С. И. Калмыков, Д. Б. Карп, О логарифмической вогнутости рядов с отношениями гамма-функций, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, номер 6, 70–77

Известия вузов. Математика
2014, № 6, с. 70–77
http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное С.К. Водопьяновым

С.И. КАЛМЫКОВ, Д.Б. КАРП

О ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ВОГНУТОСТИ РЯДОВ С ОТНОШЕНИЯМИ ГАММА-ФУНКЦИЙ

Аннотация. В работе показана неотрицательность коэффициентов Тейлора и найдены двусторонние оценки для определителей Турана, составленных из степенных рядов, в коэффициенты которых входят отношения гамма-функций. Такие ряды рассматриваются как функции от одновременного сдвига аргументов гамма-функций в числителе и знаменателе. В качестве следствий найдены новые неравенства для гипергеометрической функции Гаусса, неполной бета-функции и обобщенных гипергеометрических рядов. Данная статья является продолжением исследований ряда авторов, изучавших логарифмическую выпуклость и вогнутость гипергеометрических функций по параметрам.

Ключевые слова: гамма-функция, бета-функция, неравенство Турана, логарифмическая вогнутость, обобщенные гипергеометрические функции.

УДК: 517.588

В статье рассмотрен класс степенных рядов вида

$$g_{a,c}(\mu;x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\Gamma(a+\mu+n)}{\Gamma(c+\mu+n)} x^n, \tag{1}$$

где $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ — некоторая неотрицательная числовая последовательность, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Основным вопросом будет поиск условий на последовательность $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ и числа a, c, при выполнении которых разность произведений

$$\psi_{a,c}(\mu,\nu;x) = g_{a,c}(\mu;x)g_{a,c}(\nu;x) - g_{a,c}(0;x)g_{a,c}(\mu+\nu;x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m x^m \tag{2}$$

имеет неотрицательные коэффициенты ψ_m при всех степенях x. Очевидным следствием такой неотрицательности является логарифмическая вогнутость функции $\mu \to g_{a,c}(\mu;x)$. Все ряды здесь понимаются как формальные, вопросы сходимости не рассматриваются.

Поступила 09.12.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке the European Research Council Advanced Grant № 267055 (the first author had a postdoctoral position at the Bolyai Institute, University of Szeged, Aradi v. tere 1, Szeged 6720, Hungary), а также Министерством науки и образования Российской Федерации (проект № 1398 в рамках государственного задания).

Важнейшими примерами рядов вида (1) являются гипергеометрические ряды и их производные по параметрам. Результаты данной статьи также будут проиллюстрированы вытекающими из них новыми неравенствами для гипергеометрических функций. Аналогичные вопросы для степенных рядов, отличных от (1), изучались в [1]–[4]. Для доказательства логарифмической выпуклости гипергеометрических функций по параметрам при отрицательных значениях аргумента можно воспользоваться интегральными представлениями из [5]. Оценки отношений гамма-функций используются в [6] при доказательстве неравенств для функций Бесселя, а также в [7] при выводе оценок норм для операторов преобразования в пространствах Лебега на полуоси со степенными весами.

Для формулировки результатов понадобятся следующие стандартные определения.

Определение 1. Неотрицательная последовательность $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется логарифмически вогнутой, если ее элементы удовлетворяют условию $f_k^2 \geq f_{k-1}f_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Говорят, что у нее нет внутренних нулей, если $f_N = 0$ влечет за собой $f_k = 0$ либо для всех $0 \leq k \leq N$, либо для всех $k \geq N$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется абсолютно монотонной на интервале (a, b) (возможно неограниченном), если $f^{(k)}(x) \geq 0$ для всех $k = 0, 1, \dots$ и $x \in (a, b)$. Она называется вполне монотонной, если для этих же значений k и x выполнены неравенства

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Определение 3. Функция $f(x)$ называется мультипликативно выпуклой на интервале $(0, \infty)$, если она удовлетворяет условию

$$f(x^{\lambda}y^{1-\lambda}) \leq f^{\lambda}(x)f^{1-\lambda}(y)$$

при $\lambda \in [0, 1]$ и $x, y > 0$.

