^* = H_-$ по симметрии, полагая

$$\widehat{\mu}(z) := \overline{\mu(\bar z)} \qquad \text{при} \quad z \in H_-. \tag{1.3}$$

Применяя теорему Альфорса–Берса к уравнению Бельтрами с потенциалом $\widehat{\mu}$, получим единственное решение w_μ этого уравнения, оставляющее точки 0, 1, ∞ неподвижными. Из свойства единственности решения вытекает, что построенное решение w_μ удовлетворяет соотношению

$$w_\mu(\bar z) = \overline{w_\mu(z)}.$$

Поэтому w_μ отображает вещественную ось в себя и, следовательно, сохраняет верхнюю полуплоскость H_+.

Другой естественный способ решения уравнения Бельтрами в верхней полуплоскости состоит в том, чтобы продолжить заданный потенциал μ на всю плоскость $\mathbb{C}$, полагая

$$\check{\mu}(z) = 0 \qquad \text{при} \quad z \in H_-.$$

Снова применяя теорему Альфорса–Берса к уравнению Бельтрами с потенциалом $\check{\mu}$, получим решение w^μ, которое конформно в нижней полуплоскости H_- и оставляет точки 0, 1, ∞ неподвижными.

Первый из указанных способов построения решения w_μ уравнения Бельтрами в H_+ мы будем называть *вещественно аналитическим*, поскольку в этом случае решение w_μ вещественно аналитически зависит от μ. Соответственно второй способ называется *комплексно аналитическим*, поскольку w^μ зависит от μ комплексно аналитически.

Оба указанных способа построения решений естественным образом переносятся и на уравнение Бельтрами в единичном круге Δ. Для этого в первом способе достаточно заменить симметрию (1.3) отражением относительно единичной окружности $S^1 := \partial\Delta$, при котором потенциал μ, заданный в единичном круге $\Delta = \Delta_+$, продолжается на его внешность Δ_- по формуле

$$\widehat{\mu}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) := \overline{\mu(z)}\frac{z^2}{\bar{z}^2} \qquad \text{при} \quad z \in \Delta.$$

В результате получим квазиконформный гомеоморфизм $w_\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, сохраняющий Δ_+ и Δ_- и оставляющий точки ± 1, $-i$ неподвижными. Второй способ дает квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, который является конформным на Δ_- и также оставляет точки ± 1, $-i$ неподвижными.

Обозначим множество дифференциалов Бельтрами в единичном круге Δ через $B(\Delta)$. Как указано выше, $B(\Delta)$ отождествляется с единичным кругом в комплексном банаховом пространстве $L^\infty(\Delta)$.

2. Универсальное пространство Тейхмюллера. Рассмотрим теперь поведение квазиконформных гомеоморфизмов на границе. Пусть $w\colon \Delta \to \Delta$ — K-квазиконформный гомеоморфизм единичного круга на себя, нормированный условием $w(0) = 0$. Тогда имеет место точная *оценка Мори* (см. [1])

$$|w(z_1) - w(z_2)| < 16|z_1 - z_2|^{1/K}$$

при всех $z_1 \neq z_2 \in \Delta$. Иначе говоря, гомеоморфизм w удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/K$ и, в частности, продолжается до гомеоморфизма замкнутого единичного круга $\overline{\Delta}$.

Назовем гомеоморфизм $f\colon S^1 \to S^1$, сохраняющий ориентацию, *квазисимметричным*, если он допускает продолжение до квазиконформного гомеоморфизма единичного круга Δ. Можно дать просто формулируемое достаточное условие квазисимметричности гомеоморфизма f в терминах двойного отношения. Напомним, что *двойным отношением* четырех различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексной плоскости называется величина

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Равенство двойных отношений $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ является необходимым и достаточным условием существования конформного отображения комплексной плоскости, переводящего четверку z_1, z_2, z_3, z_4 в четверку $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$. Если же сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f\colon S^1 \to S^1$ при некотором $0 < \epsilon < 1$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon) \le (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \le \frac{1}{2}(1+\epsilon)$$

для любой четверки точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S^1$ с двойным отношением $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2}$, то он является квазисимметричным, т.е. допускает продолжение до квазиконформного гомеоморфизма $\overline{\Delta}$. (Это аналог условия Берлинга–Альфорса квазисимметричности гомеоморфизмов прямой $\mathbb{R}$.)

Обозначим множество всех квазисимметричных гомеоморфизмов S^1, сохраняющих ориентацию, через $\mathrm{QS}(S^1)$. Это множество является группой относительно операции композиции гомеоморфизмов.

Любой квазисимметричный гомеоморфизм S^1 по определению допускает продолжение до квазиконформного гомеоморфизма $\overline{\Delta}$. В работе Дуади и Ирла [3] был предложен явный оператор продолжения E, сопоставляющий квазисимметричному гомеоморфизму f его продолжение до квазиконформного гомеоморфизма $\overline{\Delta}$, причем указанный оператор обладает к тому же свойством конформной инвариантности, а именно $E(w \circ f) = w \circ E(f)$ для любого дробно-линейного автоморфизма круга Δ. Заметим также, что любой диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ продолжается до диффеоморфизма и, как следствие, до квазиконформного гомеоморфизма $\widetilde{f}$ замкнутого единичного круга $\overline{\Delta}$ (напомним, что якобиан диффеоморфизма $\widetilde{f}$ равен $|\widetilde{f}_z|^2 - |\widetilde{f}_{\bar z}|^2$). Тем самым $\mathrm{Diff}_+(S^1) \subset \mathrm{QS}(S^1)$. Поскольку группа Мёбиуса $\mathrm{Möb}(S^1)$ дробно-линейных автоморфизмов круга содержится в $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, мы получаем следующую цепочку вложений:

$$\mathrm{Möb}(S^1) \subset \mathrm{Diff}_+(S^1) \subset \mathrm{QS}(S^1) \subset \mathrm{Homeo}(S^1).$$

Пространство

$$\mathcal{T} = T(1) := \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{Möb}(S^1)$$

называется *универсальным пространством Тейхмюллера* по причинам, которые выяснятся ниже. Его можно отождествить с пространством квазисимметричных гомеоморфизмов S^1, оставляющих точки ± 1 и $-i$ неподвижными, или, короче, *нормализованных* квазисимметричных гомеоморфизмов S^1.

В соответствии с конструкцией п. 1 мы можем описать введенное пространство $\mathcal{T}$ в терминах дифференциалов Бельтрами, сопоставляя дифференциалу $\mu \in B(\Delta)$ квазисимметричный гомеоморфизм S^1, задаваемый ограничением $w_\mu|_{S^1}$ квазиконформного отображения w_μ на единичную окружность. При этом $\mathcal{T}$ будет отождествляться с фактором пространства дифференциалов Бельтрами $B(\Delta)$ по отношению эквивалентности: $\mu \sim \nu$ тогда и только тогда, когда $w_\mu = w_\nu$ на S^1 или, эквивалентно, когда $w^\mu = w^\nu$ на дополнении к Δ_+. Таким образом,

$$\mathcal{T} = B(\Delta)/\sim.$$

Это равенство наделяет $\mathcal{T}$ структурой комплексного банахова многообразия, индуцированной из $B(\Delta)$ посредством проекции

$$\Phi\colon B(\Delta) \to \mathcal{T},$$

которая оказывается тем самым голоморфной субмерсией.

Пользуясь соответствием $\mu \mapsto w^\mu$, мы можем дать еще одну естественную интерпретацию пространства $\mathcal{T}$. А именно назовем *квазикругом* образ единичного круга Δ относительно квазиконформного отображения круга в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда, сопоставляя потенциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ квазикруг $\Delta^\mu := w^\mu(\Delta)$, мы отождествим универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ с пространством квазикругов

$$\mathcal{T} = \{\text{Квазикруги в } \overline{\mathbb{C}}\}/\mathrm{Möb}(S^1).$$

Сопоставляя дифференциалу Бельтрами μ ограничение $w^\mu|_{\Delta_-}$ на внешность Δ_- замкнутого единичного круга $\overline{\Delta}$, мы также можем рассматривать элементы $\mathcal{T}$ как однозначные голоморфные функции в Δ_-, продолжающиеся до квазиконформных гомеоморфизмов расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, оставляющих неподвижными точки ± 1 и $-i$. Часто пользуются альтернативной нормализацией этого пространства, отождествляя его с пространством однозначных голоморфных функций f в Δ_-, продолжающихся до квазиконформных гомеоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$ и допускающих в точке ∞ лорановское разложение вида

$$f(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

При этом комплексные числа $b_1, b_2, \dots$ играют роль комплексных координат на $\mathcal{T}$. Согласно классической теореме о площадях они удовлетворяют неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \le 1.$$

Связь между двумя интерпретациями пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ — как пространства нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов S^1 и как пространства нормализованных квазикругов в $\overline{\mathbb{C}}$ — устанавливается следующим образом.

Если f — заданный квазисимметричный гомеоморфизм S^1, то его можно продолжить до квазиконформного гомеоморфизма замкнутого круга $\overline{\Delta}$, которому отвечает дифференциал Бельтрами μ. Сопоставим ему квазикруг

$$\Delta^\mu = w^\mu(\Delta),$$

который не зависит от выбора квазиконформного продолжения f на $\overline{\Delta}$.

Обратно, пусть задан квазикруг Δ^μ, отвечающий квазиконформному отображению с потенциалом Бельтрами μ. Поскольку оба отображения $w^\mu\colon \Delta \to \Delta^\mu$ и $w_\mu\colon \Delta \to \Delta$ квазиконформны и имеют μ своим потенциалом Бельтрами в Δ, то отображение $\rho := w^\mu \circ w_\mu^{-1}$ задает конформное отображение единичного круга Δ на квазикруг Δ^μ. Обозначим это отображение через ρ_+, а через $\rho_-\colon \Delta_- \to \Delta_-^\mu$ конформное отображение внешности Δ_- замкнутого круга $\overline{\Delta}$ (на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$) на внешность Δ_-^μ замкнутого квазикруга $\overline{\Delta^\mu}$. Сопоставим теперь квазикругу Δ^μ квазисимметричный гомеоморфизм S^1, задаваемый формулой

$$f := \rho_+^{-1} \circ \rho_-.$$

Построенные соответствия сохраняют нормализации и потому устанавливают связь между двумя указанными интерпретациями универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$.

