А. Б. Александров, Мультипликаторы Теплица–Шура для класса $S_p(L^2(G))$ при $p < 1$, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 282, 5–19

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

А. Б. Александров

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ТЕПЛИЦА–ШУРА ДЛЯ КЛАССА $S_p(L^2(G))$ ПРИ $p<1$

Пусть G – коммутативная локально компактная группа. Обозначим через Γ двойственную группу. Положим $(x,\gamma)\stackrel{\text{def}}{=}\gamma(x)$, где $x\in G$, $\gamma\in\Gamma$. Будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть F – измеримая функция на G, и пусть $0<p<1$. Тогда $F(x-y)$ является мультипликатором Шура*[1] *для класса Шаттена-фон Неймана $S_p(L^2(G))$ в том и только том случае, когда функция F может быть представлена в виде*

$$F(x)=\sum_{\gamma\in\Gamma}(x,\gamma)\mu_\gamma$$

локально почти всюду на G, где $\{\mu_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ – семейство чисел такое, что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}|\mu_\gamma|^p<+\infty$.

Эта теорема доказана в [1] для $G=\mathbb{Z}$ и $G=\mathbb{R}$.

Следует отметить, что достаточность очевидна. Кроме того, теорема очевидна в случае, когда G – компактная группа. Действительно, в таком случае постоянное ядро $k(x,y)=1$ определяет интегральный оператор из $S_p(L^2(G))$. Следовательно, ядро $F(x-y)=F(x-y)k(x,y)$ также определяет интегральный оператор из $S_p(L^2(G))$. Таким образом, оператор свертки $f\mapsto f*F$ на $L^2(G)$ принадлежит классу $S_p(L^2(G))$. Этот оператор унитарно эквивалентен оператору умножения $\varphi\mapsto\varphi\widehat{F}$ на $L^2(\Gamma)=\ell^2(\Gamma)$, где $\widehat{F}$ обозначает преобразование Фурье функции F. Следовательно, $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}|\widehat{F}(\gamma)|^p<+\infty$. Поэтому $F(x)=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}(x,\gamma)\widehat{F}(\gamma)$ почти всюду на G. Случай произвольной коммутативной локально компактной группы G сводится к случаю ее компактификации Бора $\overline{G}$.

Работа частично поддержана РФФИ, грант No. 99-01-00103, грант "Научные школы" No. 00-15-96-022 и "Интеграция" грант No. 326.53.

[1]Соответствующие определения и обозначения см. в §0.

Отметим, что доказательство в [1] не использует компактификации Бора.

В случае, когда группа G некомпактна, постоянное ядро $k(x, y) = 1$ не определяет даже ограниченный оператор. В этом случае ядро $k \equiv 1$ будет приближено достаточно хорошими ядрами вида $f(x)f(y)$, где $f \in L^2(G)$. Грубо говоря, такая аппроксимация позволит доказать, что функция F может быть продолжена до функции $\widetilde{F}$ на компактификации Бора $\overline{G}$ таким образом, что $\widetilde{F}(x - y)$ будет в классе $S_p(L^2(\overline{G}))$. Следует заметить, что $\overline{m}(G) = 0$, если группа G некомпактна, где $\overline{m}$ – мера Хаара на $\overline{G}$. Тем не менее, в нашем случае можно говорить о продолжении F, поскольку достаточно рассматривать случаи, когда F – достаточно хорошая функция. Это вытекает из следующей хорошо известной теоремы.

Теорема о мультипликаторах Теплица–Шура. *Пусть F – измеримая функция на G. Тогда $F(x-y)$ – мультипликатор Шура (для $S_1(L^2(G))$) в том и только том случае, когда функция F может быть представлена в виде*

$$F(x) = \int_{\Gamma} (x, \gamma) d\mu(\gamma)$$

локально почти всюду на G, где μ – комплексная бэровская мера на Γ.

К сожалению, автору неизвестна точная ссылка в связи с этой теоремой, см. также [1]. В конце этой статьи будет дано простое доказательство этой теоремы.

§0. Введение

Пусть H и H' – два гильбертовых[2] пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(H, H')$ множество всех непрерывных линейных операторов из H в H'. Пусть $\{s_n(T)\}_{n \geqslant 0}$ – последовательность сингулярных чисел оператора $T \in \mathcal{L}(H, H')$. Обозначим через $S_p(H, H')$ класс Шаттена-фон Неймана, т.е. множество всех $T \in \mathcal{L}(H, H')$

[2] Мы будем рассматривать также и несепарабельные гильбертовы пространства, поскольку пространство $L^2(G)$ не является сепарабельным для некоторых коммутативных локально компактных групп G.

таких, что $\|T\|_{S_p}^p \stackrel{\text{def}}{=} \|T\|_{S_p(H,H')}^p \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} s_n(T)^p < +\infty$. По поводу классов Шаттена-фон Неймана отсылаем читателя к [3].

