Д. В. Горяшин, Бесквадратные числа в последовательности $[\alpha n]$, *Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 3, 42–48

https://www.mathnet.ru/cheb287

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 511

БЕСКВАДРАТНЫЕ ЧИСЛА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $[\alpha n]$

Д. В. Горяшин (г. Москва)

Аннотация

В работе доказывается асимптотическая формула для числа бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $n \leqslant N$, где α — алгебраическое число или иррациональное, имеющее ограниченные неполные частные.

Ключевые слова: бесквадратные числа, числовая последовательность, асимптотическая формула, тригонометрические суммы.

SQUAREFREE NUMBERS IN THE SEQUENCE $[\alpha n]$

D. V. Goryashin (Moscow)

Abstract

An asymptotic formula for the number of squarefree integers of the form $[\alpha n]$ is proved in the paper, where α is an algebraic number or a number with restricted partial quotients.

Keywords: squarefree numbers, Beatty sequence, asymptotic formula, exponential sums.

Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и пусть $S(\alpha, N)$ равно количеству бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $n \leqslant N$. Оно равно значению суммы

$$S = S(\alpha, N) = \sum_{n \leqslant N} \mu^2([\alpha n]),$$

где $\mu(n)$ — функция Мебиуса. Разными авторами исследовалось асимптотическое поведение величины S при $N \to \infty$ с теми или иными ограничениями на число α.

Так, в работе [1] доказано, что если α — иррациональное число конечного типа (например, имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим), то

$$S = \frac{6}{\pi^2} N + O\left(\frac{N \ln \ln N}{\ln N}\right).$$

С другой стороны, в работе [2] доказана асимптотическая формула для средних значений мультипликативных функций для почти всех значений α. В применении к мультипликативной функции $\mu^2(n)$ эта теорема дает

$$S = \frac{6}{\pi^2}N + O\big(N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\big)$$

для почти всех α. При этом, в отличие от работы [1], метод данной статьи не позволяет указать какие-либо конкретные значения α, для которых верно это равенство.

Настоящая статья посвящена доказательству следующего результата.

Теорема 1. *Пусть иррациональное число $\alpha > 1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда при $N \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S = \sum_{n\leqslant N} \mu^2([\alpha n]) = \frac{6}{\pi^2}N + O\left(AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N\right),$$

где $A = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m)$.

Заметим, что имеет место оценка $A = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m) \ll N^{\frac{2}{\ln\ln N}} \ll N^{\varepsilon}$ для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство теоремы. Равенство $m = [\alpha n]$ равносильно тому, что $\alpha n - 1 < m < \alpha n$, $\frac{m}{\alpha} < n < \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$, т. е. $\{\frac{m}{\alpha}\} > 1 - \frac{1}{\alpha}$. Пусть функция $\omega(x)$ задана на полуинтервале $(0; 1]$ следующим образом:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - \frac{1}{\alpha} < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ или } x = 1; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

и продолжена периодически на всю числовую ось. Тогда

$$\sum_{n\leqslant N} \mu^2([\alpha n]) = \sum_{\substack{m\leqslant \alpha N \\ \{\frac{m}{\alpha}\}>1-\frac{1}{\alpha}}} \mu^2(m) = \sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m)\omega\left(\frac{m}{\alpha}\right).$$

Поскольку $\omega(x) = \frac{1}{\alpha} + \rho(x + \frac{1}{\alpha}) - \rho(x)$, где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, получаем

$$\sum_{k\leqslant N} \mu^2([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m) + \sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m)\left(\rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right).$$

Первое слагаемое в правой части дает главный член асимптотики:

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m) = \frac{1}{\alpha\zeta(2)}\alpha N + O(\sqrt{N}) = \frac{1}{\zeta(2)}N + O(\sqrt{N}).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое. Обозначим их через

$$R=\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(\rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)-\rho\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right)$$

и воспользуемся следующей леммой о разложении функции $\rho(x)$ в ряд Фурье (см. [3]).