3. Кэлерова структура универсального пространства Тейхмюллера. Займемся теперь геометрией пространства $\mathcal{T}$ и сначала опишем структуру его касательного пространства, воспользовавшись для этого отображением $\Phi\colon B(\Delta) \to \mathcal{T}$. В силу однородности $\mathcal{T}$ достаточно описать касательное пространство $T_0\mathcal{T}$ в начале, т.е. в точке $\mu = 0$. По определению образ $d_0\Phi(\mu)$ касательного вектора $\mu \in L^\infty(\Delta) = T_0 B(\Delta)$ под действием касательного отображения $d_0\Phi$ есть векторное поле $v = v(\theta)\partial/\partial\theta$ на S^1 вида

$$v(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} = \dot{w}[\mu](z)\frac{\partial}{\partial z}, \qquad z = e^{i\theta}. \tag{3.1}$$

Здесь $\dot{w}[\mu]$ — производная однопараметрического потока $w_{t\mu}$ квазисимметричных гомеоморфизмов:

$$w_{t\mu}(z) = z + t\dot{w}[\mu](z) + o(t) \qquad \text{при} \quad t \to 0.$$

Ядро дифференциала $d_0\Phi\colon L^\infty(\Delta) \to T_0\mathcal{T}$, являющегося комплексно линейной сюръекцией, совпадает с пространством (см. [1])

$$N = \left\{ \mu \in L^\infty(\Delta)\colon \int\limits_\Delta \mu h = 0 \ \text{ для всех } \ h \in A_1(\Delta) \right\},$$

где $A_1(\Delta)$ — пространство L^1-интегрируемых голоморфных функций в круге Δ. Иначе говоря, касательное пространство $T_0\mathcal{T}$ отождествляется с фактором $L^\infty(\Delta)/N$. Это утверждение носит название *леммы Тейхмюллера*.

Для того чтобы явно описать комплексные координаты на пространстве $\mathcal{T}$, сопоставим дифференциалу Бельтрами μ функцию $S(w^\mu)$, задаваемую производной Шварца от w^μ. Эта функция голоморфна во внешности Δ_- единичного круга и полностью определяется дифференциалом Бельтрами μ (т.е. не зависит от выбора решения w^μ уравнения Бельтрами (1.1)), поскольку производная Шварца инвариантна относительно дробно-линейных преобразований. По отношению к конформным заменам координат она ведет себя как дифференциал типа $(2,0)$, т.е. является квадратичным дифференциалом. Тем самым мы построили отображение $\mu \mapsto S(w^\mu)$ из пространства дифференциалов Бельтрами $B(\Delta)$ в пространство $B_2(\Delta_-)$ голоморфных квадратичных дифференциалов на Δ_-. Взяв его композицию с отображением $z \mapsto 1/z$, получим сквозное отображение

$$\Psi\colon\ \mu \mapsto \psi[\mu],$$

сопоставляющее дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ голоморфный квадратичный дифференциал $\psi[\mu] \in B_2(\Delta)$, который имеет конечную *норму Нехари* (см. [1])

$$\|\psi\| := \big\|\psi(z)(1-|z|^2)^2\big\|_\infty < \infty.$$

Дифференциал Ψ в точке $\mu = 0$ вычисляется по формуле

$$d_0\Psi(\mu)(z) = \int\limits_\Delta \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1-z\bar\zeta)^4}\, d\xi\, d\eta \tag{3.2}$$

и задает инъективное отображение пространства $L^\infty(\Delta)/N$ в пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ. Тем самым построенное отображение $\mu \mapsto \psi[\mu]$ индуцирует иммерсию (*вложение Берса*)

$$\Psi\colon\ \mathcal{T} \to B_2(\Delta)$$

универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в пространство $B_2(\Delta)$ голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ с конечной нормой Нехари. Отображение Ψ голоморфно, и, как показано в [1], его образ в пространстве $B_2(\Delta)$ открыт и содержит шар радиуса $1/2$. Известно также (см. [4]), что этот образ связен и стягиваем.

Отображение $\Psi\colon \mu \mapsto \psi[\mu]$ позволяет ввести на $\mathcal{T}$ кэлерову метрику g, называемую *метрикой Петерсона–Вейля*, полагая для $\mu, \nu \in B(\Delta)$

$$g(\mu,\nu) := \langle \mu, \psi[\nu] \rangle, \tag{3.3}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает естественное спаривание между пространством дифференциалов Бельтрами $B(\Delta)$ (имеющих конформный тип $(-1,1)$) и пространством интегрируемых голоморфных квадратичных функционалов $A_2(\Delta)$ (имеющих конформный тип $(2,0)$), задаваемое формулой

$$\langle \mu, \psi \rangle := \int_{\Delta} \mu\psi.$$

Заметим, однако, что правая часть формулы (3.3), которую можно переписать в виде

$$g(\mu,\nu) = \int_{\Delta}\int_{\Delta} \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\bar{\zeta})^4}\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy, \tag{3.4}$$

может давать расходящийся интеграл. Иначе говоря, образ отображения Ψ, который лежит в пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов $B_2(\Delta)$, может не принадлежать пространству *интегрируемых* голоморфных квадратичных функционалов $A_2(\Delta)$. Для того чтобы интеграл в правой части формулы (3.4) сходился, достаточно потребовать, например, чтобы дифференциалам Бельтрами μ, ν отвечали в силу отображения (3.1) C^2-гладкие векторные поля на окружности S^1 (на самом деле достаточно требовать $C^{3/2+\epsilon}$-гладкости этих векторных полей, см. [10]). Тем самым метрика (3.3) корректно определена только на плотном подмножестве в $B(\Delta)$.

4. Пространства Тейхмюллера $T(G)$. Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ содержит в качестве комплексных подмногообразий все классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где G — фуксова группа, т.е. дискретная подгруппа $\text{Möb}(S^1)$. Это свойство пространства $\mathcal{T}$ оправдывает использование термина “универсальное” в его названии.

По определению $T(G)$ состоит из квазисимметричных гомеоморфизмов $f \in \text{QS}(S^1)^G$, обладающих свойством G-инвариантности: $f \circ g \circ f^{-1}$ *принадлежит* $\text{Möb}(S^1)$ *для всех* $g \in \text{Möb}(S^1)$, по модулю дробно-линейных автоморфизмов круга Δ. Иначе говоря,

$$T(G) = \text{QS}(S^1)^G/\text{Möb}(S^1).$$

Само универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ отвечает фуксовой группе $G = \{1\}$.

Так же как универсальное пространство $\mathcal{T}$, пространства Тейхмюллера $T(G)$ допускают описание в терминах G-инвариантных дифференциалов Бельтрами. Точнее, обозначим через $B^G(\Delta)$ подпространство $B(\Delta)$, состоящее из дифференциалов Бельтрами μ, удовлетворяющих соотношению

$$\mu(gz)\frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} = \mu(z) \qquad \text{почти всюду на } \Delta \text{ для всех } g \in G.$$

Так же как в п. 2, имеем $T(G) = B^G(\Delta)/\sim$.

Для G-инвариантного дифференциала Бельтрами μ квазиконформное отображение w_μ сопоставляет фуксовой группе G сопряженную к ней группу

$$G_\mu := w_\mu G w_\mu^{-1}.$$

Это порождает квазиконформное отображение римановой поверхности $X := \Delta/G$ на другую риманову поверхность $X_\mu := \Delta/G_\mu$, которое является биголоморфным в точности тогда, когда $\mu \in \text{Möb}(S^1)$. Тем самым можно сказать, что пространство $T(G)$ параметризует с помощью отображения $\mu \mapsto G_\mu$ различные комплексные структуры на римановой поверхности $X := \Delta/G$, получаемые из исходной квазиконформными деформациями.

С другой стороны, отображение $\mu \mapsto w^\mu$ сопоставляет Δ квазикруг $\Delta^\mu = w^\mu(\Delta)$, на котором вполне разрывно действует группа

$$G^\mu := w^\mu G (w^\mu)^{-1}.$$

В этих терминах риманова поверхность X_μ задается как Δ^μ/G^μ (заметим, что риманова поверхность Δ_-^μ/G^μ биголоморфна римановой поверхности Δ_-/G ввиду конформности w^μ на Δ_-).

Касательное пространство к $T(G)$ в начале совпадает с $L^\infty(\Delta)^G/N^G$ в очевидных обозначениях, согласующихся с п. 3. Так же как в п. 3, имеется отображение $\Psi\colon L^\infty(\Delta)^G/N^G \to \to B_2^G(\Delta)$, сопоставляющее дифференциалу μ квадратичный дифференциал $\psi[\mu]$. Его дифференциал в точке $\mu = 0$ задается той же интегральной формулой (3.2), что и в п. 3.

На пространстве $T(G)$ можно, так же как в п. 3, ввести *кэлерову метрику Петерсона–Вейля*, полагая

$$g_G(\mu,\nu) = \langle \mu, \psi[\nu]\rangle_G = \int\limits_{\Delta/G}\int\limits_{\Delta} \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\bar\zeta)^4}\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy. \tag{4.1}$$

Как отмечалось в п. 3, образ отображения $\Psi\colon L^\infty(\Delta)^G/N^G \to B_2^G(\Delta)$, задаваемого соответствием $\mu \mapsto \psi[\mu]$, может не принадлежать $A_2^G(\Delta)$, из-за чего формула (4.1) для метрики $g_G(\mu,\nu)$ может терять смысл для общих фуксовых групп G. В случае конечномерных пространств Тейхмюллера $T(G)$ указанная трудность отсутствует, поскольку в этом случае $B_2^G(\Delta) = A_2^G(\Delta)$ (см. [10]).

