V. V. Makeev, Knaster's problem on continuous mappings of a sphere into a Euclidean space, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1988, Volume 167, 169–178

В.В.Макеев

ЗАДАЧА КНАСТЕРА О НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ СФЕРЫ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Данная работа содержит некоторые замечания и обзор известных результатов по старой задаче Кнастера [I-2] нахождения на стандартной сфере $S^{n-1} \subset R^n$ таких конфигураций точек $A_1, \ldots, A_k$, что для любого непрерывного отображения $f: S^{n-1} \longrightarrow R^m$ найдется такое вращение a сферы S^{n-1}, что $f(a(A_1)) = \ldots = f(a(A_k))$ и некоторым тесно связанным с нею задачам.

Задача Кнастера [I] возникла из геометрической гипотезы Радемахера о возможности описать куб вокруг ограниченного подмножества R^n, которая впервые доказана в [3] при $n = 3$ и в [8] для любого n.

Для каких троек чисел (n, k, m) задача Кнастера имеет решение? Старая гипотеза Кнастера [2] о том, что для троек $(m+n-1,\ n,\ m)$ все конфигурации точек являются решениями, опровергнута автором в [I8], где указано ограничение: $l \cdot \frac{2n-l-1}{2} \geqslant m(k-1)$, здесь l - размерность натянутого на точки $A_1, \ldots, A_k$ и центр сферы пространства. Так как $l \leqslant \min(n, k)$, то из указанного ограничения вытекает $\min(n,k) \cdot \frac{2n - \min(n,k) - 1}{2} \geqslant m(k-1)$. Является ли это ограничение и достаточным условием существования решения задачи Кнастера для тройки (n, k, m)? При $n = 3$, $m = 1$ это так [3],[I2]. Неоднократно высказывалось предположение, что решением являются любые конфигурации с $k = n$, $m = 1$, а также с $k = 2n-2$, $m = 1$, если конфигурация симметрична относительно центра сферы.

Большинство известных решений задачи Кнастера обладает существенно используемой при доказательстве симметрией, что в некоторых случаях позволяет сводить доказательство к несуществованию эквивариантных отображений некоторых G --пространств [3,I0, I8,I9]. В § I данной заметки продолжается изучение связи задачи Кнастера с эквивариантными отображениями, где, в частности, найдено новое нетривиальное решение задачи Кнастера для отображений в прямую: для простого $p \geqslant 5$ $p-1$ точек стандартной сферы $S^{p-2} \subset R^{p-1}$, лежащие в вершинах вписанного в большую окружность сферы правильного p -угольника.

§ 2 данной заметки – о множестве $\{a \in SO(n) \mid f(a(A_1)) = \ldots f(a(A_k))\}$ решений задачи Кнастера для фиксированной конфигурации точек $A_1, \ldots, A_k \in S^{n-1}$ и отображения $f : S^{n-1} \longrightarrow R^m$ общего положения.

В § 3 изучается уже отмеченная автором в [18] и [19] связь задачи Кнастера с теоремой Дворецкого о существовании почти шарового сечения у многомерного выпуклого тела: нахождение некоторых решений задачи Кнастера позволило бы очень эффективно доказывать теорему Дворецкого, что и сделано автором в [18] для двумерных сечений; при этом оценка размерности объемлющего пространства получилась бы асимптотически значительно меньше, чем при традиционном аналитическом доказательстве [21], [27].

В литературе имеются следующие нетривиальные решения задачи Кнастера: $n = k = 3$, $m = 1$ [3-6] для некоторых специальных троек точек и в [7] в общем случае; $k = n$, $m = 1$ когда $A_1, \ldots, A_n$ – концы ортонормированного репера [8-10]; в [11] предыдущий результат обобщен на индуктивно правильные системы точек $A_1, \ldots, A_n \in S^{n-1} \subset R^n$; $n = 3$, $k = 4$, $m = 1$, когда точки являются концами двух диаметров сферы S^2 [12], [13]; в [14 – 16] для $k = 2n - 2$, $m = 1$, когда точки – концы $n - 1$ попарно ортогональных диаметров сферы $S^{n-1} \subset R^n$; в [17] для $2n$ концов n попарно-ортогональных диаметров сферы размерности mn, непрерывно отображаемой в R^m; для простого $k < n$, $m = 1$ и точек $A_1, \ldots, A_k$, лежащих на большой окружности сферы $S^{n-1} \subset R^n$ и делящих ее на равные части [17, 18]. В [20] изучается связь задачи Кнастера с задачей о реализации расстояний в элементах покрытия евклидовой сферы замкнутыми множествами.