Лемма 1. *При всех $P\geqslant 2$ для функции $\rho(x)=\frac{1}{2}-\{x\}$ имеет место разложение*

$$\rho(x)=\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{e^{2\pi ikx}}{2\pi ik}+O(r(x)),$$

где

$$r(x)=\frac{1}{\sqrt{1+P^2\sin^2\pi x}}=\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}c_ke^{2\pi ikx}+O\left(\frac{\ln P}{P}\right),\quad c_k\ll\frac{\ln P}{P}e^{-|k|/P}.$$

Применяя эту лемму к сумме R, получаем:

$$R=\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(\rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)-\rho\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right)=$$
$$=\left(\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}}{2\pi ik}\left(e^{2\pi i\frac{k}{\alpha}}-1\right)+\right.$$
$$\left.+O\left(\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)+r\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{e^{2\pi i\frac{k}{\alpha}}-1}{2\pi ik}\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}+O\left(\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)+r\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right)\right).$$

Считаем, что $2\leqslant P\leqslant N$ (значение P в зависимости от N выберем позднее). Первая сумма оценивается следующим образом:

$$\left|\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{e^{2\pi i\frac{k}{\alpha}}-1}{2\pi ik}\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{1}{k}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}\right|.$$

Далее,

$$\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right)=\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)\left(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}c_ke^{2\pi ik\frac{m+1}{\alpha}}+O\left(\frac{\ln P}{P}\right)\right)=$$

$$= \sum_{1\leqslant |k|\leqslant P\ln P} c_k e^{2\pi i k\frac{1}{\alpha}} \sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}} + O\left(\frac{\alpha N}{P}\ln^2 N\right).$$

Поскольку $c_k \ll \frac{\ln P}{P}$, отсюда получаем оценку

$$\sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m) r\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) \ll \frac{\ln P}{P} \sum_{1\leqslant |k|\leqslant P\ln P} \left|\sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i\frac{km}{\alpha}}\right| + \frac{\alpha N}{P}\ln^2 N.$$

Таким же образом оценивается и вторая сумма в остатке. Положим $P=\sqrt{\alpha N}$. Тогда последнее слагаемое равно $O(\sqrt{\alpha N}\ln^2 N)$. Итак, требуется оценить тригонометрические суммы

$$W_1 = \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left|\sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i\lambda km}\right|, \quad W_2 = \frac{\ln P}{P} \sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P} \left|\sum_{m\leqslant \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i\lambda km}\right|,$$

где $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Нам потребуются следующие две леммы об оценке тригонометрических сумм.

Лемма 2. *При* $Y \geqslant 1$

$$\sum_{y\leqslant Y} e^{2\pi i\lambda y} \leqslant \min\left(Y, \frac{1}{2\|\lambda\|}\right),$$

где $\|\lambda\| = \min(\{\lambda\}, 1-\{\lambda\})$ *— расстояние от числа* λ *до ближайшего целого числа.*

Лемма 3. *Пусть* $\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a,q)=1$, $q\geqslant 1$, $|\theta|\leqslant 1$. *Тогда при* $X, Y \geqslant 1$

$$\sum_{x\leqslant X} \min\left(Y, \frac{1}{\|\lambda x\|}\right) \ll \frac{XY}{q} + (X+q)\ln 2q.$$

Рассмотрим сначала сумму W_1. Воспользуемся формулой $\mu^2(m) = \sum\limits_{d^2|m} \mu(d)$:

$$W_1 = \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left|\sum_{m\leqslant \alpha N} \left(\sum_{d^2|m} \mu(d)\right) e^{2\pi i\lambda km}\right| = \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \left|\sum_{d\leqslant \sqrt{\alpha N}} \mu(d) \sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda krd^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \sum_{d\leqslant \sqrt{\alpha N}} |\mu(d)| \left|\sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda krd^2}\right| \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant P} \frac{1}{k} \sum_{d\leqslant \sqrt{\alpha N}} \left|\sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda krd^2}\right|.$$