В работе [4] доказана

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из следующих условий*:

а) $c + 1 \geq a \geq c > 0$ *и* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *произвольная неотрицательная последовательность,*

б) $a > c + 1 > 1$ *и* $\{g_n n!\}_{n=0}^{\infty}$ — *неотрицательная лог-вогнутая последовательность без внутренних нулей.*

Тогда $\psi_{a,c}(\mu, \nu; x) \geq 0$ *при всех* $x, \mu \geq 0$ *и* $\nu \in \mathbb{N}$. *Если к тому же* $\mu \geq \nu - 1$, *то коэффициенты Тейлора функции* $\psi_{a,c}(\mu, \nu; x)$ *неотрицательны,* $\psi_m \geq 0$ *для всех* $m = 0, 1, \dots,$ *и поэтому функция* $x \to \psi_{a,c}(\mu, \nu; x)$ *абсолютно монотонна и мультипликативно выпукла на* $(0, \infty)$.

Цель данной статьи — усилить часть б) теоремы 1, заменив $g_n n!$ на g_n, и применить указанное усиление для вывода новых неравенств для гипергеометрических функций. Основным результатом является

Теорема 2. *Предположим* $a > c + 1 > 1$ *и* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *неотрицательная лог-вогнутая последовательность без внутренних нулей. Тогда* $\psi_{a,c}(\mu, \nu; x) \geq 0$ *при всех* $x, \mu \geq 0$ *и* $\nu \in \mathbb{N}$. *Если к тому же* $\mu \geq \nu - 1$, *то коэффициенты Тейлора функции* $\psi_{a,c}(\mu, \nu; x)$ *неотрицательны,* $\psi_m \geq 0$ *для всех* $m = 0, 1, \dots$. *Поэтому функция* $x \to \psi_{a,c}(\mu, \nu; x)$ *абсолютно монотонна и мультипликативно выпукла на* $(0, \infty)$.

Схема доказательства. Согласно леммам 2 и 3 работы [4] достаточно доказать теорему для $\nu = 1$. При этом значении ν непосредственным вычислением после несложных преобразований получим

$$\psi_m = \frac{(a-c)\Gamma(a)\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(c+1)\Gamma(c+\mu+1)} \sum_{k=0}^{[m/2]} g_k g_{m-k} M_k,$$

где

$$M_k = \frac{(a)_k(a+\mu)_{m-k}}{(c+1)_k(c+1+\mu)_{m-k}}(m-2k+\mu) - \frac{(a)_{m-k}(a+\mu)_k}{(c+1)_{m-k}(c+1+\mu)_k}(m-2k-\mu)$$

при $k < m/2$ и

$$M_k = \frac{\mu(a)_k(a+\mu)_{m-k}}{(c+1)_k(c+1+\mu)_{m-k}}$$

при $k = m/2$. Здесь $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ — сдвинутый факториал или символ Похгаммера. Согласно лемме 6 работы [4] для доказательства неотрицательности коэффициентов ψ_m достаточно показать, что

$$\sum_{0 \le k \le m/2} M_k \ge 0 \tag{3}$$

и последовательность $M_0, M_1, \ldots, M_{[m/2]}$ меняет знак не более одного раза, т. е. имеет структуру $(- - \cdots - -00 \cdots 00 + + \cdots + +)$, где нули и знаки минус могут отсутствовать.

Неотрицательность суммы утверждает

Лемма. *Неравенство*

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(a)_k(a+\mu)_{m-k}}{(b)_k(b+\mu)_{m-k}}(m-2k+\mu) \ge 0 \tag{4}$$

верно для всех целых $m \ge 1$ и всех $\mu \ge 0$, если $b \ge a \ge 0$ или $a \ge b \ge 1$.