Пусть $(X,\mathfrak{A},\mu)$ – пространство с мерой. Множество $E\in\mathfrak{A}$ называется *локально-нулевым*, если $\mu(A\cap E)=0$ для любого множества $A\in\mathfrak{A}$, для которого $\mu(A)<+\infty$. Ясно, что если $\mu(E)=0$, то E – локально-нулевое множество. Обратное верно в случае, когда μ – σ-конечная мера. Будем говорить, что некоторое свойство имеет место локально почти всюду, если множество всех точек, для которых это свойство не выполнено, является локально-нулевым. Обозначим через $\mathcal{L}^0(X,\mathfrak{A},\mu)$ множество всех комплексных измеримых функций, определенных всюду на X. Пусть $Z=Z(X,\mathfrak{A},\mu)$ – множество всех функций $f\in\mathcal{L}^0(X,\mathfrak{A},\mu)$ таких, что $f=0$ локально почти всюду. Положим $L^0(X,\mathfrak{A},\mu)\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{L}^0(X,\mathfrak{A},\mu)/Z$. Как обычно, для $0<p<+\infty$ положим $\|f\|_{L^p}^p\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_X|f|^p d\mu$ и $\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{A},\mu)\stackrel{\text{def}}{=}\{f\in\mathcal{L}^0(X,\mathfrak{A},\mu):\|f\|_{L^p}<+\infty\}$. Пусть $Z_0=Z_0(X,\mathfrak{A},\mu)$ – множество всех функций $f\in\mathcal{L}^0(X,\mathfrak{A},\mu)$ таких, что $f=0$ почти всюду. Ясно, что $Z_0=Z\cap\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{A},\mu)$ при $0<p<+\infty$. Определим $L^p(X,\mathfrak{A},\mu)\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{A},\mu)/Z_0$ при $0<p<+\infty$. Функция $f\in\mathcal{L}^0(X,\mathfrak{A},\mu)$ называется *существенно ограниченной*, если $f+g$ – ограниченная функция для некоторой функции $g\in Z$. Положим $\|f\|_{L^\infty}\stackrel{\text{def}}{=}\inf\{M>0:|f|\leqslant M$ локальна почти всюду$\}$. Обозначим через $\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{A},\mu)$ множество всех существенно ограниченных функций в $\mathcal{L}^0(X,\mathfrak{A},\mu)$. Положим $L^\infty(X,\mathfrak{A},\mu)\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{L}^\infty(X,\mathfrak{A},\mu)/Z$.

Обычно будем писать $L^p(X,\mu)$ или $L^p(\mu)$ вместо $L^p(X,\mathfrak{A},\mu)$.

Пусть G – коммутативная локально компактная группа. Полная положительная мера m на G называется *мерой Хаара*, если m удовлетворяет следующим условиям:

(i) область определения меры m содержит σ-алгебру всех борелевских подмножеств группы G,

(ii) $m(U)>0$ для любого непустого открытого множества $U\subset G$,

(iii) $m(a+A)=m(A)$ для любого элемента $a\in G$ и для любого борелевского множества $A\subset G$,

(iv) $m(A)=\inf m(U)$ для любого борелевского множества $A\subset G$, где infimum берется по всем открытым множествам $U\subset G$ таким, что $U\supset A$.

Хорошо известно, что мера Хаара существует, и она единственна с точностью до положительной мультипликативной константы. Множество $A \subset G$ называется *измеримым*, если A принадлежит области определения меры m. Ясно, что свойства (iii) и (iv) выполнены для любого измеримого множества $A \subset G$. Следует отметить, что вообще говоря, $m(A) \neq \sup m(K)$, где supremum берется по всем компактным множествам $K \subset A$.

Пусть $U \subset G$ непустое открытое множество с компактным замыканием. Обозначим через $G_0 = G_0(U)$ группу, порожденную U. Ясно, что G_0 – открытая подгруппа группы G. Мера Хаара m является σ-конечной тогда и только тогда, когда фактор-группа G/G_0 не более чем счётна. Пусть E – измеримое подмножество G. Тогда E – локально нулевое множество (относительно меры Хаара m) в том и только том случае, когда $m(E \cap (x + G_0)) = 0$ для любого $x \in G$. Таким образом, $Z(G, m) = Z_0(G, m)$ тогда и только тогда, когда m – σ-конечная мера или G – дискретная группа.

Следует отметить, что основные результаты этой статьи могут быть получены с помощью лишь σ-конечных мер. Действительно, мера Хаара m является σ-конечной на каждой группе вида $G_0(U)$, и требуемые результаты для G могут быть сведены к аналогичным результатам для групп $G_0(U)$. Тем не менее, мы не будем избегать рассмотрения не-σ-конечных мер.

Пусть $(X', \mathfrak{A}', \mu')$ и $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – два пространства с мерой. Обозначим через $(X' \times X, \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}, \mu' \otimes \mu)$ произведение этих пространств с мерой. Это произведение определяется следующим образом. Сначала положим $(\mu' \otimes \mu)_0(A' \times A) \stackrel{\text{def}}{=} \mu'(A')\mu(A)$ для $A' \in \mathfrak{A}'$ и $A \in \mathfrak{A}$ таких, что $\mu'(A'), \mu(A) < +\infty$; затем определим меру $\mu' \otimes \mu$ как продолжение Каратеодори меры $(\mu' \otimes \mu)_0$.

С каждой функцией $k \in L^2(X' \times X, \mu' \otimes \mu)$ свяжем интегральный оператор Гильберта–Шмидта $T : L^2(X, \mu) \to L^2(X', \mu')$, определяемый следующей формулой:

$$(Tf)(x') = \int\limits_X k(x', x) f(x) d\mu(x).$$

Это соответствие позволяет отождествить пространство $L^2(X' \times X, \mu' \otimes \mu)$ с $S_2(L^2(X, \mu), L^2(X', \mu'))$.

Для $k \in L^2(X' \times X, \mu' \otimes \mu)$ и $p \in (0, +\infty)$ обозначим через $\|k\|_{S_p(X' \times X, \mu' \otimes \mu)}$ S_p-норму интегрального оператора с ядром k.

Положим $\|k\|_{S_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)} = +\infty$, если соответствующий интегральный оператор не принадлежит S_p.

Для $p \leqslant 2$ обозначим через $S_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$ множество всех $k\in L^2(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$ таких, что $\|k\|_{S_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)} < +\infty$. Ясно, что $S_2(X'\times X,\mu'\otimes\mu) = L^2(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$.