Разобьем внешние суммы по k и по d каждую на $\ll \ln N$ сумм по промежуткам вида $(K; 2K]$ и $(D; 2D]$ и соответственно, где $2K \leqslant P$, $2D \leqslant \sqrt{\alpha N}$. Тогда получим оценку

$$W_1 \ll \ln^2 N \max_{\substack{1\leqslant K\leqslant P/2\\ 1\leqslant D\leqslant \sqrt{\alpha N}/2}} \sum_{K<k\leqslant 2K} \frac{1}{k} \sum_{D<d\leqslant 2D} \left| \sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k r d^2} \right| = \ln^2 N \max_{\substack{1\leqslant K\leqslant P/2\\ 1\leqslant D\leqslant \sqrt{\alpha N}/2}} W(K,D).$$

Далее в зависимости от величин K и D рассмотрим два случая: $KD \leqslant (\alpha N)^{1/3}$ и $KD > (\alpha N)^{1/3}$.

Случай 1. Пусть выполнено неравенство $KD \leqslant (\alpha N)^{1/3}$. Применяя лемму 2, оценим сумму $W(K,D)$ следующим образом:

$$W(K,D) \ll \sum_{K<k\leqslant 2K} \frac{1}{k} \sum_{D<d\leqslant 2D} \min\left(\frac{\alpha N}{d^2}, \frac{1}{\|\lambda k d^2\|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \min\left(\frac{\alpha N}{k d^2}, \frac{1}{\|\lambda k d^2\|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \min\left(\frac{\alpha N}{K D^2}, \frac{1}{\|\lambda k d^2\|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{KD^2<m\leqslant 8KD^2} \left(\sum_{\substack{d^2|m\\ d\leqslant 2D}} 1\right) \min\left(\frac{\alpha N}{KD^2}, \frac{1}{\|\lambda m\|}\right).$$

Воспользуемся неравенством $\sum\limits_{\substack{d^2|m\\ d\leqslant 2D}} 1 \leqslant \tau(m) \leqslant A = \max\limits_{1\leqslant m\leqslant N^2} \tau(m)$ и леммой 3:

$$W(K,D) \ll A \sum_{KD^2<m\leqslant 8KD^2} \min\left(\frac{\alpha N}{KD^2}, \frac{1}{\|\lambda m\|}\right) \ll A \ln N \left(\frac{\alpha N}{q} + KD^2 + q\right).$$

Если число α (а значит и $\lambda = \frac{1}{\alpha}$) имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим, то знаменатель q подходящей дроби к λ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $(\alpha N)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \ll q \leqslant (\alpha N)^{\frac{1}{2}}$. Учитывая также неравенства $KD \leqslant (\alpha N)^{1/3}$ и $D \leqslant \sqrt{\alpha N}$, получаем

$$W(K,D) \ll A \ln N \left((\alpha N)^{1/2+\varepsilon} + (\alpha N)^{5/6} + (\alpha N)^{1/2}\right) \ll A (\alpha N)^{5/6} \ln N.$$

Случай 2. Пусть теперь выполнено неравенство $KD > (\alpha N)^{1/3}$. Возведем сумму $W(K,D)$ в квадрат и воспользуемся неравенством Коши:

$$W^2(K,D) \leqslant \frac{1}{K^2} KD \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \left| \sum_{r\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k r d^2} \right|^2 =$$

$$= \frac{D}{K} \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{1\leqslant r',r''\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2}.$$

Выделим во внутренней сумме слагаемые, соответствующие $r' = r''$. Получим

$$W^2(K,D) \leqslant \frac{D}{K}\left(\sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \frac{\alpha N}{d^2} + \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2}\right) \ll$$

$$\ll \alpha N + \frac{D}{K} \sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2}.$$

