А. В. Асриев, Одна лемма о сглаживании, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 5, 764–769

https://www.mathnet.ru/mzm5589

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 5 (1985)

ОДНА ЛЕММА О СГЛАЖИВАНИИ

А. В. Асриев

При получении оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме многими авторами использовался такой эффективный прием, как сглаживание (см., например, [1—5]). При каждом новом усложнении постановки задачи (повышении размерности пространства, изменении класса рассматриваемых множеств, учете неравномерности и т. д.) возникали новые, повышенные требования к соответствующим леммам.

В данной заметке предпринята попытка доказать достаточно общую («равномерную») лемму о сглаживании, позволяющую (путем выбора свободных параметров) переходить к оценкам, удобным в тех или иных ситуациях. Приводимая ниже лемма содержит как известные результаты, так и их уточнения и модификации.

Ниже для любых $A, B \subset \mathrm{R}^k$ и $\varepsilon \in \mathrm{R}^1$ обозначаем

$$A + B = \{x \in \mathrm{R}^k\colon\ x = y + z,\ y \in A,\ z \in B\},$$

$$\varepsilon A = \{x \in \mathrm{R}^k\colon\ x = \varepsilon \cdot y,\ y \in A\},$$

A^c — дополнение A.

Пусть теперь P, Q, K — вероятностные меры на R^k,

$$D = P - Q, K_\varepsilon (A) = K (\varepsilon^{-1} \cdot A), \text{где } \varepsilon > 0, A \subset \mathrm{R}^k.$$

Выберем симметричное звездное (т. е. содержащее вместе с любой своей точкой и отрезок, соединяющий эту точку с началом координат) множество $B \subset \mathrm{R}^k$ так, чтобы $\alpha = K (B) > 1/2$. Зафиксируем положительные числа ε,

ε', r, t и положим

$$\gamma = \sup_{x \in t\varepsilon' B} \max \{ | D * K_\varepsilon (A + \varepsilon B + x) |,$$
$$| D * K_\varepsilon (A \setminus (A^c - \varepsilon B) + x) | \},$$

$$\tau = \sup_{x \in t\varepsilon' B} Q ((A + 2\varepsilon B) \cap (A^c - 2\varepsilon B) + x),$$
$$\zeta (r) = K (rB^c).$$

ЛЕММА. *Для любых $\varepsilon' > \varepsilon > 0$ и положительных t*

$$| D(A) | \leqslant (2\alpha - 1)^{-1} (\gamma + \tau + \zeta (\varepsilon' \cdot \varepsilon^{-1})) + \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{t-1}. \quad (1)$$

Замечание 1. Под упомянутыми выше свободными «параметрами» понимаются не только числа ε', ε, t, но и само множество B.

Замечание 2. Если $B = \{x \in \mathrm{R}^k : |x| \leqslant a\}$, где a таково, что $K(B) > 1/2$, то из (1) следует лемма 5 [3].

Замечание 3. Пусть $Q = K = \Phi^V$ — нормальное в R^k распределение с нулевым средним и ковариационным оператором V (ниже $\Phi = \Phi^I$, где I — единичная матрица); $B = \{x \in \mathrm{R}^k : |x| \leqslant a\}$, где a таково, что $\Phi^V(B) \geqslant 3/4$, $\varepsilon = aT^{-1}$, $\varepsilon' = aT^{-1/2}$, $t = T^{1/2}$, где $T > 0$. Подстановка в (1) приводит к лемме [4].

Замечание 4. При получении оценки скорости сходимости в бесконечномерной центральной предельной теореме для вероятности попадания в параллелепипеды выяснилось, что и лемма [4] обладает рядом недостатков, главным из которых является неинвариантность правой части неравенства (в отличие от левой) относительно линейных преобразований координат. Преодолеть этот недостаток удалось в [5] за счет выбора множества B вида $\{x \in \mathrm{R}^k : |x|_\alpha \leqslant a\}$, где

$$|x|_\alpha = |(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_k x_k)|,$$
$$x = (x_1, \ldots, x_k), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k),$$

$\alpha_j > 0$ при $1 \leqslant j \leqslant k$, т. е. ε — окрестность множества предлагается понимать в метрике $|x|_\alpha$, а именно:

$$A^{\varepsilon, \alpha} = \{x \in \mathrm{R}^k : |x - z|_\alpha < \varepsilon, \ z \in A\},$$
$$A^{-\varepsilon, \alpha} = A \setminus (A^c)^{\varepsilon, \alpha}, \text{ где } \varepsilon > 0.$$

Пусть $\Pi(\bar{r}, \bar{\bar{r}})$ — параллелепипед в R^k, ориентированный вдоль базисных векторов, т. е.

$$\Pi(\bar{r}, \bar{\bar{r}}) = \{x \in R^k: \bar{r}_j \leqslant x_j \leqslant \bar{\bar{r}}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant k\},$$

где $\bar{r} = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_k)$, $\bar{\bar{r}} = (\bar{\bar{r}}_1, \ldots, \bar{\bar{r}}_k)$.