Функция $\lambda\in L^0(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$ называется *мультипликатором Шура* для класса S_p, если существует константа C такая, что

$$\|\lambda k\|_{S_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)} \leqslant C\|k\|_{S_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)} \tag{1}$$

для всех $k\in L^2(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$. Обозначим через $\|\lambda\|_{\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)}$ наименьшую константу C, для которой выполнено соотношение (1).

Функция λ называется *мультипликатором Шура*, если λ – мультипликатор Шура для S_1.

Для $p \leqslant 2$ функция $\lambda \in L^0(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$ является мультипликатором Шура для класса S_p тогда и только тогда, когда $\lambda S_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu) \subset S_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$ множество всех мультипликаторов Шура для класса S_p при $0<p<+\infty$. Хорошо известно, что $\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)\subset\mathfrak{M}_2(X'\times X,\mu'\otimes\mu) = L^\infty(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$ при всех $p\in(0,+\infty)$. Кроме того, $\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)\subset\mathfrak{M}_q(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$, если $0<p<q\leqslant 2$, и $\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu) = \mathfrak{M}_q(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Если $X'=X$ и $\mu'=\mu$, то положим $S_p(X,\mu)\stackrel{\text{def}}{=}S_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$, $\mathfrak{M}_p(X,\mu)\stackrel{\text{def}}{=}\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$.

Завершим этот параграф списком обозначений.

Пусть X – локально компактное пространство. Обозначим через $M(X)$ пространство всех комплексных мер Бэра на X. Каждая мера μ из $M(X)$ могут быть продолжена единственным образом до регулярной борелевской меры на X. Это продолжение будет обозначаться той же буквой μ.

Пусть $C(X)$ – пространство всех комплексных непрерывных функций на X. Пространство $C(X)$ является банаховым пространством, если X – компактное множество. В этом случае пространство $M(X)$ отождествляется с пространством всех непрерывных линейных функционалов на $C(X)$.

Пусть μ – положительная (не обязательно σ-конечная) мера Бэра на X. Обозначим через $\operatorname{supp}_0\mu$ множество всех $x\in X$ таких, что для любой окрестности U точки x существует бэровское множество $E \subset U$, для которого $0 < \mu(E) < +\infty$. Ясно, что $\operatorname{supp}_0 \mu$ – обычный носитель меры μ, если μ – σ-конечная мера.

Пусть G – коммутативная локально компактная группа. Обозначим через Γ двойственную группу. Пусть $m = m_G$ обозначает меру Хаара на G. Будем предполагать, что $m(G) = 1$, если группа G компакта.

Положим

$$L^p(G) \stackrel{\text{def}}{=} L^p(G, m),$$
$$S_p(G) \stackrel{\text{def}}{=} S_p(G, m),$$
$$\mathfrak{M}_p(G) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{M}_p(G, m).$$

Пусть G' – еще одна коммутативная локально компактная группа с мерой Хаара m'. Положим

$$S_p(G' \times G) \stackrel{\text{def}}{=} S_p(G' \times G, m' \otimes m),$$
$$\mathfrak{M}_p(G' \times G) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{M}_p(G' \times G, m' \otimes m).$$

§1. Вспомогательные утверждения

Пусть $\{T_\alpha\}$ – направленное семейство в $\mathcal{L}(H, H')$, где H и H' – гильбертовы пространства. Предположим, что $T_0 = \lim\limits_\alpha T_\alpha$ в слабой операторной топологии. Тогда ясно, что $\|T_0\|_{S_p} \leqslant \liminf\limits_\alpha \|T_\alpha\|_{S_p}$ при любом $p > 0$. Следующая лемма представляет собой аналог этого утверждения в случае, когда операторы T_α действуют в различных парах гильбертовых пространств.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{A}$ – направленное множество. Пусть $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}\cup\{0\}}$ и $\{H'_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}\cup\{0\}}$ – два семейства гильбертовых пространств. Пусть $T_\alpha \in \mathcal{L}(H_\alpha, H'_\alpha)$ для $\alpha \in \mathcal{A}\cup\{0\}$. Пусть L и L' – линейные пространства. Пусть $J_\alpha : L \to H_\alpha$ и $J'_\alpha : L' \to H'_\alpha$ – линейные отображения при $\alpha \in \mathcal{A}\cup\{0\}$. Предположим, что множество $J_\alpha(L)$ плотно в H_α и $J'_\alpha(L')$ плотно в H'_α при всех $\alpha \in \mathcal{A}\cup\{0\}$. Обозначим через $(\cdot,\cdot)_\alpha$ внутренние произведения в H_α и H'_α. Предположим, что*

$$\begin{aligned}
&\lim_\alpha (J_\alpha x, J_\alpha y)_\alpha = (J_0 x, J_0 y)_0 && \forall x,\ y \in L,\\
&\lim_\alpha (J'_\alpha x', J'_\alpha y')_\alpha = (J'_0 x', J'_0 y')_0 && \forall x',\ y' \in L',\\
&\lim_\alpha (T_\alpha J_\alpha x, J'_\alpha x')_\alpha = (T_0 J_0 x, J'_0 x')_0 && \forall x \in L,\ \forall x' \in L'.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\|T_0\|_{S_p(H_0,H_0')} \leqslant \liminf_\alpha \|T_\alpha\|_{S_p(H_\alpha,H_\alpha')}$$

при всех $p>0$.