Схема доказательства леммы . Введем обозначение $u_k = (a)_k(a+\mu)_{m-k}/[(b)_k(b+\mu)_{m-k}]$. Если $a = b$ или $a = 0$, то утверждение очевидно. При $b > a > 0$ функция $x \to (a+x)/(b+x)$ возрастает, откуда следует $u_k > u_{m-k}$ для всех $k < m-k$. Остается заметить, что в этом случае

$$u_k(m-2k+\mu) + u_{m-k}(2k-m+\mu) = (m-2k)(u_k - u_{m-k}) + \mu(u_k + u_{m-k}) > 0$$

для всех $k \le m-k$. Если $a > b \ge 1$, то при помощи алгоритма Госпера ([8], [9], гл. 5) можно найти антиразности для чисел $u_k(m-2k+\mu)$. Результат легко проверить непосредственным вычислением

$$u_k(m-2k+\mu) = \alpha_{k+1} - \alpha_k, \text{ где } \alpha_k = \frac{(b-1)(b-1+\mu)(a)_k(a+\mu)_{m+1-k}}{(a-b+1)(b-1)_k(b-1+\mu)_{m+1-k}}, \ k = 0, 1, \ldots, m+1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m} u_k(m-2k+\mu) = \sum_{k=0}^{m}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \alpha_{m+1} - \alpha_0 =$$

$$= \frac{(b-1)(b-1+\mu)}{(a-b+1)} \left\{ \frac{(a)_{m+1}}{(b-1)_{m+1}} - \frac{(a+\mu)_{m+1}}{(b-1+\mu)_{m+1}} \right\} \ge 0.$$

Последнее неравенство верно, так как $x \to (a+x)/(b-1+x)$ убывает при $x > 0$ в силу условия $a > b \ge 1$. □

Остается заметить, что левые части неравенств (3) и (4) совпадают, а доказательство одной смены знака у последовательности $M_0, M_1, \ldots, M_{[m/2]}$ дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 1 ([4], теорема 4). Мультипликативная выпуклость следует из неотрицательности коэффициентов согласно теореме Харди, Литтлвуда и Пойа ([10], предложение 2.3.3).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 a) или теоремы 2, причем $\nu \in \mathbb{N}$ и $\mu \geq \nu - 1$. Тогда функция $y \to \psi_{a,c}(\mu,\nu;1/y)$ вполне монотонна и логарифмически выпукла на $(0,\infty)$, поэтому существует неотрицательная мера τ с носителем в $[0,\infty)$ такая, что

$$\psi_{a,c}(\mu,\nu;x) = \int_{[0,\infty)} e^{-t/x} d\tau(t).$$

Схема доказательства. Согласно ([11], теорема 3) сумма сходящегося ряда вполне монотонных функций — вполне монотонная функция. Отсюда вытекает $y \to \psi_{a,c}(\mu,\nu;1/y)$ вполне монотонна, поскольку $1/y$ вполне монотонна и коэффициенты неотрицательны по теореме 2. Интегральное представление следует тогда по классической теореме Бернштейна ([12], теорема 1.4), а логарифмическая выпуклость получается, например, согласно ([10], упражнение 2.1(6)).

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 a) или теоремы 2. Тогда для всех $\nu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq \nu - 1$ и $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$g_{a,c}(\mu;x)g_{a,c}(\nu;x) - g_{a,c}(0;x)g_{a,c}(\mu+\nu;x) \geq g_0^2 \left\{ \frac{\Gamma(a+\nu)\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(c+\nu)\Gamma(c+\mu)} - \frac{\Gamma(a)\Gamma(a+\mu+\nu)}{\Gamma(c)\Gamma(c+\mu+\nu)} \right\}. \quad (5)$$

Если $a - c, \mu, \nu \neq 0$, то равенство достигается только в точке $x = 0$.

Схема доказательства. Правая часть неравенства (5) — это свободный член в разложении функции $\psi_{a,c}(\mu,\nu;x)$ в ряд по степеням x. Тогда неравенство следует из неотрицательности коэффициентов при всех положительных степенях x.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 a) или теоремы 2. Тогда

$$\frac{(a+\mu)_\nu (c)_\nu}{(c+\mu)_\nu (a)_\nu} \leq \frac{g_{a,c}(0;x)g_{a,c}(\mu+\nu;x)}{g_{a,c}(\nu;x)g_{a,c}(\mu;x)} \leq 1$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 0$ и $x \geq 0$.

Схема доказательства. Оценка сверху эквивалентна неравенству $\psi_{a,c}(\mu,\nu;x) \geq 0$, составляющему часть утверждения теоремы 2. Оценка снизу составляет часть утверждения теоремы 2 из [4], если применить ее к функции $f_{a,c}(\mu;x) = \Gamma(c+\mu)g_{a,c}(\mu;x)/\Gamma(a+\mu)$.