В интересной работе [13] было показано, как получить метрику $g_G(\mu,\nu)$ на $T(G)$ редукцией из метрики $g(\mu,\nu)$ на $\mathcal{T}$, регуляризуя интеграл

$$g(\mu,\nu) = \int\limits_{\Delta}\int\limits_{\Delta} \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\bar\zeta)^4}\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy = \int\limits_{\Delta} \mu\cdot\psi[\nu]. \tag{4.2}$$

Для этого перепишем интеграл (4.2) в виде

$$g(\mu,\nu) = \lim_{r\to 1-0} g_r(\mu,\nu),$$

где

$$g_r(\mu,\nu) = \int\limits_{\Delta_r} \mu\cdot\psi[\nu], \tag{4.3}$$

а $\Delta_r := \{z\in\Delta\colon |z|<r\}$, $0<r<1$.

В случае, когда μ, ν принадлежат $L^\infty(\Delta)^G/N^G$, т.е. G-инвариантны, интеграл (4.2) совпадает с

$$n\int\limits_{\Delta/G} \mu\cdot\psi[\nu] = n g_G(\mu,\nu),$$

где n — число копий фундаментальной области Δ/G, укладывающихся в Δ, и потому обязан расходиться, если группа G имеет бесконечно много элементов. Интеграл (4.3) по тем же соображениям пропорционален $n_r g_G(\mu,\nu)$, где n_r — число копий фундаментальной области Δ/G, укладывающихся в Δ_r. Тем самым можно регуляризовать интеграл (4.3), поделив его на величину, пропорциональную n_r. Точнее, имеет место следующее утверждение [13].

Для любого конечномерного пространства Тейхмюллера $T(G)$ его метрика Петерсона–Вейля $g_G(\mu,\nu)$ может быть найдена по формуле

$$\frac{g_G(\mu,\nu)}{g_G(\mu_0,\mu_0)} = \lim_{r\to 1-0}\frac{g_r(\mu,\nu)}{g_r(\mu_0,\mu_0)},$$

где $\mu,\nu \in L^\infty(\Delta)^G$, *а* $\mu_0 \in L^\infty(\Delta)^G/N^G$ *задает произвольный ненулевой касательный вектор из* $T_0(G)$.

5. Грассманова реализация универсального пространства Тейхмюллера. Обозначим через

$$H := H_0^{1/2}(S^1,\mathbb{R})$$

соболевское гильбертово пространство, которое состоит из функций $\xi \in L^2(S^1,\mathbb{R})$ с нулевым средним по окружности, имеющих обобщенную производную порядка 1/2 из $L^2(S^1,\mathbb{R})$. Иначе говоря, элементами пространства H являются функции $\xi \in L^2(S^1,\mathbb{R})$, разлагающиеся в ряды Фурье вида

$$\xi(\theta) := \xi(e^{i\theta}) = \sum_{k\neq 0} \xi_k e^{ik\theta}, \qquad \xi_k = \overline{\xi}_{-k},$$

с конечной соболевской нормой

$$\|\xi\|_H^2 = \sum_{k\neq 0} |k|\cdot|\xi_k|^2 = 2\sum_{k>0} k|\xi_k|^2 < \infty.$$

На пространстве H имеется естественная симплектическая структура, которая задается 2-формой $\omega\colon H\times H \to \mathbb{R}$ вида

$$\omega(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(\theta)\,d\eta(\theta).$$

В терминах разложений Фурье функций $\xi,\eta \in H$,

$$\xi(\theta) := \xi(e^{i\theta}) = \sum_{k\neq 0} \xi_k e^{ik\theta}, \qquad \eta(\theta) := \eta(e^{i\theta}) = \sum_{k\neq 0} \eta_k e^{ik\theta},$$

эта форма записывается следующим образом:

$$\omega(\xi,\eta) = -i\sum_{k\neq 0} k\xi_k\eta_{-k} = 2\,\mathrm{Im}\sum_{k>0} k\xi_k\overline{\eta}_k.$$

В работе [12] показано, что симплектическая форма ω является единственной с точностью до постоянного множителя Möb(S^1)-инвариантной симплектической формой на H.

Преобразование Гильберта задает на H комплексную структуру J^0 по формуле

$$(J^0\xi)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\psi}{2}\cdot[\xi(\theta)-\xi(\psi)]\,d\psi, \qquad 0\le\theta\le 2\pi.$$

В терминах разложения Фурье $\xi = \sum_{k\neq 0}\xi_k e^{ik\theta}$ получаем

$$(J^0\xi)(\theta) = -i\sum_{k>0}\xi_k e^{ik\theta} + i\sum_{k<0}\xi_k e^{ik\theta}.$$

Построенная комплексная структура J^0 совместима с симплектической формой ω в том смысле, что выражение

$$g(\xi,\eta) := \omega(\xi, J^0\eta)$$

определяет кэлерову метрику на H, которая в терминах разложений Фурье задается формулой

$$g(\xi,\eta)=2\operatorname{Re}\sum_{k>0}k\xi_k\overline{\eta}_k=\sum_{k\neq 0}|k|\xi_k\overline{\eta}_k.$$

Тем самым гильбертово пространство $H=H_0^{1/2}(S^1,\mathbb{R})$ наделяется структурой кэлерова пространства.

Комплексификация

$$H^{\mathbb{C}}=H_0^{1/2}(S^1,\mathbb{C})$$

пространства H является комплексным гильбертовым пространством с эрмитовым скалярным произведением, задаваемым продолжением кэлеровой метрики g:

$$\langle\xi,\eta\rangle=\sum_{k\neq 0}|k|\xi_k\overline{\eta}_k.$$

Форма ω и оператор комплексной структуры J^0 продолжаются на $H^{\mathbb{C}}$ комплексно линейно.

Пространство $H^{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму подпространств

$$H^{\mathbb{C}}=H_+\oplus H_-, \tag{5.1}$$

где $H_\pm$ отождествляется с собственным $(\mp i)$-подпространством оператора $J^0\in\operatorname{End}H^{\mathbb{C}}$. Иначе говоря,

$$H_+=\biggl\{\xi\in H^{\mathbb{C}}\colon\ \xi(\theta)=\sum_{k>0}\xi_k e^{ik\theta}\biggr\},\qquad H_-=\overline{H}_+=\biggl\{\xi\in H^{\mathbb{C}}\colon\ \xi(\theta)=\sum_{k<0}\xi_k e^{ik\theta}\biggr\}.$$

Подпространства $H_\pm$ изотропны относительно симплектической формы ω (т.е. $\omega(\xi,\eta)=0$, если $\xi,\eta\in H_+$ или $\xi,\eta\in H_-$), и разложение $H^{\mathbb{C}}=H_+\oplus H_-$ является ортогональной прямой суммой относительно эрмитова скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ имеет простое выражение в терминах разложения $H^{\mathbb{C}}=H_+\oplus H_-$:

$$\langle\xi,\eta\rangle=i\omega(\xi_+,\overline{\eta}_+)-i\omega(\xi_-,\overline{\eta}_-),$$

где $\xi_\pm$ обозначает проекцию $\xi\in H^{\mathbb{C}}$ на подпространство $H_\pm$. Функции

$$e_n:=ie^{in\theta}\in H_+\quad\text{при}\quad n>0\qquad\text{и}\qquad e_{-n}:=ie^{-in\theta}\in H_-\quad\text{при}\quad n>0$$

образуют естественный ортогональный базис в $H^{\mathbb{C}}$.

Гомеоморфизмы $f\colon S^1\to S^1$, сохраняющие ориентацию, действуют на пространстве H по формуле

$$T_f(\xi):=\xi\circ f-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(f(\theta))\,d\theta.$$

При этом указанное преобразование сохраняет H тогда и только тогда, когда гомеоморфизм f является квазисимметричным (см. [12]). Если данное условие выполнено, т.е. f продолжается до K-квазиконформного отображения единичного круга Δ, то операторная норма T_f оценивается через $\sqrt{K+K^{-1}}$.

Преобразования вида T_f с $f \in \mathrm{QS}(S^1)$ сохраняют симплектическую форму ω, т.е. являются симплектическими преобразованиями H. Для гомеоморфизмов f класса C^1 это вытекает из формулы замены переменных, а в общем случае доказывается с помощью аппроксимации квазисимметричных гомеоморфизмов C^1-гладкими.

Если преобразование T_f сохраняет подпространство $H_+ \subset H$, то такое f должно продолжаться до конформного отображения $\Delta \to \Delta$, иными словами до преобразования Мёбиуса, сохраняя при этом не только ω, но и комплексную структуру J^0. Тем самым эти преобразования задаются унитарными операторами на H.

Если же преобразование T_f не принадлежит подгруппе $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ преобразований Мёбиуса, то оно не сохраняет комплексную структуру J^0 на H, а переводит ее в другую комплексную структуру J_f, также совместимую с симплектической формой ω. Поясним это утверждение более подробно.

Любая комплексная структура J на H, совместимая с ω, определяет разложение

$$H^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W} \tag{5.2}$$

в прямую сумму изотропных относительно ω подпространств. Это разложение ортогонально относительно кэлеровой метрики на $H^{\mathbb{C}}$, отвечающей J. Подпространства W и $\overline{W}$ отождествляются соответственно с $(-i)$- и $(+i)$-собственными подпространствами оператора J на $H^{\mathbb{C}}$. Обратно, любое разложение (5.2) пространства $H^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму изотропных подпространств определяет комплексную структуру J на $H^{\mathbb{C}}$, равную $-i\cdot\mathrm{id}$ на W и $+i\cdot\mathrm{id}$ на $\overline{W}$, совместимую с ω.