Доказательство. Достаточно проверить, что если $\|T_\alpha\|_{S_p} \leqslant 1$ при всех $\alpha\in\mathcal{A}$, то $\|T_0\|_{S_p}\leqslant 1$. Пусть $\|T_\alpha\|_{S_p}\leqslant 1$ при всех $\alpha\in\mathcal{A}$. Достаточно доказать, что для любого конечномерного подпространства E в $J_0(L)$ и для любого конечномерного подпространства E' в $J_0'(L')$ имеет место неравенство $\|P_{E'}T_0P_E\|_{S_p}\leqslant 1$, где P_E – ортогональный проектор в H на E, а $P_{E'}$ – ортогональный проектор в H' на E'. Можно взять подпространство E_0 в L и подпространство E_0' в L' такие, что $J_0(E_0)=E$, $J_0'(E_0')=E'$, $\dim E_0=\dim E$ и $\dim E_0'=\dim E'$. Пусть $P^\alpha_{E_0}$ и $P^\alpha_{E_0'}$ – ортогональные проекторы в H_α и H_α' на $J_\alpha(E_0)$ и $J_\alpha'(E_0')$ соответственно. Положим $(x,y)_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (J_\alpha x, J_\alpha y)_\alpha$ для $x,y\in E_0$ и $(x',y')_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (J_\alpha' x', J_\alpha' y')_\alpha$ для $x',y'\in E_0'$. Ясно, что существует индекс $\alpha_0\in\mathcal{A}$ такой, что $(\cdot,\cdot)_\alpha$ – внутреннее произведение в E_0 и в E_0' для всех $\alpha>\alpha_0$. Для $\alpha>\alpha_0$ и для $\alpha=0$ рассмотрим оператор $\widetilde{T}_\alpha: E_0\to E_0'$ такой, что $(\widetilde{T}_\alpha x, x')_\alpha = (T_\alpha J_\alpha x, J_\alpha' x')_\alpha = (P^\alpha_{E_0'}T_\alpha J_\alpha x, J_\alpha x')_\alpha$ для всех $x\in E_0$ и всех $x'\in E_0'$. Ясно, что $\|\widetilde{T}_\alpha\|_{S_p(E_0(\alpha),E_0'(\alpha))} = \|P^\alpha_{E_0'}T_\alpha P^\alpha_{E_0}\|_{S_p(H_\alpha,H_\alpha')}\leqslant 1$ для всех $\alpha>\alpha_0$, где $E_0(\alpha)$ обозначает пространство E_0 с внутренним произведением $(\cdot,\cdot)_\alpha$, а $E_0'(\alpha)$ обозначает пространство E_0' с внутренним произведением $(\cdot,\cdot)_\alpha$. Кроме того, $\lim_\alpha \widetilde{T}_\alpha=\widetilde{T}_0$ в любой из норм в $\mathcal{L}(E_0,E_0')$ и $\lim_\alpha (x,y)_\alpha=(x,y)_0$ для любых $x,y\in E_0$ и для любых $x,y\in E_0'$. Теперь ясно, что $\|\widetilde{T}_0\|_{S_p(E_0(0),E_0'(0))}\leqslant 1$. Следовательно, $\|P_{E'}T_0P_E\|_{S_p(H_0,H_0')}\leqslant 1$. $\square$

Лемма 1.2. *Пусть* X *и* X' *– компактные пространства. Пусть* μ *и* μ' *– положительные (не обязательно* σ*-конечные) меры на* σ*-алгебрах бэровских подмножеств в* X *и в* X' *соответственно. Пусть* $F\in\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)$ *при некотором* $p>0$. *Пусть* $\{k_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *и* $\{k_\alpha'\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *– направленные семейства неотрицательных функций в* $L^1(\mu)$ *и в* $L^1(\mu')$ *соответственно. Предположим, что* $\|k_\alpha\|_{L^1(\mu)}=\|k_\alpha'\|_{L^1(\mu')}=1$ *при всех* $\alpha\in\mathcal{A}$, $\lim_\alpha k_\alpha\mu=\nu$ *в слабой топологии* $\sigma(M(X),C(X))$ *и* $\lim_\alpha k_\alpha'\mu=\nu'$ *в слабой топологии* $\sigma(M(X'),C(X'))$. *Пусть* λ *– предельная точка направленного семейства* $\{F(x',x)k_\alpha'(x')k_\alpha(x)d\mu'(x')d\mu(x)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *в слабой топологии*

$\sigma(M(X'\times X), C(X'\times X))$. *Тогда* $\lambda = \widetilde{F}\cdot(\nu'\otimes\nu)$, *где* $\widetilde{F}\in L^\infty(\nu'\otimes\nu)$, $\|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\nu'\otimes\nu)} \leqslant \|F\|_{L^\infty(\mu'\otimes\mu)}$ *и* $\|\widetilde{F}\|_{S_p(X'\times X,\nu'\otimes\nu)} \leqslant \|F\|_{\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)}$.

Доказательство. Можно считать, что

$$\lambda = \lim_\alpha F(x',x)k'_\alpha(x')k_\alpha(x)d\mu'(x')d\mu(x)$$

в слабой топологии $\sigma(M(X'\times X), C(X'\times X))$. Ясно, что

$$\left|\int\limits_{X'\times X}\varphi(x',x)F(x',x)k'_\alpha(x')k_\alpha(x)d\mu'(x')d\mu(x)\right|$$
$$\leqslant \|F\|_{L^\infty(\mu'\otimes\mu)}\int\limits_{X'\times X}|\varphi(x',x)|k'_\alpha(x')k_\alpha(x)d\mu'(x')d\mu(x)$$

для любой функции $\varphi\in C(X'\times X)$. Следовательно, $\Big|\int\limits_{X'\times X}\varphi d\lambda\Big| \leqslant \|F\|_{L^\infty(\mu'\otimes\mu)}\|\varphi\|_{L^1(\nu'\otimes\nu)}$ для любой функции $\varphi\in C(X'\times X)$. Теперь ясно, что $\lambda = \widetilde{F}\cdot(\nu'\otimes\nu)$, причем $\|\widetilde{F}\|_{L^\infty(\nu'\otimes\nu)} \leqslant \|F\|_{L^\infty(\mu'\otimes\mu)}$.