Для оценки полученной тройной суммы изменим в ней порядок суммирования:

$$\sum_{K<k\leqslant 2K} \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2} =$$

$$= \sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{D^2}} \sum_{D<d\leqslant \min\left(2D,\sqrt{\frac{\alpha N}{r'}},\sqrt{\frac{\alpha N}{r''}}\right)} \sum_{K<k\leqslant 2K} e^{2\pi i\lambda k(r'-r'')d^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant r'\neq r''\leqslant \frac{\alpha N}{D^2}} \sum_{D<d\leqslant \min\left(2D,\sqrt{\frac{\alpha N}{r'}},\sqrt{\frac{\alpha N}{r''}}\right)} \min\left(K, \frac{1}{\|\lambda(r'-r'')d^2\|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha N}{D^2} \sum_{\substack{-\frac{\alpha N}{D^2}\leqslant s\leqslant \frac{\alpha N}{D^2}\\ s\neq 0}} \sum_{D<d\leqslant 2D} \min\left(K, \frac{1}{\|\lambda s d^2\|}\right) \ll \frac{\alpha N}{D^2} \sum_{v\leqslant 4\alpha N} \left(\sum_{\substack{d^2|v\\ d\leqslant 2D}} 1\right) \min\left(K, \frac{1}{\|\lambda v\|}\right).$$

Снова пользуясь неравенством $\sum\limits_{\substack{d^2|v\\ d\leqslant 2D}} 1 \leqslant \tau(v) \leqslant A = \max\limits_{1\leqslant v\leqslant N^2} \tau(v)$ и леммой 3, получим

$$W^2(K,D) \leqslant \alpha N + A\frac{D}{K}\frac{\alpha N}{D^2}\left(\frac{\alpha NK}{q} + \alpha N + q\right)\ln N \ll$$

$$\ll A\ln N\left(\alpha N + \frac{(\alpha N)^2}{qD} + \frac{(\alpha N)^2}{KD} + \frac{\alpha N q}{KD}\right).$$

Следовательно,

$$W(K,D) \ll \sqrt{A\ln N}\left(\sqrt{\alpha N} + \frac{\alpha N}{\sqrt{qD}} + \frac{\alpha N}{\sqrt{KD}} + \sqrt{\frac{\alpha N q}{KD}}\right).$$

Аналогично случаю 1, знаменатель q подходящей дроби к λ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $(\alpha NK)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \ll q \leqslant (\alpha NK)^{\frac{1}{2}}$. С учетом неравенства $KD > (\alpha N)^{1/3}$ в этом случае получим

$$W(K,D) \ll \sqrt{A\ln N}\left(\sqrt{\alpha N} + \frac{(\alpha N)^{3/4+\frac{\varepsilon}{2}}}{K^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}\sqrt{D}} + \frac{\alpha N}{\sqrt{KD}} + \frac{(\alpha N)^{3/4}}{\sqrt[4]{K}\sqrt{D}}\right) \ll A(\alpha N)^{5/6}\ln N.$$

Итак, в обоих случаях для суммы W_1 получаем оценку

$$W_1 \ll \ln^2 N \max_{\substack{1\leqslant K\leqslant P/2\\ 1\leqslant D\leqslant \sqrt{\alpha N}/2}} W(K,D) \ll A(\alpha N)^{5/6}\ln^3 N.$$

Сумму W_2 оценим следующим образом:

$$W_2 = \frac{\ln P}{P}\sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\lambda km}\right| \leqslant \ln^2 P\sum_{1\leqslant k\leqslant P\ln P}\frac{1}{k}\left|\sum_{m\leqslant\alpha N}\mu^2(m)e^{2\pi i\lambda km}\right|.$$

Для суммы в правой части, очевидно, справедлива та же оценка, что и для суммы W_1 (отличие от W_1 лишь в том, что количество слагаемых во внешней сумме по k в ней равно $P\ln P$ вместо P). Следовательно, $W_2 \ll AN^{\frac{5}{6}}\ln^5 N$. Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Güloğlu A. M., Nevans, C. W. Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence // Bull. Austral. Math. Soc. 2008. Vol. 78. P. 327—334.

2. Abercrombie A. G., Banks W. D., Shparlinski I. E. Arithmetic functions on Beatty sequences // Acta Arith. 2009. Vol. 136, № 1. P. 81—89.

3. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Поступило 18.09.2013