Комбинируя следствия 2 и 3, получим двусторонние оценки для определителя Турана

$$g_0^2 \frac{\Gamma(a)^2}{\Gamma(c)^2} \left[\frac{(a)_\nu^2}{(c)_\nu^2} - \frac{(a)_{2\nu}}{(c)_{2\nu}} \right] \leq g_{a,c}(\nu;x)^2 - g_{a,c}(0;x)g_{a,c}(2\nu;x) \leq$$
$$\leq \frac{(c+\nu)_\nu (a)_\nu - (a+\nu)_\nu (c)_\nu}{(a)_\nu (c+\nu)_\nu} g_{a,c}(\nu;x)^2. \quad (6)$$

Эти неравенства справедливы для $\nu \in \mathbb{N}$, $a \geq c > 0$ в предположении, что $\{g_n\}_{n\geq 0}$ — неотрицательная последовательность, которая также логарифмически вогнута и не имеет внутренних нулей, когда $a > c + 1$.

Замечание. Ранее нами была доказана теорема ([4], теорема 1) о свойствах рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{(a+\mu)_n}{(c+\mu)_n} \frac{x^n}{n!},$$

которые при $c \geq a$ оказываются аналогичными свойствам рядов $g_{a,c}(\mu;x)$ из (1). В связи с этим закономерен вопрос: нельзя ли убрать факториал в приведенном ряде, сохранив его свойства (и усилив таким образом теорему 1 из [4]). Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным. Непосредственно проверяется, что

$$\sum_{k=0}^{2} \left(\frac{(a+1)_k (a+\mu)_{2-k}}{(c+1)_k (c+\mu)_{2-k}} - \frac{(a)_k (a+\mu+1)_{2-k}}{(c)_k (c+\mu+1)_{2-k}} \right) < 0$$

при $a = 1$, $\mu = 1/2$, $c = 20$. Следовательно, коэффициент при x^2 в разложении разности произведений, аналогичной (2), в данном случае отрицательный. Отрицательны также и коэффициенты при более высоких степенях x.

Пример 1. Если положить в (1) $g_n = (b)_n/n!$, то

$$g_{a,c}(\mu;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} \frac{\Gamma(a+\mu+n)}{\Gamma(c+\mu+n)} x^n = \frac{\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(c+\mu)} {}_2F_1(a+\mu, b; c+\mu; x),$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса ([13], гл. 2). Легко проверяется, что последовательность $\{(b)_n/n!\}$ логарифмически вогнута тогда и только тогда, когда $b \geq 1$ (отсутствие внутренних нулей очевидно при всех b). Следовательно, если $c+1 \geq a \geq c > 0$ и $b > 0$ или $a > c+1 > 1$ и $b \geq 1$, то функция $g_{a,c}(\mu;x)$ удовлетворяет неравенствам из следствий 2 и 3, а также неравенству (6). В частности при $\nu = 1$ последнее неравенство имеет вид

$$\frac{a}{c}({}_2F_1(a+1, b; c+1; x))^2 - \frac{a+1}{c+1} {}_2F_1(a, b; c; x) {}_2F_1(a+2, b; c+2; x) \geq \frac{a-c}{c(c+1)} \geq 0, \quad 0 \leq x < 1. \quad (7)$$

Заметим, что при $c \geq a$ и $b > 0$ функция $g_{a,c}(\mu;x)$ удовлетворяет теореме 3 из [4] и всем ее следствиям.

Пример 2. Нормализованная неполная бета-функция определяется формулой

$$I_x(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

и представляет собой функцию распределения случайной величины, подчиненной закону бета-распределения. Учитывая, что бета-функция в знаменателе равна $\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$, и делая замену переменной $t = ux$, придем к выражению

$$I_x(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^a \int_0^1 u^{a-1}(1-ux)^{b-1} du = \frac{\Gamma(a+b)x^a}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)} {}_2F_1(1-b, a; a+1; x),$$

где было использовано представление Эйлера ([13], теорема 2.2.1). Далее, применяя преобразование Эйлера ([13], теорема 2.2.5)