Положим $L = C(X)$, $L' = C(X')$, $H_\alpha = L^2(k_\alpha\mu)$, $H'_\alpha = L^2(k'_\alpha\mu')$. Пусть $J_\alpha : C(X)\to L^2(k_\alpha\mu)$ и $J'_\alpha : C(X')\to L^2(k'_\alpha\mu')$ – отображения включения. Рассмотрим операторы $T_\alpha : L^2(k_\alpha\mu)\to L^2(k'_\alpha\mu')$ и $\widetilde{T}_\alpha : L^2(\mu)\to L^2(\mu')$, определенные следующими формулами:

$$(T_\alpha f)(x') = \int\limits_X F(x',x)f(x)k_\alpha(x)d\mu(x),$$
$$(\widetilde{T}_\alpha f)(x') = \int\limits_X F(x',x)\sqrt{k'_\alpha(x')}\sqrt{k_\alpha(x)}f(x)d\mu(x).$$

Ясно, что $\|\widetilde{T}_\alpha\|_{S_p} \leqslant \|F\|_{\mathfrak{M}_p}$. Рассмотрим изометрические операторы $U_\alpha : L^2(k_\alpha\mu)\to L^2(\mu)$ и $U'_\alpha : L^2(k'_\alpha\mu')\to L^2(\mu')$, определенные соотношениями $U_\alpha f = \sqrt{k_\alpha}f$, $U'_\alpha f = \sqrt{k'_\alpha}f$. Ясно, что $\widetilde{T}_\alpha U_\alpha = U'_\alpha T_\alpha$ и $\widetilde{T}_\alpha$ обращаются в нуль на ортогональном дополнении к образу оператора U_α. Следовательно, $\|T_\alpha\|_{S_p} = \|\widetilde{T}_\alpha\|_{S_p} \leqslant \|F\|_{\mathfrak{M}_p}$. Остается положить $H_0 = L^2(\nu)$, $H'_0 = L^2(\nu')$,

$$(T_0 f)(x') = \int\limits_X \widetilde{F}(x',x)f(x)d\nu(x)$$

для $f\in L^2(\nu)$ и применить лемму 1.1. $\square$

Следствие 1. *Пусть* X, X', μ *и* μ' *– такие же, как в лемме* 1.2. *Пусть* ν *и* ν' *– вероятностные меры из* $M(X)$ *и* $M(X')$ *соответственно. Предположим, что* $\operatorname{supp}_0\nu\subset\operatorname{supp}_0\mu$ *и* $\operatorname{supp}_0\nu'\subset\operatorname{supp}_0\mu'$. *Тогда* $\|F\|_{S_p(X'\times X,\nu'\otimes\nu)}\leqslant\|F\|_{\mathfrak{M}_p(X'\times X,\mu'\otimes\mu)}$ *для любой функции* $F\in C(X'\times X)$ *и для любого* $p\in(0,+\infty)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}$ множество всех мер $\tau\in M(X)$, представимых в виде $\tau=k\mu$, где $k\in L^1(\mu)$, $k\geqslant 0$, и $\|k\|_{L^1(\mu)}=1$. Ясно, что $\mathcal{K}$ – выпуклое множество. Обозначим через $\overline{\mathcal{K}}$ замыкание множества $\mathcal{K}$ в слабой топологии $\sigma(M(X),C(X))$. Легко видеть, что $\overline{\mathcal{K}}$ содержит δ-меру δ_x для любой точки $x\in\operatorname{supp}_0\mu$. Сдедовательно, $\nu\in\overline{\mathcal{K}}$. Таким образом, существует направленное семейство $\{k_\alpha\}$ в $L^1(\mu)$ такое, что $\|k_\alpha\|_{L^1(\mu)}=1$, $k_\alpha\geqslant 0$ и $\lim\limits_\alpha k_\alpha\mu=\nu$ в слабой топологии $\sigma(M(X),C(X))$. Точно так же существует направленное семейство k'_α в $L^1(\mu')$ такое, что $\|k'_\alpha\|_{L^1(\mu')}=1$, $k'_\alpha\geqslant 0$ и $\lim\limits_\alpha k'_\alpha\mu'=\nu'$ в слабой топологии $\sigma(M(X'),C(X'))$. Положим $\lambda=F\cdot(\nu'\otimes\nu)$. Остается применить лемму 1.2. $\square$

Следствие 2. *Пусть* G *и* G' *– коммутативные локально компактные группы. Пусть* F *– почти периодическая функция на* $G'\times G$. *Обозначим через* $\overline{G}$ *и* $\overline{G'}$ *компактификации Бора групп* G *и* G' *соответственно. Пусть* $\widetilde{F}$ *– непрерывное продолжении функции* F *на множество то* $\overline{G'}\times\overline{G}$. *Тогда* $\|\widetilde{F}\|_{S_p(\overline{G'}\times\overline{G})}\leqslant\|F\|_{\mathfrak{M}_p(G'\times G)}$ *для любого* $p\in(0,+\infty)$.

Доказательство. Определим меру $\widetilde{m}\in M(\overline{G})$ такую, что $\widetilde{m}(B)=m(B\cap G)$ для любого борелевского подмножества B множества $\overline{G}$. Ясно, что $\operatorname{supp}_0\widetilde{m}=\overline{G}$. Остается применить следствие 1. $\square$

Замечание. Лемма 1.2 и ее следствия могут быть усилены при $p>2$. Действительно, если $p>2$, то $q=\dfrac{p}{p-1}<p$, и, полагая $p:=q$, получаем более сильные результаты.