Пусть, кроме того,

$$r_j = \min(|\bar{r}_j|, |\bar{\bar{r}}_j|), \quad \alpha_j = \alpha_0/(1 + r_j),$$

$$a = \sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^k \alpha_j^2}$$

и α_0 таково, что $\Phi(B) \geqslant 3/4$, $\varepsilon = (aT)^{-1}$, $\varepsilon' = (aT^{1/2})^{-1}$, $t = \ln T$, где $T > 1$.

Тогда, положив $Q = K = \Phi$, получаем лемму [5]:

$$|D(\Pi(\bar{r}, \bar{\bar{r}}))| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{|x|_\alpha \leqslant (\ln T) T^{-1/2}} \max\{|D * \Phi_{(aT)^{-1}}(\Pi(\bar{r}, \bar{\bar{r}})^{T^{-1}, \alpha} + x)|,$$

$$D * \Phi_{(aT)^{-1}}(\Pi(\bar{r}, \bar{\bar{r}})^{-T^{-1}, \alpha} + x)|\} +$$

$$+ cT^{-1}\left(1 + \sum_{j=1}^k \exp\{-r_j^2/3\}\right), \qquad (2)$$

где c — абсолютная постоянная.

Неравенство (2) формально не инвариантно относительно линейных преобразований координат (инвариантность достигается, если положить $\alpha_j = \alpha_0/\sigma_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, где σ_j^2 — j-е собственное значение соответствующей диагональной ковариационной матрицы), но получаемая с помощью (2) оценка уже достаточна для использования при получении соответствующих оценок в центральной предельной теореме (см. [5]).

З а м е ч а н и е 5. Пусть множество $A \subset R^k$ представимо в виде $A = A_0 + x_0$, где A_0 — звездное множество, а $x_0 \in R^k$. Обозначим X_0 — множество всех точек x_0, для которых существует такое представление.

Пусть, кроме того, $\Phi(rA_0^c) < c(A_0) \cdot r^{-2}$, где $c(A_0)$ — «постоянная», зависящая от A_0, в частности, существует r_0 такое, что $\alpha = \Phi(r_0 A) \geqslant 3/4$.

Рассмотрим теперь функционал Минковского

$$M_{A_0}(x) = \{\inf r \geqslant 0: x \in rA_0\},$$

линии уровня которого и задают A_0. Функционал $M_{A_0}(x)$ однороден.

Пусть граница A_0 достаточно гладкая для того, чтобы была конечна величина L — верхняя грань плотности вероятности случайной величины $M_{A_0}(Y)$, где Y — стандартный нормальный вектор (некоторые достаточные условия, приводящие к выполнению этого требования, см. [6, 7]). Тогда, положив

$$\varepsilon = (r_0 T)^{-1}, \quad \varepsilon' = (r_0 T^{1/2})^{-1}, \quad t = \ln T$$

для $T > 1$, $B = r_0 A_0$, $Q = K = \Phi$, получаем неравенство

$$|D(A)| \leqslant$$
$$\leqslant 4 \inf_{x_0 \in X_0} \Big[\sup_{x \in (\ln T) T^{-1/2} A_0} \max \{ | D * \Phi_{(r_0 T)^{-1}} (A + A_0/T + x) |,$$
$$| D * \Phi_{(r_0 T)^{-1}} (A \setminus (A^c - T^{-1} A_0) + x) | \} + \frac{1 + L + c(A_0)}{T} \Big]. \quad (3)$$

Если A_0 выпукло, неравенство (3) можно улучшить. В этом случае, положив

$$A_r(x_0) = \{ x \in \mathrm{R}^k \colon M_{A_0}(x - x_0) \leqslant r \},$$

имеем

$$|D(A)| \leqslant$$
$$\leqslant 4 \inf_{x_0 \in X_0} \Big[\sup_{x \in (\ln T) T^{-1/2} A_1(0)} \max \{ | D * \Phi_{(r_0 T)^{-1}} (A_{1+1/T}(x_0 + x)) |,$$
$$| D * \Phi_{(r_0 T)^{-1}} (A_{1-1/T}(x_0 + x)) | \} + \frac{1 + c(A_1(0)) + L}{T} \Big].$$

Доказательство леммы. Обозначим

$$\delta_j = \sup_{x \in j\varepsilon' B} | D(A + x) |, \quad 0 \leqslant j < [t],$$

j — целое, а $[t]$ — наибольшее целое число, не превосходящее t.

Пусть $\sup_{x \in j\varepsilon' B} D(A + x) = \delta_j$ и $\delta_j > \tau$.