§ 1. Задача Кнастера и эквивариантные отображения

ЛЕММА 1. Пусть циклическая группа Z_p простого порядка p свободно действует на k-связном топологическом пространстве X (k – натуральное число), а вещественнозначная функция f непрерывна на X. Если $k + 2 \leq p$, то найдутся такие $k+2$ различных элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+2}$ группы Z_p и точка $x \in X$, что $f(\alpha_1(x)) = \ldots = f(\alpha_{k+2}(x))$. Если $k + 2 > p$, то найдется орбита некоторой точки $x \in X$, отображающаяся f в одну точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. первого утверждения леммы 1 проведем от противного. Пусть не существует таких элементов $\alpha_1, \ldots$

$\alpha_{k+2} \in Z_p$ и $x \in X$, что $f(\alpha_1(x)) = \ldots = f(\alpha_{k+2}(x))$.

Определим отображение $\mathcal{F}: X \longrightarrow R^p$, положив $\mathcal{F}(x) = (f(x), f(\alpha(x)), \ldots, f((p-1)\alpha(x))$, где α -образующая Z_p. По построению $\mathcal{F}$ сохраняет действие Z_p, если на R^p определить действие циклическими перестановками координат. По предположению $\mathcal{F}(X)$ не задевает прямую L, выделенную уравнениями $x_1 = \ldots = x_p$. Обозначим $p: R^p \setminus L \longrightarrow S^{p-2}$ проекцию на сферу S^{p-2}, выделенную уравнениями $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1$ сначала вдоль L на $(p-1)$ -плоскость сферы, а затем вдоль исходящих из центра сферы лучей на саму сферу. По построению p сохраняет действие Z_p. В дальнейшем буквой $\mathcal{F}$ будет обозначаться сквозное отображение $p \circ \mathcal{F}: X \longrightarrow S^{p-2}$.

Очевидно, что всевозможные пересечения гиперплоскостей вида $x_i = x_j$ задают Z_p -инвариантное клеточное разбиение вышеуказанной сферы S^{p-2}.

По построению $\mathcal{F}$ не задевает остов L' указанного разбиения S^{p-2} коразмерности $k+1$, который содержится в объединении плоскостей вида $x_{i_1} = \ldots = x_{i_{k+2}}$, где все индексы при x попарно различны и принимают значения от I до p. Дополнение $S^{p-2} \setminus L'$ ретрагируется с сохранением действия Z_p на k -мерный остов двойственного клеточного разбиения S^{p-2}, и пусть p' - соответствующая ретракция. Тогда сквозное отображение $p' \circ \mathcal{F}$ - сохраняющее действие Z_p непрерывное отображение k -связного пространства X в k -мерное клеточное пространство, на которых Z_p действует свободно, что противоречит лемме I работы [19].

Второе утверждение леммы I вытекает из первого, так как, если $k+2 \geqslant p$ и X k -связно, то оно $(p-2)$ -связно.

СЛЕДСТВИЯ. I. Если на $(p-3)$ -связном пространстве X свободно действует группа Z_p простого нечетного порядка, то для любых элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1} \in Z_p$ и $f \in C(X)$ найдется такая точка $x \in X$, что $f(\alpha_1(x)) = \ldots = f(\alpha_{p-1}(x))$. Действительно, лемма I гарантирует существование требуемой точки $x \in X$ для некоторого набора элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1} \in Z_p$, а любые два такие набора элементов Z_p отличаются на некоторый элемент Z_p.

2. $p-1$ точек стандартной сферы $S^{p-2} \subset R^{p-1}$, лежащие в вершинах вписанного в большую окружность сферы правильного p -угольника, являются решением задачи Кнастера для функций

$f \in C(S^{p-2})$. Для доказательства достаточно рассмотреть на S^{p-2} стандартное действие группы корней p -ой степени из единицы и применить следствие I леммы I.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Вероятно заключение леммы I верно для любых $k+2$ элементов группы Z_p (а не только для некоторых, как доказано выше). Из этого усиления леммы I следовало бы, что при четных $n = k$ и $m = 1$ решением задачи Кнастера являются любые n точек большой окружности сферы S^{n-1}.