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает преобразование Фурье, т.е. $(\mathcal{F}\mu)(\gamma)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_G(-x,\gamma)d\mu(x)$ для $\mu\in M(G)$. Иногда будем писать $\widehat{\mu}$ вместо $\mathcal{F}\mu$. Рассмотрим также обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}$, определенное следующей формулой: $(\mathcal{F}^{-1}\mu)(\gamma)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_G(x,\gamma)d\mu(x)=(\mathcal{F}\mu)(-\gamma)$ для $\mu\in M(G)$. Как обычно, пространство $L^1(G)$ отождествляется с пространством всех абсолютно непрерывных мер из $M(G)$. В частности, если $f \in L^1(G)$, то $\widehat{f}(\gamma) = (\mathcal{F}f)(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_G (-x,\gamma)f(x)dm(x)$.

Лемма 1.3. *Пусть G – коммутативная локально компактная группа. Пусть V – окрестность нуля в двойственной группе Γ. Тогда существует неотрицательная функция $k \in L^1(G)$ такая, что $\widehat{k}(0) = 1$ и $\widehat{k}$ обращается в нуль вне V.*

Доказательство этой леммы можно найти в [4].

Следствие. *Существует направленное семейство $\{k_\alpha\}$ неотрицательных функций в $L^1(G)$ такое, что $\int\limits_G k_\alpha dm = 1$ для всех α и $\lim\limits_\alpha \widehat{k}_\alpha = 0$ равномерно вне любой окрестности нуля в Γ.* $\square$

Как обычно, группа G отождествляется с группой всех характеров на Γ. Таким образом, если $\mu \in M(\Gamma)$, то $(\mathcal{F}\mu)(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_G (-x,\gamma)d\mu(\gamma)$ и $(\mathcal{F}^{-1}\mu)(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_G (x,\gamma)d\mu(\gamma) = (\mathcal{F}\mu)(-x)$.

Лемма 1.4. *Пусть $\{k_\alpha\}$ – направленное семейство в $L^1(G)$. Предположим, что $\sup \|k_\alpha\|_{L^1(G)} < +\infty$, $\widehat{k}_\alpha(0) = 1$ для любого α и $\lim\limits_\alpha \widehat{k}_\alpha = 0$ равномерно вне любой окрестности нуля в Γ. Пусть $F = \mathcal{F}^{-1}\mu$, где $\mu \in M(\Gamma)$. Тогда $\lim\limits_\alpha \int\limits_G F k_\alpha dm = \mu\{0\}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mu\{0\} = 0$. Тогда для любого положительного ε существует окрестность нуля V в Γ такая, что $|\mu|(V) < \varepsilon$. Имеем

$$\int\limits_G F k_\alpha dm = \int\limits_\Gamma \int\limits_G k_\alpha(x)(x,\gamma)dm(x)d\mu(\gamma)$$

$$= \int\limits_\Gamma \widehat{k}_\alpha(-\gamma)d\mu(\gamma) = \int\limits_V \widehat{k}_\alpha(-\gamma)d\mu(\gamma) + \int\limits_{\Gamma\setminus V} \widehat{k}_\alpha(-\gamma)d\mu(\gamma).$$

Второе слагаемое стремится к 0, поскольку $\lim\limits_\alpha \widehat{k}_\alpha = 0$ вне $-V$. Модуль первого слагаемого оценивается величиной $\varepsilon \sup \|k_\alpha\|_{L^1(G)}$.$\square$

Следствие 1. *В условиях леммы* 1.4 *имеем*

$$\lim_{\alpha} \int_G |F|^2 k_\alpha dm = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\mu\{\gamma\}|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим меру $\widetilde{\mu}$ такую, что $\widetilde{\mu}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mu(-B)}$ для любого борелевского множества B в Γ. Положим $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mu * \widetilde{\mu}$. Остается заметить, что $|F(x)|^2 = \int_\Gamma (x,\gamma) d\lambda(\gamma)$ и $\lambda\{0\} = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\mu\{\gamma\}|^2$.

Следствие 2. *В условиях леммы* 1.4 *имеем*

$$\lim_{\alpha} \int_G |F(x-y)|^2 k_\alpha(x) k_\alpha(y) dm(x) dm(y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\mu\{\gamma\}|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим меру $\nu \in M(\Gamma\times\Gamma)$ такую, что $\nu(B) = \mu\{\gamma \in \Gamma : (\gamma, -\gamma) \in B\}$. Ясно, что $F(x-y) = \mathcal{F}^{-1}\nu$. Остается применить следствие 1 к группе $G\times G$. □

Следствие 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1.4. *Обозначим через* $\overline{G}$ *компактификацию Бора группы* G. *Положим* $F_d(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma\in\Gamma} (x,\gamma)\mu\{\gamma\}$ *при* $x \in \overline{G}$. *Тогда* $\lim_\alpha F k_\alpha \widetilde{m} = F_d \overline{m}$ *в слабой топологии* $\sigma(M(\overline{G}), C(\overline{G}))$, *где* $\overline{m}$ – *мера Хаара на* $\overline{G}$ *и* $\widetilde{m}$ *обозначает такую же меру, как в доказательстве следствия* 2 *к лемме* 1.2.