Выберем η и x_j так, чтобы $0 < \eta < \delta_j - \tau$, $D(A + x_j) > \delta_j - \eta$, $x_j \in j\varepsilon' B$, тогда

$$\gamma \geqslant D * K_\varepsilon (A + \varepsilon B + x_j) =$$
$$= \int D(A + \varepsilon B + x_j - y) K_\varepsilon (dy) = \Big(\int_{\varepsilon B} + \int_{\varepsilon' B \setminus \varepsilon B} +$$
$$+ \int_{\varepsilon' B^c \cap \varepsilon B^c} \Big) D(A + \varepsilon B + x_j - y) K_\varepsilon (dy) = I_1 + I_2 + I_3.$$

Легко видеть, что

$$I_1 = \int_{\varepsilon B} [P(A + \varepsilon B + x_j - y) - Q(A + x_j) -$$
$$- (Q(A + \varepsilon B + x_j - y) - Q(A + x_j))] K_\varepsilon(dy) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\varepsilon B} [D(A + x_j) - (Q(A + \varepsilon B + x_j - y) -$$
$$- Q(A + x_j))] K_\varepsilon(dy) \geqslant \alpha(\delta_j - \eta - \tau),$$

так как $A + \varepsilon B - y \supset A$, если $y \in \varepsilon B$, а $(A + 2\varepsilon B) \cap \cap (A^c - 2\varepsilon B) \supset (A + \varepsilon B - y) \setminus A$ и, следовательно,

$$Q(A + \varepsilon B + x_j - y) - Q(A + x_j) \leqslant \tau.$$

Аналогично:

$$I_2 = \int_{\varepsilon' B \setminus \varepsilon B} [P(A + \varepsilon B + x_j - y) - Q(A + x_j - y) -$$
$$- (Q(A + \varepsilon B + x_j - y) - Q(A + x_j - y))] K_\varepsilon(dy) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\varepsilon' B \setminus \varepsilon B} [D(A + x_j - y) - (Q(A + \varepsilon B + x_j - y) -$$
$$- Q(A + x_j - y))] K_\varepsilon(dy) \geqslant (1 - \alpha)(-\delta_{j+1} - \tau),$$

где справедливость последнего неравенства следует из симметричности и звездности множества B.

Понятно также, что

$$|I_3| \leqslant \int_{\varepsilon' B^c} K_\varepsilon(dy) \leqslant \zeta(\varepsilon' \cdot \varepsilon^{-1}).$$

Имеем, таким образом,

$$\gamma \geqslant \alpha\delta_j - \alpha\eta - \tau - (1 - \alpha)\,\delta_{j+1} - \zeta(\varepsilon' \cdot \varepsilon^{-1}).$$

В случае, когда $\sup\limits_{x \in j \cdot \varepsilon' \cdot B} D(A + x) = -\delta_j$, рассуждения совершенно аналогичны. Заметим, что если $\delta_j \leqslant \tau$, это неравенство также будет справедливо.

Обозначим

$$\Lambda = \gamma + \tau + \zeta(\varepsilon' \cdot \varepsilon^{-1}) \text{ и } \beta = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

Учитывая произвольность η, получаем:

$$\delta_j \leqslant \Lambda/\alpha + \beta\delta_{j+1}.$$

Проитерировав полученное неравенство по j от 0 до $[t]-1$, завершаем доказательство:

$$|D(A)|=\delta_0\leqslant\frac{\Lambda}{\alpha}(1+\beta+\ldots+\beta^{[t]-1})+$$
$$+\beta^{[t]}\delta_{[t]}\leqslant\frac{\Lambda}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\beta}+\beta^{[t]}\leqslant\frac{\Lambda}{2\alpha-1}+\beta^{t-1}.$$

Автор благодарен В. И. Ротарю за постановку задачи и полезные обсуждения.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 25.04.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Sazonov V. V. Normal approximation — some recent advances.— Lecture Notes in Math., 879, Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[2] Ротарь В. И. Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, т. 15, № 4, с. 647—665.

[3] Sweeting T. S. Speeds of convergence for the multidimensional central limit theorem.— Ann. Probab., 1977, v. 5, № 1, p. 28—41.

[4] Осипов Л. В., Ротарь В. И. О бесконечномерной центральной предельной теореме.— Теория вероятностей и ее применения, 1984, т. 29, № 2, с. 366—373.

[5] Асриев А. В., Ротарь В. И. Оценка скорости сходимости в бесконечномерной центральной предельной теореме для вероятности попадания в параллелепипеды.— Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 1, с. 11—12.

[6] Götze F. On the rate of convergence in the central limit theorem in Banach spaces.— Preprints in Statistics, University of Cologne, 1981, № 68, p. 34.

[7] Виноградова Т. Р. О точности нормальной аппроксимации на множествах, задаваемых гладкой функцией.— Теория вероятностей и ее применения, 1985, т. 30, № 2, с. 219—229; № 3, с. 554—557.