На пространстве комплексных структур J, совместимых с ω, транзитивным образом действует группа $\mathrm{Sp}(H^{\mathbb{C}})$ линейных ограниченных преобразований $H^{\mathbb{C}}$, сохраняющих ω. В терминах разложения (5.1) (относительно исходной комплексной структуры J^0) элементы вещественной группы $\mathrm{Sp}(H)$ имеют блочное представление, которое мы сейчас опишем.

Любой вещественный эндоморфизм $A\colon H \to H$ записывается в терминах (5.1) в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где

$$a\colon H_+ \to H_+, \qquad b\colon H_- \to H_+, \qquad \bar{a}\colon H_- \to H_-, \qquad \bar{b}\colon H_+ \to H_-.$$

Условие принадлежности A к симплектической группе $\mathrm{Sp}(H)$ записывается в виде соотношения $A^t J^0 A = J^0$. Так как комплексная структура J^0 имеет блочное представление

$$J^0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

то условие принадлежности A к группе $\mathrm{Sp}(H)$ принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(H) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}'a - b'\bar{b} = 1, \quad \bar{a}'b = b'\bar{a}.$$

Здесь через a', b' обозначены транспонированные операторы:

$$a'\colon H_+' \to H_+' \ \Leftrightarrow\ a'\colon H_- \to H_-, \qquad b'\colon H_+' \to H_-' \ \Leftrightarrow\ b'\colon H_- \to H_+,$$

при этом пространство H_+', двойственное к H_+, отождествляется с H_- с помощью скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Как было указано выше, действие $f \mapsto T_f$ определяет отображение группы $\mathrm{QS}(S^1)$ в группу $\mathrm{Sp}(H)$, при котором образ подгруппы Мёбиуса $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ содержится в подгруппе $\mathrm{U}(H_+)$ унитарных преобразований H_+. Последняя вкладывается в $\mathrm{Sp}(H)$ в виде подгруппы, состоящей из блочных матриц

$$\mathrm{U}(H_+) \ni A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Пространство $\mathrm{Sp}(H)/\mathrm{U}(H_+)$ комплексных структур на H, совместимых с симплектической формой ω, которое мы обозначаем далее через $\mathcal{J}(H)$, допускает естественную реализацию в виде диска Зигеля

$$\mathbb{D} = \bigl\{Z\colon H_- \to H_+ \text{ — симметричный ограниченный линейный оператор с } \overline{Z}Z < I\bigr\}.$$

Условие $\overline{Z}Z < I$ означает, что симметричный оператор $I - \overline{Z}Z$ положителен. Для того чтобы отождествить $\mathcal{J}(H)$ с $\mathbb{D}$, рассмотрим действие $\mathrm{Sp}(H)$ на $\mathbb{D}$, задаваемое дробно-линейными преобразованиями $A\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ вида

$$Z \mapsto (aZ + b)(\bar{b}Z + \bar{a})^{-1},$$

где $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(H)$ (нетрудно проверить, что оператор $\bar{b}Z + \bar{a}$ для $Z \in \mathbb{D}$, $A \in \mathrm{Sp}(H)$ обязательно обратим). Подгруппа изотропии точки $Z = 0$ состоит из преобразований $A \in \mathrm{Sp}(H)$ с $b = 0$, которая отождествляется с $\mathrm{U}(H_+)$. Построенное действие $\mathrm{Sp}(H)$ на $\mathbb{D}$, как нетрудно показать, является транзитивным, откуда следует, что $\mathcal{J}(H) = \mathbb{D}$.

Рассмотрим теперь грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_+(H^{\mathbb{C}})$ подпространств $W \subset H^{\mathbb{C}}$ типа H_+. Оно состоит из замкнутых подпространств $W \subset H^{\mathbb{C}}$ таких, что ортогональная проекция $\mathrm{pr}_+\colon W \to H_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\mathrm{pr}_-\colon W \to H_-$ ограничена. Это комплексное банахово многообразие, локальной моделью которого является пространство $B(H_+, H_-)$ ограниченных линейных операторов $w\colon H_+ \to H_-$.

Построенные в этом пункте соответствия

$$\left\{\begin{matrix}\text{Квазисимметричный}\\ \text{гомеоморфизм } f\end{matrix}\right\} \mapsto \left\{\begin{matrix}\text{Симплектический}\\ \text{оператор } T_f\end{matrix}\right\} \mapsto \left\{\begin{matrix}\text{Подпространство}\\ W_f := T_f(H_+)\end{matrix}\right\}$$

порождают отображения

$$\mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \to \mathrm{Sp}(H)/\mathrm{U}(H_+) = \mathbb{D} \to \mathrm{Gr}_+(H^{\mathbb{C}}),$$

которые согласно [12] являются голоморфными иммерсиями комплексных банаховых многообразий.

2. КОПРИСОЕДИНЕННЫЕ ОРБИТЫ ГРУППЫ ВИРАСОРО

6. Группа диффеоморфизмов окружности и группа Вирасоро. Группа диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Diff}(S^1)$ состоит из C^∞-гладких диффеоморфизмов окружности S^1. Пространство $\mathrm{Diff}(S^1)$ является открытым подмножеством в многообразии Фреше $C^\infty(S^1, S^1)$ гладких отображений окружности S^1 в себя и наделяется индуцированной структурой многообразия Фреше, относительно которой $\mathrm{Diff}(S^1)$ есть группа Ли–Фреше. Эта группа имеет две связные компоненты, и мы обозначаем через $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ связную компоненту единицы, состоящую из диффеоморфизмов S^1, сохраняющих ориентацию.

Алгебра Ли группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ совпадает с алгеброй $\mathrm{Vect}(S^1)$, состоящей из C^∞-гладких касательных векторных полей на S^1. Элементы $\mathrm{Vect}(S^1)$ имеют вид $v(\theta)\frac{d}{d\theta}$, где $v(\theta)$ — C^∞-гладкая 2π-периодическая функция от $\theta \in \mathbb{R}$. В терминах разложений Фурье коэффициенты $v(\theta)$

векторных полей $v = v(\theta)\frac{d}{d\theta}$ задаются рядами

$$v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta}, \qquad v_n \in \mathbb{C},$$

с условием $v_{-n} = \bar{v}_n$. Отбрасывая последнее условие, получим описание в терминах рядов Фурье комплексифицированной алгебры Ли $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$. Алгебра $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$, как векторное пространство, имеет естественный базис, задаваемый векторными полями

$$e_n = ie^{in\theta}\frac{d}{d\theta}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям вида

$$[e_n, e_m] = (n-m)e_{n+m}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Алгебра и группа Вирасоро являются центральными расширениями соответственно алгебры $\mathrm{Vect}(S^1)$ и группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Произвольное центральное расширение алгебры $\mathrm{Vect}(S^1)$ задается 2-коциклом w этой алгебры. Как известно (см. [15]), группа когомологий $H^2(\mathrm{Vect}(S^1), \mathbb{R})$ алгебры $\mathrm{Vect}(S^1)$ имеет размерность 1 и общее центральное расширение задается коциклом w, продолжение которого на $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ определяется базисными значениями

$$w(e_m, e_n) = \begin{cases} \alpha m(m^2-1) & \text{при } m+n=0,\ \alpha \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{при } m+n \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что сужение коцикла w на подалгебру $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ в $\mathrm{Vect}(S^1)$, порождаемую векторами e_0, e_1, e_{-1} (эта подалгебра является алгеброй Ли группы Мёбиуса $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$), равно нулю.

Коцикл Гельфанда–Фукса

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi'(\theta)\, d\eta'(\theta), \qquad \xi = \xi(\theta)\frac{d}{d\theta},\ \eta = \eta(\theta)\frac{d}{d\theta} \in \mathrm{Vect}(S^1),$$

имеет базисные значения вида $w_m = im^3$, $m \in \mathbb{Z}$. Центральное расширение алгебры $\mathrm{Vect}(S^1)$, задаваемое этим коциклом, называется *алгеброй Вирасоро* и обозначается vir.

Этому центральному расширению алгебры $\mathrm{Vect}(S^1)$ отвечает центральное расширение группы Ли $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, которое состоит из элементов вида

$$(f, \lambda), \qquad f \in \mathrm{Diff}_+(S^1), \quad \lambda \in S^1,$$

с произведением, задаваемым формулой

$$(f, \lambda)\cdot(g, \mu) = \bigl(f\circ g, \lambda\mu e^{ib(f,g)}\bigr),$$

где $c(f,g) = e^{ib(f,g)}$ — 2-коцикл на группе $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Условие коцикличности в терминах b принимает вид

$$b(f,g) + b(f\circ g, h) = b(f, g\circ h) + b(g,h). \tag{6.1}$$

Явное решение функционального уравнения (6.1), найденное Боттом, задается формулой

$$b_0(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln(f\circ g)'\,d\ln g'.$$

Этому групповому коциклу отвечает коцикл Гельфанда–Фукса алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$. Общее решение (6.1) получается из b_0 умножением на константу и добавлением кограницы:

$$b(f,g) = \alpha b_0(f,g) + a(f\circ g) - a(f) - a(g),$$

где $\alpha = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, а a — произвольный гладкий вещественный функционал на $\mathrm{Diff}_+(S^1)$.

Центральное расширение группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, задаваемое коциклом Ботта, называется *группой Вирасоро* и обозначается Vir.

7. Коприсоединенное действие группы Вирасоро. Изучим сначала коприсоединенное действие группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на пространстве $\mathrm{Vect}'(S^1)$, двойственном к алгебре Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Пространство $\mathrm{Vect}'(S^1)$, двойственное к пространству Фреше $\mathrm{Vect}(S^1)$, является пространством 1-форм на S^1, коэффициентами которых служат обобщенные функции (распределения) на S^1. Иными словами, его можно отождествить с тензорным произведением

$$\Omega^1(S^1)\otimes_{\mathcal{D}(S^1)}\mathcal{D}'(S^1),$$

в котором $\Omega^1(S^1)$ обозначает пространство Фреше C^∞-гладких 1-форм на S^1, а $\mathcal{D}'(S^1)$ — пространство обобщенных функций на S^1, т.е. пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{D}(S^1) = C^\infty(S^1)$. Оба сомножителя являются модулями над кольцом $\mathcal{D}(S^1) = C^\infty(S^1)$, а тензорное произведение над этим кольцом берется в категории топологических векторных пространств.