Доказательство. Пусть λ – предельная точка направленного семейства $\{Fk_\alpha\widetilde{m}\}$ в слабой топологии $\sigma(M(\overline{G}), C(\overline{G}))$. Тогда $\widehat{\lambda}(\gamma) = \lim_\alpha \int_G (x,-\gamma)F(x)k_\alpha(x)dm(x) = \mu\{\gamma\}$ по лемме 1.4. Следовательно, $\lambda = F_d\overline{m}$. Таким образом, $F_d\overline{m}$ – единственная предельная точка направленного семейства $\{Fk_\alpha\widetilde{m}\}$. Следствие доказано. □

§2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть* G *и* G' – *коммутативные локально компактные группы. Пусть* μ – *мера из* $M(\Gamma'\times\Gamma)$. *Предположим, что функция* $F = \mathcal{F}^{-1}\mu$ – *мультипликатор Шура из класса* $S_p(L^2(G), L^2(G'))$ *при* $p \in (0,1]$. *Положим*

$$F_d(x', x) = \sum_{(\gamma',\gamma)\in\Gamma'\times\Gamma} (x',\gamma')(x,\gamma)\mu\{(\gamma',\gamma)\}$$

для $(x', x) \in \overline{G' \times G}$, *где* $\overline{G' \times G} = \overline{G'} \times \overline{G}$ *– компактификация Бора группы* $G' \times G$. *Тогда* $F_d \in S_p(\overline{G'} \times \overline{G})$ *и* $\|F_d\|_{S_p(\overline{G'}\times\overline{G})} \leqslant \|F\|_{\mathfrak{M}_p(G'\times G)}$.

Доказательство. Возьмем направленное семейство $\{k_\alpha\}$ в $L^1(G)$ и $\{k'_\alpha\}$ в $L^1(G')$ такие, что $k_\alpha \geqslant 0$, $k'_\alpha \geqslant 0$, $\|k_\alpha\|_{L^1(G)} = \|k'_\alpha\|_{L^1(G')} = 1$, $\lim\limits_\alpha \widehat{k}_\alpha = 0$ равномерно вне любой окрестности нуля в Γ и $\lim\limits_\alpha \widehat{k}'_\alpha = 0$ равномерно вне любой окрестности нуля в Γ'. Ясно, что $\lim\limits_\alpha \widehat{k'_\alpha(x')k_\alpha}(x)(\gamma', \gamma) = \lim\limits_\alpha \widehat{k}'_\alpha(\gamma')\widehat{k}_\alpha(\gamma) = 0$ равномерно вне любой окрестности нуля в $\Gamma' \times \Gamma$. Остается применить лемму 1.2 и следствие 3 из леммы 1.4. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть* $F = \mathcal{F}^{-1}\mu$, *где* μ *– мера из* $M(\Gamma)$. *Пусть* $h \in L^2(G)$, *причем* $\|h\|_{L^2(G)} = 1$. *Обозначим через* $T : L^2(G) \to L^2(G)$ *интегральный оператор с ядром* $F(x-y)h(x)\overline{h(y)}$. *Тогда* $\operatorname{Trace} T = F(0)$.

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор $T_\gamma : L^2(G) \to L^2(G)$ с ядром $(x-y, \gamma)h(x)\overline{h(y)}$, где $\gamma \in \Gamma$. Ясно, что T_γ – оператор ранга 1. Кроме того, семейство $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ определяет непрерывную S_1-значную функцию на Γ. Следовательно, $\int_\Gamma T_\gamma d\mu(\gamma) \in S_1(L^2(G))$. Остается заметить, что $T = \int_\Gamma T_\gamma d\mu(\gamma)$, и $\operatorname{Trace} T = \int_\Gamma \operatorname{Trace} T_\gamma d\mu(\gamma) = \int_\Gamma d\mu = F(0)$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть* $F = \mathcal{F}^{-1}\mu$, *где* μ *– непрерывная мера из* $M(\Gamma)$. *Предположим, что* $F(x-y)$ *– мультипликатор Шура для класса* $S_p(L^2(G))$ *при некотором* $p < 1$. *Тогда* $F = 0$.

Доказательство. Возьмем направленное семейство $\{k_\alpha\}$ в $L^1(G)$ такое, что $k_\alpha \geqslant 0$, $\|k_\alpha\|_{L^1(G)} = 1$, $\lim\limits_\alpha \widehat{k}_\alpha = 0$ равномерно вне любой окрестности нуля в Γ. Рассмотрим интегральный оператор $\widetilde{T}_\alpha : L^2(G) \to L^2(G)$, определяемый следующей формулой

$$(\widetilde{T}_\alpha f)(x) = \int\limits_G F(x-y)\sqrt{k_\alpha(x)}\sqrt{k_\alpha(y)}f(y)dm(y).$$

Ясно, что $\|\widetilde{T}_\alpha\|_{S_p} \leqslant \|F(x-y)\|_{\mathfrak{M}_p}$. Заметим, что

$$\lim_\alpha \|\widetilde{T}_\alpha\|^2_{S_2} = \lim_\alpha \int\limits_{G\times G} |F(x-y)|^2 k_\alpha(x)k_\alpha(y)dm(x)dm(y) = 0$$

по следствию 2 из леммы 1.4. Ясно, что $\|\widetilde{T}_\alpha\|_{S_1} \leqslant \|\widetilde{T}_\alpha\|_{S_2}^{\frac{2-2p}{2-p}} \|\widetilde{T}_\alpha\|_{S_p}^{\frac{p}{2-p}}$. Следовательно, $\lim\limits_\alpha \|\widetilde{T}_\alpha\|_{S_1} = 0$, откуда $\lim\limits_\alpha \mathrm{Trace}(\widetilde{T}_\alpha) = 0$. По лемме 2.2 имеем $\mathrm{Trace}(\widetilde{T}_\alpha) = F(0)$ для всех α. Таким образом, $F(0) = 0$. Для завершения доказательства заметим, что функция $F(x+a)$ удовлетворяет условиям леммы 2.3 для любого $a \in G$. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть F – измеримая функция на коммутативной локально компактной группе G. Пусть $0 < p < 1$. Тогда $F(x-y)$ является мультипликатором Шура для класса $S_p(L^2(G))$ в том и только том случае, когда F можно представить в виде*

$$F(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (x, \gamma) \mu_\gamma$$

локально почти всюду на G, где $\{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – набор чисел, причем $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} |\mu_\gamma|^p < +\infty$.