2. Пусть на k -связном компактном топологическом пространстве X свободно действует компактная топологическая группа G, $f \in C(X)$, $m = \min$ ($k+2$, порядок G). Верно ли, что для любых элементов $g_1, \ldots, g_m \in G$ найдется такая точка $x \in X$, что $f(g_1(x)) = \ldots = f(g_m(x))$?

3. Если набор k точек $A_1, \ldots, A_k \in S^{n-1}$ - решение задачи Кнастера для отображений $f: S^{n-1} \longrightarrow R^m$, то для произвольных m замкнутых подмножеств $F_1, \ldots, F_m$ верна альтернатива: при некотором положении набора точек $A_1, \ldots, A_k$ либо все точки попадают в $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F_i$, либо все точки не попадают в одно из множеств F_i. Для доказательства достаточно применить определение решения задачи Кнастера к отображению $f: S^{n-1} \longrightarrow R^m$, заданному формулой $f(x) = (\rho(x, F_1), \ldots, \rho(x, F_m))$, где ρ - угловая метрика на сфере S^{n-1}. Верно ли, что для любых точек сферы S^{n-1} и замкнутого $F \subset S^{n-1}$ поворотом сферы можно добиться того, что все точки попадут в F или все не попадут в F ?

§ 2. О множестве решений задачи Кнастера

Пусть $A_1, \ldots, A_k \in S^{n-1} \subset R^n$ и $f: S^{n-1} \longrightarrow R^m$ непрерывно. Какими свойствами обладает множество $\{a \in SO(n) \mid f(a(A_1)) = \ldots = f(a(A_k))\}$ решений задачи Кнастера?

В [24, 25, 26, I8, II] исследуется случай $k = n$, $m = 1$, $A_1, \ldots, A_k$ - концы ортонормированного репера, когда f - ширина ограниченного подмножества R^n, то есть множество описанных кубов ограниченного подмножества R^n. В [23] изучается близкая задача о множестве вписанных квадратов в аналитический образ окружности на плоскости.

В [II] и [24] дается оценка числа решений задачи Кнастера для некоторых специальных конфигураций n точек на стандартной сфере $S^{n-1} \subset R^n$. В [25] высказана гипотеза, что множество описанных кубов ограниченного множества в R^n содержит гомеоморфное $SO(n-1)$ подмножество. В [26] доказано существование таких ограниченных подмножеств A в R^3, что для всякого $a > 0$ вокруг A можно описать лишь конечное число различных кубов с ребром a.

В [18] замечено, что для всюду плотного, но заведомо не открытого в метрике Хаусдорфа множества выпуклых тел в $R^3 (R^n)$ множество их описанных кубов является гладкой кривой в $SO(3)$ (гладким подмногообразием $SO(n)$ коразмерности $n-1$). Совершенно аналогично для произвольных n точек стандартной сферы $S^{n-1} \subset R^n$ и всюду плотного в C^0-топологии и открытого в C^1-топологии множества функций $f \in C^1(S^{n-1})$ множество решений задачи Кнастера является гладким подмногообразием многообразия $SO(n)$ коразмерности $n-1$. Точно также по соображениям общего положения ([18], стр.411) для любых $A_1, A_2, A_3 \in S^2 \subset R^3$ и всюду плотного в C^0-топологии и открытого в C^2-топологии множества $f \in C^2(S^2)$ множество решений γ задачи Кнастера является гладкой кривой в $SO(3)$ и функция $f_1 : \gamma \longrightarrow R$, определенная равенством $f_1(a) = f(a(A_1))$, является функцией Морса. Так как γ является конечным набором гладко вложенных в $SO(3)$ окружностей, а функция Морса принимает на окружности каждое значение конечное число раз, то отсюда следует сформулированный выше результат [26].

ЛЕММА 2. Пусть A_1, A_2, A_3 - вершины правильного треугольника на сфере $S^2 \subset R^3$ и функция $f \in C(S^2)$ такова, что множество решений задачи Кнастера есть гладкая неособая кривая γ в $SO(3)$. Если на $SO(3)$ задана инвариантная риманова метрика, то длина γ не меньше двух длин стандартно вложенной $SO(2) \subset SO(3)$, как поворотов вокруг фиксированной прямой. Эта оценка точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из изложенного в [18], стр.406 рассуждения (которое по существу совпадает с первоначальным доказательством Какутани [3]) решение задачи Кнастера для указанных точек A_1, A_2, A_3 и функции $f \in C(S^2)$ можно найти в двумерном остове любого Z_3-инвариантного клеточного разбиения $SO(3)$, где образующая Z_3 переводит репер $(\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}) \in SO(3)$ в репер $(\overline{OA_2}, \overline{OA_3}, \overline{OA_1})$. То есть γ пересекает двумерный остов любого Z_3-инвариантного клеточного разбиения $SO(3)$ и очевидно сама кривая γ Z_3 - инвариантна.