Мы ограничимся изучением коприсоединенного действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на “регулярной” части пространства $\mathrm{Vect}'(S^1)$, которая отождествляется с тензорным произведением пространств Фреше

$$\Omega^1(S^1)\otimes_{\mathcal{D}(S^1)}\Omega^1(S^1).$$

Иначе говоря, регулярная часть пространства $\mathrm{Vect}'(S^1)$ отождествляется с пространством $Q(S^1)$ квадратичных дифференциалов на S^1 вида $q = q(\theta)(d\theta)^2$, где q — C^∞-гладкая 2π-периодическая функция от θ.

Коприсоединенное действие группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на $Q(S^1)$ совпадает с естественным действием $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на квадратичных дифференциалах

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)\ni f\mapsto K(f)q = q\circ f^{-1} := q(g(\theta))g'(\theta)^2\,d\theta^2,$$

где $g(\theta) = f^{-1}(\theta)$.

Перейдем теперь к исследованию коприсоединенного действия группы Вирасоро Vir на пространстве vir', двойственном к алгебре Вирасоро vir. Алгебра Вирасоро $\mathrm{vir} = \mathrm{Vect}(S^1)\oplus\mathbb{R}$ есть центральное расширение алгебры $\mathrm{Vect}(S^1)$, так что $\mathrm{vir}' = \mathrm{Vect}'(S^1)\oplus\mathbb{R}$. Регулярная часть пространства vir' может быть отождествлена с пространством

$$Q(S^1)\oplus\mathbb{R} = \bigl\{(q,s)\colon\ q \text{ — квадратичный дифференциал},\ s\in\mathbb{R}\bigr\}.$$

Коприсоединенное действие $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на $Q(S^1)\oplus\mathbb{R}$ сопоставляет элементу $f\in\mathrm{Diff}_+(S^1)$ преобразование $\widetilde{K}(f)$ пространства $Q(S^1)\oplus\mathbb{R}$, действующее по формуле (см. [6])

$$\widetilde{K}(f)(q,s)=\big(K(f)q+sS(f)\circ f^{-1},s\big)=\big((q+sS(f))\circ f^{-1},s\big), \tag{7.1}$$

где S — 1-коцикл на группе $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, удовлетворяющий соотношению

$$S(f\circ h)=S(f)\circ h+S(h).$$

Нетривиальное решение этого функционального уравнения задается шварцианом

$$S(f)=\left[\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right]d\theta^2=d^2\ln f'-\frac{1}{2}(d\ln f')^2,$$

а общее решение имеет вид

$$S(f)+q\circ f-q,$$

где $q\in Q(S^1)$ — некоторый квадратичный дифференциал.

Характеристическим свойством шварциана является его конформная инвариантность

$$S\left(\frac{af+b}{cf+d}\right)=S(f)$$

для любого дробно-линейного преобразования $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ из группы $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$. Шварциан $S(f)$ диффеоморфизма $f\in\mathrm{Diff}_+(S^1)$ является мерой его отклонения от конформных автоморфизмов единичного круга в том смысле, что

$$S(f)=0\ \Leftrightarrow\ f\ \text{дробно-линейно}.$$

Инфинитезимальный вариант коприсоединенного представления (7.1) задается представлением алгебры $\mathrm{Vect}(S^1)$ на пространстве $Q(S^1)\oplus\mathbb{R}$, действующим по формуле

$$\widetilde{k}(\xi)(q,s)=(-D_{q,s}\xi,s), \tag{7.2}$$

где $\xi=\xi(\theta)\frac{d}{d\theta}\in\mathrm{Vect}(S^1)$, $q=q(\theta)(d\theta)^2\in Q(S^1)$, а оператор $D_{q,s}$ имеет вид

$$D_{q,s}=s\frac{d^3}{d\theta^3}+q\frac{d}{d\theta}+\frac{d}{d\theta}q.$$

Орбита регулярного элемента $(q,s)\in Q(S^1)\oplus\mathbb{R}$ под действием группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ целиком определяется подгруппой изотропии $G_{q,s}$ относительно присоединенного действия. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{q,s}$ этой подгруппы состоит из векторных полей $\xi=\xi(\theta)\frac{d}{d\theta}\in\mathrm{Vect}(S^1)$, удовлетворяющих условию $D_{q,s}\xi=0$. Иначе говоря, вычисление подалгебры $\mathfrak{g}_{q,s}$ сводится к нахождению периодических решений $\xi(\theta)$ линейного дифференциального уравнения

$$s\xi'''+2q\xi'+q'u=0. \tag{7.3}$$

Отсылая за общим решением этой задачи к работам [6, 5], рассмотрим здесь частный случай, отвечающий постоянным элементам вида $(q(d\theta)^2,s)$, где $q\equiv\mathrm{const}=:c$, а $s\neq0$. Тогда уравнение (7.3) сводится к уравнению

$$s\xi'''+2c\xi'=0, \tag{7.4}$$

которое после замены $\eta := \xi'$ принимает вид

$$s\eta'' + 2c\eta = 0.$$

Последнее уравнение имеет нетривиальные периодические решения только при $2c = n^2$, где n — натуральное число, и эти решения являются линейными комбинациями функций $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$. Иначе говоря, периодическими решениями уравнения (7.4) при $\frac{2c}{s} \neq n^2$ являются лишь константы, а при $\frac{2c}{s} = n^2$ линейные комбинации функций 1, $\frac{1}{n}\cos n\theta$ и $\frac{1}{n}\sin n\theta$. Подалгебра изотропии $\mathfrak{g}_{q,s}$ в первом случае совпадает с $\mathbb{R}$, а во втором — с алгеброй $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$. Соответственно подгруппа изотропии $G_{q,s}$ в первом случае совпадает с группой вращений $S^1 \subset \mathrm{Diff}_+(S^1)$, а во втором — с группой $\mathrm{PSL}^{(n)}(2,\mathbb{R})$, являющейся n-кратным накрытием группы Мёбиуса $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Более формально, группа $\mathrm{PSL}^{(n)}(2,\mathbb{R})$ характеризуется следующим свойством: диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ принадлежит группе $\mathrm{PSL}^{(n)}(2,\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда для него найдется преобразование $\varphi \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ такое, что

$$\lambda_n \circ f = \varphi \circ \lambda_n,$$

где $\lambda_n\colon z \mapsto z^n$ — отображение, задающее n-кратное накрытие окружности S^1.

Из приведенного описания подгрупп изотропии немедленно следует, что коприсоединенная орбита постоянного элемента $(q,s) = (c\,d\theta^2, s)$ совпадает с однородным пространством $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$, если $2c/s$ не является квадратом натурального числа, и с однородным пространством $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{PSL}^{(n)}(2,\mathbb{R})$, если $2c/s = n^2$.

Как было отмечено выше, коприсоединенные орбиты обладают естественной симплектической структурой, задаваемой формой Кириллова. В рассматриваемом случае значение этой формы в точке $(q,s) \in Q(S^1) \oplus \mathbb{R}$ орбиты O группы Vir может быть вычислено следующим образом. Пусть $\delta\xi$ и $\delta\eta$ — касательные векторы из $T_{q,s}O$, являющиеся образами касательных векторов $\xi, \eta \in \mathrm{Vect}(S^1)$ под действием отображения $\widetilde{k}$: $\delta\xi = \widetilde{k}(\xi)(q,s)$, $\delta\eta = \widetilde{k}(\eta)(q,s)$. Тогда значение формы Ω на этих векторах равно

$$\Omega(\delta\xi, \delta\eta) = -\int\limits_{S^1} (D_{q,s}\xi)(\theta)\eta(\theta)\,d\theta.$$

С другой стороны, из всех коприсоединенных орбит группы Vir кэлеровыми являются только орбиты (см. [18])

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1, \qquad \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1).$$

Иными словами, только эти орбиты обладают $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантными комплексными структурами, совместимыми с симплектической структурой Ω. Мы ограничиваемся в данной работе изучением указанных кэлеровых орбит.

В оставшейся части пункта дадим интерпретацию коприсоединенного действия группы Вирасоро в терминах операторов Хилла, восходящую к работе Лазуткина и Панкратовой [8]. Напомним, что *оператором Хилла* называется дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^2}{d\theta^2} + u(\theta),$$

где $u = u(\theta)$ — потенциал, задаваемый C^∞-гладкой 2π-периодической функцией на $\mathbb{R}$. Соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + uy = 0$$

называется уравнением Хилла. Его решения образуют двумерное векторное пространство V, на котором имеется естественная симплектическая 2-форма, задаваемая вронскианом двух решений. При сдвиге на период 2π решение y уравнения Хилла $Ly = 0$ преобразуется под действием оператора $M \in \mathrm{SL}(V)$, называемого матрицей монодромии оператора L.

Если $\{y_1, y_2\}$ — фундаментальная система решений, т.е. базис в пространстве V решений уравнения Хилла, то по нему можно восстановить потенциал u, пользуясь формулой Шварца:

$$u(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} S(y_1/y_2)(\theta), & \text{если } y_2(\theta) \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} S(y_2/y_1)(\theta), & \text{если } y_1(\theta) \neq 0, \end{cases}$$

где $S(y)$ — шварциан функции y.