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; x),$$

приходим к представлению

$$I_x(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)x^a}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)} (1-x)^b {}_2F_1(a+b, 1; a+1; x) = \frac{x^a(1-x)^b}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+1+n)} x^n.$$

Поскольку множитель перед суммой логарифмически нейтрален по параметру a, применением теоремы 3 из [4] и теорем 1 и 2 данной статьи приходим к следующему утверждению: если $0 < b \le 1$, то функция $a \to I_x(a,b)$ логарифмически выпукла на $(0,\infty)$ при каждом фиксированном $0 < x < 1$; если $b > 1$, то функция $a \to I_x(a,b)$ удовлетворяет неравенствам из следствий 2 и 3, а также неравенству (6) при каждом фиксированном $0 < x < 1$. Другим способом можно показать, что во втором случае $a \to I_x(a,b)$ логарифмически вогнута на $(0,\infty)$. Более того, функция $b \to I_x(a,b)$ также логарифмически вогнута на $(0,\infty)$ при каждом $a > 0$ и $0 < x < 1$. Доказательство этих фактов будет дано в другой публикации.

Пример 3. Этот пример дополняет пример 2 из [4]. Рассмотрим дробь Гаусса ([13], § 2.5)

$$r(x) = \frac{{}_2F_1(a+1,b;c+1;x)}{{}_2F_1(a,b;c;x)}.$$

Применим соотношение смежности ([13], (2.5.3))

$$\frac{a+1}{c+1}{}_2F_1(a+2,b;c+2;x) = \frac{c+(a-b+1)x}{(c-b+1)x}{}_2F_1(a+1,b;c+1;x) - \frac{c}{(c-b+1)x}{}_2F_1(a,b;c;x).$$

Подставив это соотношение в неравенство (7), получим

$$\frac{a}{c}({}_2F_1(a+1,b;c+1;x))^2 \ge \frac{c+(a-b+1)x}{(c-b+1)x}{}_2F_1(a,b;c;x){}_2F_1(a+1,b;c+1;x) - \frac{c({}_2F_1(a,b;c;x))^2}{(c-b+1)x}$$

или, после деления на $({}_2F_1(a,b;c;x))^2$,

$$\frac{a}{c}r(x)^2 - \frac{c+(a-b+1)x}{(c-b+1)x}r(x) + \frac{c}{(c-b+1)x} \ge 0.$$

Решая это неравенство отдельно при $c-b+1<0$ и $c-b+1>0$ и комбинируя результат с неравенствами из примера 2 работы [4], приходим к таблице

	$c+1<b$	$c+1>b$
$c+1 \ge a \ge c > 0,\ b > 0$ или $a > c+1 > 1,\ b > 1$	$r(x) \ge \Lambda_{a,b,c}(x)$	$r(x) \le \Lambda_{a,b,c}(x)$
$c \ge a > 0,\ b > 0$	$r(x) \le \Lambda_{a,b,c}(x)$	$r(x) \ge \Lambda_{a,b,c}(x)$

,

где $\Lambda_{a,b,c}(x) = \dfrac{c+(a-b+1)x-\sqrt{(c+(a-b+1)x)^2-4a(c-b+1)x}}{2(a/c)(c-b+1)x}$.

Пример 4. Естественным обобщением примера 1 является функция

$$g(\mu;x) = \frac{\Gamma(a_1+\mu)}{\Gamma(c_1+\mu)}{}_{q+1}F_q(a_1+\mu,a_2,\dots,a_{q+1};c_1+\mu,c_2,\dots,c_q;x), \tag{8}$$

где ${}_{q+1}F_q$ — обобщенный гипергеометрический ряд ([13], (2.1.2)). Применение леммы 9 из [4] приводит к следующему утверждению: пусть либо $c_1+1 \ge a_1 \ge c_1 > 0$ и $a_2,\dots,a_{q+1},c_2,\dots,c_q$ — любые положительные числа, либо $a > c+1 > 1$ и выполнены неравенства

$$\frac{e_q(c_2,\dots,c_q,1)}{e_q(a_2,\dots,a_{q+1})} \le \frac{e_{q-1}(c_2,\dots,c_q,1)}{e_{q-1}(a_2,\dots,a_{q+1})} \le \dots \le \frac{e_1(c_2,\dots,c_q,1)}{e_1(a_2,\dots,a_{q+1})} \le 1.$$