Обозначим через α образующую группы Z_3 и учитывая, что $SO(3) \approx RP^3$, рассмотрим Z_3 - инвариантное клеточное разбиение $SO(3)$ с двумерным остовом $B \cup \alpha B \cup \alpha^2 B$, где B - некоторая стандартная проективная плоскость в общем положении с γ в $SO(3)$. По сказанному выше $(B \cup \alpha B$

$\cup \alpha^2 B) \cap \gamma \neq \emptyset$, а значит и $B \cap \gamma \neq \emptyset$ в силу Z_3-инвариантности γ и двумерного остова. Так как по условию γ есть трансверсальное пересечение двух неособых уровней функции $f(A_2) - f(A_1)$ и $f(A_3) - f(A_1)$ на $SO(3)$, то он реализует нулевой элемент $H_1(SO(3); Z_2) \cong Z_2$, а значит имеет нулевой индекс пересечения с B по модулю 2 и следовательно пересекается с B еще по меньшей мере в одной точке.

Итак, γ пересекается с трансверсальными ей стандартными проективными плоскостями по крайней мере в двух точках. Как известно, длина гладкой кривой γ отличается от длины стандартной проективной прямой на множитель, равный среднему числу точек пересечения γ с проективной плоскостью. Лемма 2 доказана.

Для доказательства точности оценки достаточно рассмотреть функцию $f = x_1$.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Как обобщить лемму 2 на произвольные троеточия двумерной сферы?

2. В [5] Хадвигер доказал, что вершины правильного треугольника на S^2 можно поместить в некоторый уровень произвольной функции $f \in C(S^2)$, отразив их симметрично относительно некоторой проходящей через центр сферы плоскости (это утверждение без труда выводится из доказанного выше утверждения, что множество решений задачи Кнастера для правильного троеточия пересекается с любой стандартной проективной плоскостью в $SO(3)$).

Обобщается ли это утверждение [5] на произвольное n точек сферы $S^{n-1} \subset R^n$ и функцию $f \in C(S^{n-1})$? Если на $SO(n)$ рассмотреть инвариантную риманову метрику, то верно ли, что для точек $A_1, \dots, A_n \in S^{n-1}$ $\frac{(n-1)(n-1)}{2}$-мерная мера "гладкого множества решений" задачи Кнастера не меньше удвоенной меры стандартно вложенной $SO(n-1) \subset SO(n)$, как поворотов вокруг фиксированной прямой? Если это верно, то оценка точная, как показывает пример $f = x_1$. Нетрудно проверить, что для специальных решений задачи Кнастера из следствия 2, § I данной заметки эта гипотеза выполняется.

§ 3. Задача Кнастера и почти шаровые сечения выпуклых тел

Тело $K \subset R^n$ называется ε-асферическим, если оно содержит некоторый шар и содержится в гомотетичном ему шаре с коэффициентом $1 + \varepsilon$ и тем же центром.

ЛЕММА 3. Если лучевая функция выпуклого тела $K \subset R^n$ относительно его внутренней точки 0 принимает одинаковое значение R в точках некоторой ε -сети сферы S^{n-1}, то исходное тело $\left(\frac{1}{\cos 2\varepsilon}-1\right)$ -асферично. При $n=2$ эта оценка точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В K можно вписать шар радиуса $R\cdot\cos\varepsilon$ с центром в точке O. Пусть P - опорная к телу K плоскость, а A - основание перпендикуляра, опущенного из точки O на P. В выбранной ε -сети найдется такой луч ℓ, что угол между OA и ℓ не превосходит ε. Тогда P высекает на ℓ отрезок длины $\leqslant \frac{OA}{\cos\varepsilon}$, поэтому $R\leqslant\frac{OA}{\cos\varepsilon}$ и $OA \geqslant R\cdot\cos\varepsilon$.