Группа диффеоморфизмов естественным образом действует на пространстве операторов Хилла, а именно с каждым диффеоморфизмом $f \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$, который поднимается до диффеоморфизма $\widetilde{f}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, можно связать преобразование, сопоставляющее оператору Хилла $L = \frac{d^2}{d\theta^2} + u(\theta)$ оператор $f^*L = \frac{d^2}{d\theta^2} + f^*u(\theta)$, где

$$f^*u(\theta) := u(\widetilde{f}(\theta)) \cdot (\widetilde{f}'(\theta))^2 + \frac{1}{2} S(\widetilde{f})(\theta).$$

Указанное преобразование переводит решение y уравнения Хилла $Ly = 0$ в решение z уравнения Хилла $f^*Lz = 0$, где

$$z(\theta) := y(\widetilde{f}(\theta)) \cdot (\widetilde{f}'(\theta))^{-1/2}.$$

Заметим, что в силу периодичности потенциала u действие f на потенциалах не зависит от выбора поднятия $\widetilde{f}$ диффеоморфизма $f \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ и потому действительно определяет действие группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на операторах Хилла. Это действие совпадает с определенным выше (см. (7.1)) коприсоединенным действием группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на элементах $\left(u, \frac{1}{2}\right)$ пространства $Q(S^1) \oplus \mathbb{R}$.

В то же время действие f на решениях уравнения Хилла зависит от выбора поднятия $\widetilde{f}$ из-за наличия монодромии. В соответствии с приведенной выше формулой решения уравнения Хилла преобразуются под действием диффеоморфизмов $\widetilde{f}$ как плотности порядка $-1/2$ на прямой $\mathbb{R}$.

Построенное действие группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на операторах Хилла изучалось в работе [8]. В ней, в частности, выдвинута гипотеза, что любой оператор Хилла с помощью указанного действия может быть приведен к нормальной форме Матье, имеющей вид

$$L = \frac{d^2}{d\theta^2} + a\cos(2\pi n\theta) + b.$$

8. Пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$**.** Как было отмечено в п. 2, имеются естественные вложения групп

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathrm{Diff}_+(S^1) \subset \mathrm{QS}(S^1),$$

откуда следует, что пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ каноническим образом вложено в универсальное пространство $\mathcal{T}$:

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{T}.$$

Пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ можно рассматривать как регулярную часть универсального пространства $\mathcal{T}$.

В п. 7 было указано, что пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ имеет естественную симплектическую структуру ω, задаваемую формой Кириллова. Введем на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ комплексную структуру J, инвариантную относительно действия $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ правыми сдвигами на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$. (Использование правого действия $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ необходимо для того, чтобы обеспечить голоморфность вложения $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T}$, см. ниже.) Ввиду инвариантности достаточно определить указанную комплексную структуру в начале $0 \in \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$. Касательное пространство $T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1))$ можно отождествить с фактор-пространством алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ векторных полей на S^1 по ее подалгебре $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$. В терминах разложений Фурье (см. п. 6) векторные поля $v = v(\theta)\frac{d}{d\theta} \in T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1))$ задаются рядами вида

$$v(\theta) = \sum_{n\neq -1,0,1} v_n e^{in\theta}, \qquad v_n \in \mathbb{C},$$

с условием $v_{-n} = \bar{v}_n$. В этих терминах ограничение $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантной комплексной структуры J на $T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1))$ будет задаваться формулой

$$Jv(\theta) = -i\sum_{n>1} v_n e^{in\theta} + i\sum_{n<-1} v_n e^{in\theta}$$

для $v = v(\theta)\frac{d}{d\theta} \in T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1))$. Легко видеть, что построенная почти комплексная структура на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ является формально интегрируемой (т.е. скобка двух касательных векторных полей типа $(1,0)$ относительно этой комплексной структуры является снова векторным полем типа $(1,0)$). Более того, эта комплексная структура совместима с введенной ранее симплектической структурой на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$.

Наделим теперь универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ комплексной структурой I, которая на касательном пространстве в начале $T_0\mathcal{T}$ индуцируется умножением на i в пространстве дифференциалов Бельтрами. Более подробно, отождествляя касательное пространство $T_0\mathcal{T}$ с пространством $L^\infty(\Delta)/N$, представим касательный вектор $v \in T_0\mathcal{T}$ в виде (см. (3.1))

$$v = \dot{w}[\mu]\frac{\partial}{\partial z}, \qquad z := e^{i\theta},$$

где $\dot{w}[\mu]$ — производная однопараметрического потока $w_{t\mu}$. Тогда

$$Iv = \dot{w}[i\mu]\frac{\partial}{\partial z}.$$

Естественное вложение $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T}$ является голоморфным относительно введенных комплексных структур J на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ и I на $\mathcal{T}$ (см. [13]).

Симплектическая форма ω на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ вместе с комплексной структурой J определяют кэлерову метрику g на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, кэлерова форма которой совпадает с ω. В терминах разложений Фурье эта метрика задается следующим образом: если касательные векторы $u, v \in T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1))$ задаются рядами Фурье

$$u = \sum_{n\neq -1,0,1} u_n e_n \qquad \text{и} \qquad v = \sum_{n\neq -1,0,1} v_n e_n, \tag{8.1}$$

то значение метрики g на этих векторах равно

$$g(u,v) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=2}^{\infty} u_n \bar{v}_n (n^3 - n)\right). \tag{8.2}$$

Заметим, что бесконечный ряд в правой части (8.2) сходится абсолютно, если ряды Фурье (8.1) отвечают векторным полям u, v класса $C^{3/2+\epsilon}$ на S^1, что безусловно выполнено в рассматриваемом случае.

Как отмечено в работе [13], кэлерова метрика g на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ совпадает (с точностью до числового множителя) с метрикой, индуцированной метрикой Петерсона–Вейля на $\mathcal{T}$ при вложении $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T}$. Иными словами, если $u, v \in T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1))$ — касательные векторы вида

$$u = \dot{w}[\mu]\frac{\partial}{\partial z}, \qquad v = \dot{w}[\nu]\frac{\partial}{\partial z},$$

то

$$g(\mu,\nu) = \lambda \int\limits_{\Delta}\int\limits_{\Delta} \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4}\, d\xi\, d\eta\, dx\, dy$$

при подходящем выборе константы λ. Вводя эту константу в определение кэлеровой метрики на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, мы добьемся того, что вложение $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T}$ станет изометрией. Заметим, что умножение кэлеровой метрики g на λ эквивалентно переходу от симплектической формы ω к форме $\lambda\omega$, т.е. выбору подходящей реализации $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ в виде коприсоединенной орбиты группы Вирасоро.

В работе [13] отмечено еще одно интересное свойство вложения $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T}$, а именно образ $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ в $\mathcal{T}$ трансверсально пересекает классические пространства Тейхмюллера $T(G)$ с *бесконечными* фуксовыми группами G. Поясним этот эффект более подробно. Заметим прежде всего, что касательные векторы $v \in T_0T(G)$, задаваемые потенциалами $\mu \in L^\infty(\Delta)^G/N^G$, не могут отвечать векторным полям v на окружности S^1 гладкости выше $C^{3/2}$. Действительно, иначе интеграл в формуле (4.2) для метрики $g(\mu,\mu)$ должен был бы сходиться, а это противоречит рассуждению в конце п. 4, показывающему, что этот интеграл расходится, если группа G имеет бесконечно много элементов. С другой стороны, касательные векторы $v \in T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1))$ отвечают C^∞-гладким векторным полям на S^1, откуда и следует высказанное выше утверждение о трансверсальности. Можно показать также (см. [2]), что квазидиски, отвечающие всем точкам $T(G)$, исключая начало, имеют фрактальную границу (т.е. их границы имеют хаусдорфову размерность >1) в отличие от квазидисков, отвечающих точкам $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, которые имеют C^∞-гладкие границы.

9. Пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$. Пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ является однородным пространством (правых смежных классов) группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, которая действует на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ правыми сдвигами. Многообразие $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ можно отождествить (как однородное пространство) с подгруппой $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, состоящей из диффеоморфизмов $f \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$, фиксирующих точку $1 \in S^1$: $f(1) = 1$, что наделяет $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ структурой многообразия Фреше.

Вложение группы вращений окружности S^1 в группу Мёбиуса $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ порождает однородное расслоение

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1 \to \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$$

со слоем Δ.

Поскольку пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ является коприсоединенной орбитой группы Вирасоро, оно обладает симплектической структурой, задаваемой формой Кириллова (как мы увидим ниже, не единственной). Эта форма, будучи инвариантной относительно правых сдвигов группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, определяется своим ограничением на касательное пространство в начале $T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1)$. Указанное касательное пространство отождествляется с пространством $\mathrm{Vect}_0(S^1)$, состоящим из векторных полей $v = v(\theta)\frac{d}{d\theta}$, коэффициенты которых $v(\theta)$ являются

2π-периодическими функциями с нулевым средним

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)d\theta = 0.$$

В терминах разложений Фурье касательные векторы $v \in T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1)$ задаются рядами вида $v = \sum_{n\neq 0} v_n e_n$ с условием $v_{-n} = \bar{v}_n$.

Инвариантная симплектическая структура на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ задается 2-коциклом w на алгебре Ли $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$, инвариантным относительно вращений. Указанный коцикл определяется своими значениями $w(e_m, e_n)$ на базисных элементах $\{e_m\}$, которые обязательно имеют вид (см. п. 6, а также [15, 17])

$$w(e_m, e_n) = (\alpha m^3 + \beta m)\delta_{m,-n}$$

для некоторых вещественных α, β. Обозначая форму, отвечающую параметрам α, β, через $w_{\alpha,\beta}$, нетрудно проверить, что она является невырожденной на $\mathrm{Vect}_0(S^1)$ тогда и только тогда, когда $\alpha m^3 + \beta m \neq 0$ для всех натуральных m. Последнее условие выполняется, если либо $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, либо $-\beta/\alpha$ не является квадратом натурального числа. В первом случае форма $w_{\alpha,\beta}$ точна, поэтому мы выбираем вторую возможность.