Тогда $g(\mu;x)$ из (8) и построенная для нее по формуле (2) функция $\psi(\mu,\nu;x)$ удовлетворяют утверждениям теоремы 2, следствий 1, 2, 3 и неравенству (6). Здесь $e_k(x_1,\dots,x_q)$ — k-й элементарный симметрический многочлен, т. е.

$$e_0(x_1,\dots,x_q) = 1, \quad e_k(x_1,\dots,x_q) = \sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_k\le q} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_k}, \quad k \ge 1.$$

Литература

[1] Karp D.B., Sitnik S.M. *Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions*, J. Math. Anal. Appl. **364** (2), 384–394 (2010).

[2] Карп Д.Б. *Неравенства Турана для функции Куммера от сдвига по обоим параметрам*, Зап. научн. семин. ПОМИ **383**, 110–125 (2010).

[3] Kalmykov S.I., Karp D.B. *Log-concavity for series in reciprocal gamma functions*, Int. Transforms and Special func. **24** (11), 859–872 (2013).

[4] Kalmykov S.I., Karp D.B. *Log-convexity and log-concavity for series in gamma ratios and applications*, J. Math. Anal. Appl. **406**, 400–418 (2013).

[5] Karp D.B., Sitnik S.M. *Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function*, J. Approxim. Theory **161**, 337–352 (2009).

[6] Ситник С.М. *Неравенства для функций Бесселя*, Докл. РАН **340** (1), 29–32 (1995).

[7] Ситник С.М. *Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи*, ДАН СССР **320** (6), 1326–1330 (1991).

[8] Gosper R.W. *Decision procedures for indefinite hypergeometric summation*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **75**, 40–42 (1978).

[9] Petkovšek M., Wilf H.S., Zeilberger D. $A = B$ (A.K.Peters, Wellesley, MA, 1996).

[10] Niculescu C.P., Persson L.-E. *Convex functions and their applications. A contemporary approach* (Springer Science + Business Media, Inc., 2006).

[11] Miller K.S., Samko S. *Completely monotonic functions*, Integr. Transf. and Spec. Funct. **12** (4), 389–402 (2001).

[12] Schilling R.L., Song R., Vondraček Z. *Bernstein functions. Theory and applications*, Studies in Mathematics (Walter de Gruyter, 2010), vol 37.

[13] Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special functions* (Cambridge University Press, 1999).

С.И. Калмыков

научный сотрудник,
Институт Бойяи, Университет Сегеда,
ул. Аради в. тере 1, г. Сегед, 6720, Венгрия,

`e-mail:` sergeykalmykov@inbox.ru

Д.Б. Карп

доцент, кафедра бизнес-информатики и экономико-математических методов,
Школа экономики и менеджмента,
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, д. 8, г. Владивосток, 690950, Россия,

`e-mail:` dmkrp@yandex.ru

S.I. Kalmykov and D.B. Karp

On logarithmic concavity of series in gamma ratios

Abstract. We find two-sided bounds and prove non-negativeness Taylor coefficients for the Turán determinants power series with coefficients involving the ratio of gamma-functions. We consider such series as functions of simultaneous shifts of the arguments of the gamma-functions located in the numerator and the denominator. These results are then applied to derive new inequalities for the Gauss hypergeometric function, the incomplete normalized beta-function and the generalized hypergeometric series. This communication continues the research of various authors who investigated logarithmic convexity and concavity of hypergeometric functions in parameters.

Keywords: gamma-function, beta-function, Turán inequalities, logarithmic concavity, generalized hypergeometric functions.

S.I. Kalmykov

Postdoctoral Research Fellow,
The Bolyai Institute, University of Szeged,
Aradi v. tere 1, Szeged 6720, Hungary,

`e-mail:` sergeykalmykov@inbox.ru

D.B. Karp

Associate Professor, Chair of Business Information Science and Mathematical Methods in Economics,
School of Economics and Management,
Far Eastern Federal University,
8 Sukhanov str., Vladivostok, 690950 Russia,

`e-mail:` dmkrp@yandex.ru