Вокруг K можно описать шар радиуса $\frac{R\cos\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}$ с центром в O. Пусть B - наиболее удаленная от O точка K, а A - такая точка границы K, что $OA=R$ и $\angle AOB\leqslant\varepsilon$. Как мы показали выше, высота OH треугольника OAB не меньше $R\cos\varepsilon$, поэтому $\angle HOA\leqslant\varepsilon$ и $\angle HOB\leqslant\angle HOA+\angle AOB$, а значит $OB\leqslant\frac{R\cos\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}$.

Точность доказанной оценки при $n=2$ подтверждается примером на рис.I.

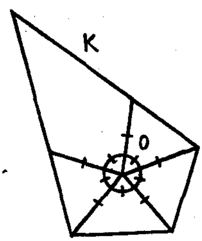

Рис.I.

Обозначим $N_\varepsilon(n)$ - минимальное число элементов в ε - сети на единичной сфере в R^n. Как известно, $N_\varepsilon(n)\sim\frac{c(n)}{\varepsilon^{n-1}}$ при $\varepsilon\longrightarrow 0$, где $c(n)$ - минимальная плотность покрытия R^{n-1} единичными шарами, умноженная на площадь сферы S^{n-1}.

Если $(n, n, 1)$ - решение задачи Кнастера, то ее применение к лучевой функции выпуклого тела K относительно его внутренней точки O вместе с леммой 3 дает следующее: при $N\geqslant N_\varepsilon(n)\sim\frac{c(n)}{\varepsilon^{n-1}}$ через любую внутреннюю точку выпуклого тела в R^N проходит $\left(\frac{1}{\cos 2\varepsilon}-1\right)$ -асферическое n -мерное сечение. Следовательно, чтобы добиться ε -асферичности

-мерного сечения достаточно размерности

$$N \sim \frac{c(n)}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{n-1}}$$ а если $(n, 2n-2, 1)$ – решение задачи Кнастера для центрально-симметричных конфигураций, то получается оценка N асимптотически вдвое меньшая.

Если решением задачи Кнастера для $(n, 2n-2, 1)$ являются вершины правильного $(2n-2)$ -угольника большой окружности сферы $S^{n-1} \subset R^n$, то через любую внутреннюю точку 0 тела $K \subset R^n$ проходит плоское сечение K со вписанным правильным $2n-2$ -угольником с центром в 0, которое по лемме 3 при $n \geqslant 4$ $\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n-1}} - 1\right)$ – асферично. Как показывает рассмотрение специальных n -мерных симплексов [22], оценка асферичности двумерного сечения n -мерного тела не может быть лучше $\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} - 1\right)$.

Таким образом, из вышеуказанной гипотезы в задаче Кнастера вытекает асимптотически точная оценка $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n-1}} - 1$ асферичности двумерного сечения, проведенного через фиксированную точку n -мерного выпуклого тела. Оценка асимптотически в четыре раза большая установлена автором в [18].

Применим аналитический прием из доказательства теоремы Дворецкого к задаче Кнастера.

ЛЕММА 4. Для любых n точек единичной сферы $S^{n-1} \subset R^n$ и функции $f \in C(S^{n-1})$ найдутся конгруэнтные им n точек сферы в замкнутой $\arccos\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$ -окрестности некоторого уровня f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в [27] рассмотрим такое $c \in R$, что меры множеств $f^{-1}((-\infty, c])$ и $f^{-1}([c, +\infty))$ не меньше половины $(n-1)$ -мерной меры μ_{n-1} сферы S^{n-1}. Тогда мера ε -окрестности $f^{-1}(c)$ не меньше меры ε -окрестности большой $(n-2)$ -сферы S^{n-1}, которая получается из S^{n-1} выбрасыванием двух сферических шапок диаметра $2\cdot\cos\varepsilon$. Каждая из указанных конгруэнтных шапок помещается в полусферу диаметра $2\cdot\cos\varepsilon$, поэтому их общая мера не больше

$$(\cos\varepsilon)^{n-1}\,\mu_{n-1}(\varepsilon^{n-1})$$, что меньше $\frac{1}{n}\mu_{n-1}(S^{n-1})$,

если $\varepsilon > \arccos\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$.

Теперь лемма 4 следует из утверждения, что для измеримого $A \subset S^{n-1}$ с $\mu_{n-1}(A) > \frac{n-1}{n}\mu_{n-1}(S^{n-1})$ любые n точек сферы S^{n-1} вращением сферы можно всегда поместить в A.