Форма $w_{\alpha,\beta}$ задает симплектическую структуру на $\mathrm{Vect}_0(S^1)$, которую в более инвариантном виде можно записать как

$$w_{\alpha,\beta}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\big(\beta v'(\theta) - \alpha v'''(\theta)\big)\,d\theta,$$

где $u, v \in \mathrm{Vect}_0(S^1)$. В терминах разложений Фурье $u = \sum_{n\neq 0} u_n e^{in\theta}$, $v = \sum_{n\neq 0} v_n e^{in\theta}$ получаем

$$w_{\alpha,\beta}(u,v) = \mathrm{Im}\sum_{n\geq 1}(\alpha n^3 + \beta n)\xi_n\overline{\eta}_n.$$

Построенное семейство симплектических структур имеет естественную интерпретацию в терминах коприсоединенного действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Напомним, что орбита элемента $(c\,d\theta^2, s)$ совпадает с $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$, если $2c/s$ не является квадратом натурального числа. Отождествляя однородное пространство $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ с орбитой элемента $(c\,d\theta^2, s)$ и наделяя его канонической симплектической структурой, задаваемой формой Кириллова, получим при различном выборе (c,s) с $2c/s \neq n^2$ построенное выше двухпараметрическое семейство симплектических структур на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$.

Введем $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантную комплексную структуру J на пространстве $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$. Ее ограничение на $T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1) = \mathrm{Vect}_0(S^1)$ задается преобразованием Гильберта, которое сопоставляет касательному вектору $v \in \mathrm{Vect}_0(S^1)$ вектор

$$(Jv)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\,\frac{\theta-\psi}{2}\cdot[v(\theta) - v(\psi)]\,d\psi, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

В терминах разложения Фурье $v = \sum_{n\neq 0} v_n e_n \in \mathrm{Vect}_0(S^1)$ получаем

$$Jv = -i\sum_{n>0} v_n e_n + i\sum_{n<0} v_n e_n.$$

Комплексная структура J формально интегрируема, т.е. скобка двух касательных векторных полей типа $(1,0)$ относительно этой комплексной структуры является снова векторным полем типа $(1,0)$. Более того, можно показать, что эта комплексная структура является единственной интегрируемой $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантной комплексной структурой на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$.

Кроме того, комплексная структура J совместима со всеми симплектическими структурами $w_{\alpha,\beta}$ и потому порождает семейство кэлеровых метрик $g_{\alpha,\beta}(u,v) := w_{\alpha,\beta}(u,Jv)$ на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$, задаваемых в начале формулой

$$g_{\alpha,\beta}(u,v) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{n\geq 1}(\alpha n^3 + \beta n)u_n\bar{v}_n,$$

где $u = \sum_{n\neq 0} u_n e_n$, $v = \sum_{n\neq 0} v_n e_n \in T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1)$. Тем самым многообразие $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ является кэлеровым многообразием Фреше с двухпараметрическим семейством кэлеровых метрик $g_{\alpha,\beta}$.

Из определения комплексных структур на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ и $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ немедленно следует, что однородное круговое расслоение

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1 \to \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$$

является голоморфным. Это позволяет ввести на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ локальные комплексные координаты. Существует, однако, и более прямой путь, предложенный в работе Кириллова и Юрьева [7], который реализует $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ в виде пространства голоморфных однолистных функций в круге Δ.

Обозначим через $\mathcal{A}$ пространство Фреше всех C^∞-гладких комплекснозначных функций на замыкании $\overline{\Delta}$ единичного круга Δ, которые голоморфны внутри Δ и обращаются в нуль в начале координат. Пусть $\mathcal{A}_0$ есть подмножество $\mathcal{A}$, состоящее из всех $f\in\mathcal{A}$, которые задают C^∞-гладкое вложение замкнутого круга $\overline{\Delta}$ в $\mathbb{C}$. Это открытое подмножество в $\mathcal{A}$, наследующее структуру многообразия Фреше. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество функций $f\in\mathcal{A}_0$ таких, что $f'(0)=1$, являющееся гладкой гиперповерхностью в $\mathcal{A}_0$. Функции $f\in\mathfrak{S}$ голоморфны и однолистны в Δ, определяют C^∞-гладкое вложение $\overline{\Delta}\to\overline{f(\Delta)}$ и удовлетворяют условиям нормировки $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Они задаются степенными рядами вида

$$f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots,$$

коэффициенты которых согласно теореме де Бранжа удовлетворяют соотношениям $|c_k| < k$.

Построим теперь отображение из $\mathfrak{S}$ в $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$. Для этого сопоставим функции $f\in\mathfrak{S}$ контур $K := f(S^1)$. Функция $f := f_K$ конформно отображает единичный круг $\Delta := \Delta_+$ на область D_K, ограниченную контуром K. Обозначим через

$$g_K\colon\ \Delta_-\to\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_K$$

конформное отображение дополнения $\Delta_- := \overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\Delta}_+$ замкнутого единичного круга $\overline{\Delta}_+$ на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$ на область $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}_K$, нормированное условиями

$$g_K(\infty)=\infty, \qquad g_K'(\infty)>0.$$

Отображение g_K продолжается до диффеоморфизма $\partial\Delta_- = S^1$ на ∂D_K. Сопоставим $f\in\mathfrak{S}$ диффеоморфизм

$$\gamma_K := f_K^{-1}\circ g_K|_{S^1}.$$

Для того чтобы построить обратное отображение из $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ в $\mathfrak{S}$, заметим, что с помощью произвольного диффеоморфизма $\gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ можно построить новую комплексную структуру на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Действительно, обозначим через $\overline{\mathbb{C}}_\gamma$ гладкое многообразие, полученное склейкой посредством γ. Иными словами, $\overline{\mathbb{C}}_\gamma$ получается из несвязного объединения $\overline{\Delta}_+ \cup \overline{\Delta}_-$ отождествлением точек из $S^1 = \partial\Delta_+ = \partial\Delta_-$ по правилу

$$z \in S^1 = \partial\Delta_+ \leftrightarrow \gamma^{-1}(z) \in S^1 = \partial\Delta_-.$$

Многообразие $\overline{\mathbb{C}}_\gamma$ диффеоморфно римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$, а поскольку согласно результату Альфорса на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$ существует единственная комплексная структура, то два указанных многообразия биголоморфны друг другу. Иными словами, существует биголоморфное отображение

$$F\colon \overline{\mathbb{C}}_\gamma \to \overline{\mathbb{C}},$$

которое определяется единственным образом, если нормировать его условиями

$$F(0) = 0, \qquad F(\infty) = \infty, \qquad F'(0) = 1.$$

Биголоморфизм F задается парой функций (f, g), где функция f является голоморфной в Δ_+ и C^∞-гладкой вплоть до $S^1 = \partial\Delta_+$, а функция g является голоморфной в Δ_- и C^∞-гладкой вплоть до $S^1 = \partial\Delta_-$, причем

$$f = g \circ \gamma^{-1} \qquad \text{на } S^1.$$

Полагая $K := f(S^1)$, получим, что $\gamma = \gamma_K \bmod S^1$ (так как нормировка F не фиксирует $\arg g(\infty)$). Как указано в работе [9], при построении обратного отображения можно обойтись и без теоремы Альфорса, заменив ее теоремой факторизации Пфлюгера [14], согласно которой произвольный диффеоморфизм $\gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ может быть представлен в виде

$$\gamma = f^{-1} \circ g,$$

где f и g обладают теми же свойствами, что и выше.

Построенное взаимно однозначное отображение из $\mathfrak{S}$ в $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$ является гладким и определяет диффеоморфизм

$$\kappa\colon\ \mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1 \to \mathfrak{S}.$$

Нетрудно описать касательное к нему отображение

$$d_0\kappa\colon\ T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1) \to T_1\mathfrak{S}.$$

Касательное пространство $T_1\mathfrak{S}$ отождествляется с пространством Φ, состоящим из голоморфных в Δ функций φ, которые являются C^∞-гладкими вплоть до $\partial\Delta$ и нормированы условиями $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$. (Действительно, любой такой вектор φ является касательным к кривой $f_t(z) = 1 + t\varphi(z)$, которая при $0 \le t \le \epsilon$ содержится в $\mathfrak{S}$.) Отображение $d_0\kappa$ сопоставляет вектору $v \in T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1)$ функцию $\varphi \in T_1\mathfrak{S}$ по формуле

$$2\,\mathrm{Re}\,\varphi(e^{i\theta}) = (Jv)(\theta),$$

где J — преобразование Гильберта на $T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1)$. Преобразованию Гильберта J на $T_0(\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1)$ отвечает умножение на i в пространстве $T_1\mathfrak{S}$, поэтому обратное к $d_0\kappa$ отображение задается формулой $v(\theta) = -2\,\mathrm{Im}\,\varphi(e^{i\theta})$.

Заметим в заключение, что на самой группе Вирасоро Vir также имеется естественная комплексная структура, индуцированная комплексной структурой на $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$, относительно которой естественная проекция

$$\pi\colon \mathrm{Vir} \to \mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$$

является голоморфным $\mathbb{C}^*$-расслоением (см. [9]).

10. Грассманова реализация пространств $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ **и** $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$**.** Построенная в предыдущем пункте голоморфная иммерсия

$$\mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \to \mathrm{Sp}(H)/\mathrm{U}(H_+) = \mathbb{D} \to \mathrm{Gr}_+(H^{\mathbb{C}})$$

порождает в композиции с вложением $\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T}$ (см. п. 8) голоморфную иммерсию

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \to \mathrm{Sp}(H)/\mathrm{U}(H_+) = \mathbb{D} \to \mathrm{Gr}_+(H^{\mathbb{C}}).$$

Однако этот результат можно существенно усилить, если перейти от грассманова многообразия $\mathrm{Gr}_+(H^{\mathbb{C}})$ к его "регулярному" аналогу — гильбертову грассманиану $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$. Напомним его определение.

Обозначим через $\mathrm{GL}(H^{\mathbb{C}})$ группу линейных ограниченных операторов на $H^{\mathbb{C}}$, имеющих ограниченный обратный. Линейные операторы $A \in \mathrm{GL}(H^{\mathbb{C}})$ в терминах поляризации (5.1) записываются в блочной форме

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где $a\colon H_+ \to H_+$, $b\colon H_- \to H_+$, $c\colon H_- \to H_-$, $d\colon H_+ \to H_-$.

Рассмотрим теперь подгруппу $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ группы $\mathrm{GL}(H^{\mathbb{C}})$, которая состоит из преобразований $A \in \mathrm{GL}(H^{\mathbb{C}})$, для которых "внедиагональные" члены b и c являются операторами Гильберта–Шмидта (коротко, HS-операторами). Иными словами, группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ состоит из преобразований $A \in \mathrm{GL}(H^{\mathbb{C}})$, в которых "внедиагональные" члены b и c операторов A из $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ "малы" по сравнению с "диагональными" членами a и d. Через $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ обозначим пересечение $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ с группой $\mathrm{U}(H^{\mathbb{C}})$ унитарных операторов в $H^{\mathbb{C}}$.

С группой $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$, так же как в конечномерном случае, связано некоторое грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$, называемое *гильбертовым грассманианом*. А именно, обозначим через $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ множество замкнутых подпространств $W \subset H$ таких, что ортогональная проекция $\mathrm{pr}_+\colon W \to H_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\mathrm{pr}_-\colon W \to H_-$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Эквивалентно подпространство $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$, если оно является образом линейного оператора $w\colon H_+ \to H$ такого, что оператор $w_+ := \mathrm{pr}_+ \circ w$ фредгольмов, а $w_- := \mathrm{pr}_- \circ w$ — оператор Гильберта–Шмидта.

Введенная выше группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ естественным образом действует на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$. Это действие транзитивно, так же как и действие унитарной подгруппы $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$. Подгруппа изотропии $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ в точке $H_+ \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ совпадает с $\mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-)$, тем самым грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ является однородным пространством группы $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ вида

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}}) = \mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})/\mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-).$$

Пользуясь этим представлением, можно доказать (см. [15, 17]), что гильбертов грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ является комплексным гильбертовым многообразием, локальная модель которого совпадает с гильбертовым пространством операторов Гильберта–Шмидта $\mathrm{HS}(H_+, H_-)$.

Так как $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ транзитивно действует на грассманиане $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$, то можно построить $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$-инвариантную кэлерову метрику на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ по скалярному произведению на касательном пространстве $T_{H_+}\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ в начале $H_+ \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$, инвариантному относительно действия подгруппы изотропии $\mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-)$. Касательное пространство $T_{H_+}\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ совпадает с пространством операторов Гильберта–Шмидта $\mathrm{HS}(H_+, H_-)$, а инвариантное скалярное произведение на нем задается формулой

$$(A, B) \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AB^*)), \qquad A, B \in \mathrm{HS}(H_+, H_-).$$

Заметим, что мнимая часть комплексного скалярного произведения $\mathrm{tr}(AB^*)$ определяет на $T_{H_+}\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ невырожденную инвариантную 2-форму, которая продолжается до $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$-инвариантной симплектической структуры на многообразии $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$. Тем самым на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ задана кэлерова структура, превращающая его в кэлерово гильбертово многообразие.

По аналогии с группой $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ можно определить и симплектическую группу $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H)$. Напомним, что симплектическая группа $\mathrm{Sp}(H)$ состоит из ограниченных линейных операторов $A\colon H \to H$, имеющих блочное представление вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{a}'a - b'\bar{b} = 1, \qquad \bar{a}'b = b'\bar{a}.$$

По определению группа $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H) \subset \mathrm{Sp}(H)$ состоит из преобразований $A \in \mathrm{Sp}(H)$, для которых оператор b есть оператор Гильберта–Шмидта. Унитарная группа $\mathrm{U}(H_+)$ содержится в $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H)$ в виде подгруппы

$$\mathrm{U}(H_+) \ni a \mapsto A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Группа диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ действует на пространстве H симплектическими преобразованиями по формуле

$$T_f(\xi) := \xi \circ f - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \xi(f(\theta))\,d\theta.$$

При этом преобразование T_f сохраняет подпространство $H_+ \subset H$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$, и в последнем случае $T_f \in \mathrm{U}(H_+)$.

Можно показать (см. [15, 17]), что для любого $f \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ образ T_f принадлежит определенной выше подгруппе $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H)$. Тем самым мы получаем отображение

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \to \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H)/\mathrm{U}(H_+),$$

которое, как показано в работе [11], является голоморфной иммерсией.

Введем по аналогии с п. 5 пространство $\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H)/\mathrm{U}(H_+)$ допустимых комплексных структур на H, совместимых с симплектической формой ω. Как и в п. 5, оно допускает естественную реализацию в виде диска Зигеля

$$\mathbb{D}_{\mathrm{res}} = \bigl\{Z\colon H_- \to H_+ \text{ — симметричный оператор Гильберта–Шмидта с } \overline{Z}Z < I\bigr\}.$$

Тем самым мы получаем голоморфную иммерсию

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \to \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H)/\mathrm{U}(H_+) = \mathbb{D}_{\mathrm{res}},$$

которая в композиции с голоморфным отображением

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1 \to \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Möb}(S^1)$$

дает грассманову реализацию пространства $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1 \to \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H)/\mathrm{U}(H_+) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(H)/\mathrm{U}(H_+) = \mathbb{D}_{\mathrm{res}}.$$

Имеется и другая грассманова реализация пространства $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$, использующая отображение группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в унитарную группу $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$. Это отображение сопоставляет диффеоморфизму $f \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ оператор $V_f \in \mathrm{GL}(H^{\mathbb{C}})$, действующий по формуле

$$V_f\xi(\theta) := \xi(f(\theta))f'(\theta)^{1/2}.$$

Образ указанного отображения принадлежит $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ (см. [15, 11]).

Подчеркнем, что построенное отображение $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ не является гладким и даже непрерывным. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для любого диффеоморфизма $f \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$, за исключением тождественного, найдется точка $z_0 \in S^1$, которую f сдвигает в точку z, отличную от z_0. Поэтому можно найти функцию $\xi_f \in H$ с носителем в достаточно малой окрестности точки z_0 и единичной нормы в H, для которой скалярное произведение $\langle V_f\xi_f, \xi_f\rangle = 0$. Отсюда следует, в частности, что для любой последовательности диффеоморфизмов $f_n \to \mathrm{id}$, $f_n \neq \mathrm{id}$, соответствующие им операторы V_{f_n} не сходятся к тождественному оператору.

Хотя вложение $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в $\mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ не является непрерывным, индуцированное им отображение

$$\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1 \to \mathrm{U}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})/\mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-) = \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$$

уже является гладким. Причина в том, что образ диффеоморфизма f при этом отображении по существу совпадает с оператором, задаваемым коммутатором $[V_f, J]$ оператора V_f с преобразованием Гильберта J, который имеет гладкое ядро, гладко зависящее от f (см. [15, п. 6.8]). Построенное отображение $\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1 \to \mathrm{Gr}_{\mathrm{res}}(H^{\mathbb{C}})$ согласно [9] антиголоморфно, однако его можно сделать голоморфным, например поменяв местами поляризующие пространства H_+ и H_-.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ahlfors L.V.* Lectures on quasiconformal mappings. Princeton: Van Nostrand, 1966. Рус. пер.: *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
2. *Bowen R.* Hausdorff dimension of quasicircles // Publ. Math. IHES. 1979. V. 50. P. 259–273.
3. *Douady A., Earle C.J.* Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle // Acta math. 1986. V. 157. P. 23–48.
4. *Earle C.J., Eells J.* On the differential geometry of Teichmüller spaces // J. Anal. Math. 1967. V. 19. P. 35–52.
5. *Guieu L.* Nombre de rotation, structures géométriques sur un cercle et groupe de Bott–Virasoro // Ann. Inst. Fourier. 1996. V. 46. P. 971–1009.
6. *Kirillov A.A.* Infinite dimensional Lie groups: their orbits, invariants and representations. The geometry of moments // Twistor geometry and nonlinear systems, Primorsko (Bulg.), 1980. Berlin: Springer, 1982. P. 101–123. (Lect. Notes Math.; V. 970).
7. *Кириллов А.А., Юрьев Д.В.* Кэлерова геометрия бесконечномерного однородного пространства $M = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Rot}(S^1)$ // Функц. анал. и его прил. 1987. Т. 21, №4. С. 35–46.
8. *Лазуткин В.Ф., Панкратова Т.Ф.* Нормальные формы и версальные деформации для уравнения Хилла // Функц. анал. и его прил. 1975. Т. 9, №4. С. 41–48.
9. *Lempert L.* The Virasoro group as a complex manifold // Math. Res. Lett. 1995. V. 2. P. 479–495.
10. *Nag S.* The complex analytic theory of Teichmüller spaces. New York: J. Wiley and Sons, 1988.

11. *Nag S.* A period mapping in universal Teichmüller space // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 26. P. 280–287.
12. *Nag S., Sullivan D.* Teichmüller theory and the universal period mapping via quantum calculus and the $H^{1/2}$ space on the circle // Osaka J. Math. 1995. V. 32. P. 1–34.
13. *Nag S., Verjovsky A.* Diff(S^1) and the Teichmüller spaces // Commun. Math. Phys. 1990. V. 130. P. 123–138.
14. *Pfluger A.* Über die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verhäftung // J. Indian Math. Soc. 1961. V. 24. P. 401–412.
15. *Pressley A., Segal G.* Loop groups. Oxford: Clarendon Press, 1986. Рус. пер.: *Прессли Э., Сигал Г.* Группы петель. М.: Мир, 1990.
16. *Segal G.* Unitary representations of some infinite-dimensional groups // Commun. Math. Phys. 1981. V. 80. P. 301–392.
17. *Сергеев А.Г.* Кэлерова геометрия пространств петель. М.: МЦНМО, 2001.
18. *Witten E.* Coadjoint orbits of the Virasoro group // Commun. Math. Phys. 1988. V. 114. P. 1–53.