Пусть μ – нормированная мера Хаара на $SO(n)$. Положим $A_i = \{ a \in SO(n) \mid$ образ i-й точки при вращении a не попадает в $A\}$. Тогда $\mu(A_i) < \frac{1}{n}$ и для наших целей подходит любой элемент из множества $SO(n) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ положительной меры.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 4 верна для любых N точек S^{n-1} и замкнутой $\arccos \sqrt[n-1]{\frac{1}{N}}$ -окрестности указанного уровня.

Литература

1. Knaster B. Un continu irreductible a decomposition continue en tranches. - Fund.Math. 1935, 25, 568-577.
2. Knaster B. Problem P4. - Colloq.Math., 1947, 1, 30-31.
3. Kakutani S. A proof, that there exists a circumscribing cube around any bounded closed set in . - Ann. Math., 1942, 43, 739-741.
4. A de Mira Fernandez. Funzione continue sopra una superficie sferica. - Portugaliae Math., 1946, 6, 132-134.
5. Hadwiger H. Elementare Begründung ausgewählter stetigkeitsgeometricher Sätze für Kreis and Kugelfuche. - Elem.Math., 1959, 14, N 3, 49-60.
6. Johnson R.D. Continuous real valued functions on spheres. - Masters thesis, University of Virginia, 1955.
7. Floyd E.E. Real valued mappings of spheres. - Proc.Amer.Math. Soc., 1955, 6, N 6, 957-959.
8. Yamabe H., Yujobo Z. On the continuous functions defined on a sphere. - Osaka Math.J. 1950, 2, 19-22.
9. Milgram A.N. Solution of frame problem for the three sphere. - Bull.Amer.Math.Soc. 1950, 56, N 2, 185.
10. Heller A. On equivariant maps of spaces with operators. - Ann.Math. 1952, 55, 223-231.
11. Богатый С.А., Химшиашвили Г.Н. Обобщение теоремы Борсука-Улама и проблема Кнастера. - Сообщ.Акад.наук ГССР, 1986, 123, № 3, 477-480.
12. Dyson F.J. Continuous functions defined on spheres. - Ann.Math. 1951, 54, 534-536.
13. Livesay G.R. On a theorem of F.Y.Dyson. - Ann.Math., 1954, 59, 227-229.

12 заказ 280

14. Y a n g C.T. On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson. I. - Ann.Math. 1954, 60, 262-282.
15. B o u r g i n D.G. On some separation and mapping theorems. - Comment.Math.Helv., 1955, 29, 199-214.
16. Y a n g C.T. On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson. II. - Ann.Math. 1955, 62, 271-283.
17. Y a n g C.T. Continuous functions from spheres to eucledean spaces. - Ann.Math. 1955, 62, 284-292.
18. М а к е е в В.В. Пространственные обобщения некоторых теорем о выпуклых фигурах. - Матем.заметки. 1984, 36, вып.3, 405-415.
19. М а к е е в В.В. О некоторых свойствах непрерывных отображений сфер и задачах комбинаторной геометрии. - Межвуз. тематич.сб. Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин. 1986, 75-85.
20. Б о г а т ы й С.А. Топологические методы в комбинаторных задачах. - Успехи мат.наук, 1986, 41, в.6, 37-48.
21. D v o r e t s k y A. Some results on covex bodies and Banach spaces. - Proc.Internat.Sympos. on Linear spaces. Jerusalem. 1960, 123-160.
22. М а к е е в В.В. Оценки асферичности сечений выпуклых тел. - Укр.геом.сборник, 1985, 28, 76-78.
23. J e r r a r d R.P. Inscribed squares in plane conecs. - Trans.Amer.Math.Soc., 1961, 98, N 2, 234-241.
24. J e r r a r d R.P. On Knasters Conjecture. - Trans.Amer. Math.Soc., 1972, 170, 385-402.
25. C a i r n s S.S. Umbeschreibende Vurfel von convexen Kӧrpern in euklidischen Raümen. - J.reine und angew.Math., 1961, 208, N 1, 91-101.
26. B o u r g i n D.G., M i n d e l C.W. Cubes in cubes. - Rend.Circ.Mat.Palermo 1968 (1969), 17, N 3, 313-327.
28. М и л ь м а н В.Д. Новое доказательство теоремы Дворецкого о сечениях выпуклых тел. - Функц.анализ и его приложения, 1971, 5, вып.4, 28-37.

Makeev V.V. Knasters problem about continuous mappings from spheres to eucledean spaces.

The paper contains survey of known results and some remarks on the well known Knasters problem.