Доказательство. Достаточность очевидна; докажем необходимость. Пусть $F(x-y)$ – мультипликатор Шура для класса $S_p(L^2(G))$. Тогда $F(x-y)$ – мультипликатор Шура. Таким образом, по теореме о мультипликаторах Теплица–Шура можно считать, что F представляется в виде $F = \mathcal{F}^{-1}\mu$, где $\mu \in M(\Gamma)$. По теореме 2.1 имеем $F_d(x-y) \in S_p(\overline{G} \times \overline{G})$. Отметим, что $\|F_d(x-y)\|_{S_p(\overline{G})}^p = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{F}_d(\gamma)|^p = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} |\mu(\gamma)|^p < +\infty$. Следовательно, $F_d(x-y) \in \mathfrak{M}_p(G \times G)$. Остается заметить, что $F = F_d$ по лемме 2.3. $\square$

Замечание. Из доказательства ясно, что $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} |\mu_\gamma|^p \leqslant \|F(x-y)\|_{\mathfrak{M}_p}^p$. Противоположное неравенство очевидно. Следовательно, $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} |\mu_\gamma|^p = \|F(x-y)\|_{\mathfrak{M}_p}^p$ для всех $p \in (0,1)$. $\square$

§3 Мультипликаторы Теплица–Шура

В этом параграфе будет дано простое доказательство теоремы о мультипликаторах Теплица–Шура. Сначала будет доказано утверждение, дополняющее результат М. Ш. Бирмана [2]. Чтобы сформулировать это утверждение, введем некоторые обозначения. Пусть f – функция на $G \times G$, где G – коммутативная локально компактная группа. Положим $(\mathfrak{T}f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_G f(x+t, t)\,dm(t)$.

Определим $A(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathcal{F}h : h \in L^1(\Gamma)\} = \{\mathcal{F}^{-1}h : h \in L^1(\Gamma)\}$. Положим $\|\mathcal{F}h\|_{A(G)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|h\|_{L^1(\Gamma)}$.

Теорема 3.1. *Пусть $k \in S_1(G)$, где G – коммутативная локально компактная группа. Тогда $\mathfrak{T}k$ имеет смысл почти всюду на G, $\mathfrak{T}k$ совпадает почти всюду с функцией $\Phi \in A(G)$, и $\|\Phi\|_{A(G)} \leqslant \|k\|_{S_1(G)}$.*

Обратно, для любой функции $\Phi \in A(G)$ существует функция $k \in S_1(G)$ такая, что $\Phi = \mathfrak{T}k$ почти всюду и $\|k\|_{S_1(G)} = \|\Phi\|_{A(G)}$.

Доказательство. Пусть $k \in S_1(G)$. Тогда хорошо известно, что k можно представить в виде $k(x,y) = \sum\limits_{n\geqslant 0} s_n f_n(x) g_n(y)$ (ряд сходится в S_1), где f_n, $g_n \in L^2(G)$, $\|f_n\|_{L^2(G)} = \|g_n\|_{L^2(G)} = 1$, $s_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} s_n = \|k\|_{S_1(G)}$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $k(x,y) = f(x)g(-y)$ при f, $g \in L^2(G)$. В этом случае требуемое утверждение очевидно, поскольку $\mathfrak{T}k = f * g$ и $\|f*g\|_{A(G)} \leqslant \|f\|_{L^2(G)}\|g\|_{L^2(G)} = \|k\|_{S_1(G)}$. Чтобы доказать обратное, заметим, что $A(G) = \{f*f : f \in L^2(G)\}$ и $\|f*f\|_{A(G)} = \|f\|^2_{L^2(G)}$. Таким образом, для любой функции $\Phi \in A(G)$ существует функция $k \in S_1(G)$ вида $k(x,y) = f(x)f(-y)$ такая, что $\mathfrak{T}k = \Phi$ почти всюду. $\square$

Положим $B(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathcal{F}\mu : \mu \in M(\Gamma)\} = \{\mathcal{F}^{-1}\mu : \mu \in M(\Gamma)\}$.

Теорема 3.2. *Пусть F – измеримая функция на коммутативной локально компактной группе G. Тогда $F(x-y)$ является мультипликатором Шура в том и только том случае, когда функция F совпадает локально почти всюду с некоторой функцией из $B(G)$.*

Доказательство. Из очевидного соотношения $\|(x-y,\gamma)\|_{\mathfrak{M}_1(G)} = \|(x,\gamma)(-y,\gamma)\|_{\mathfrak{M}_1(G)} = 1$ для $\gamma \in \Gamma$ вытекает достаточность. Докажем необходимость. Будет показано, что если $\Phi \in A(G)$, то функция $F\Phi$ совпадает почти всюду с функцией из $A(G)$. По теореме 3.1 существует функция $k \in S_1(G)$ такая, что $\mathfrak{T}k = \Phi$ почти всюду. Тогда $\mathfrak{T}(F(x-y)k(x,y)) = F\Phi$. Теперь из теоремы 3.1 следует, что $F\Phi$ совпадает почти везде с функцией $\widetilde{F\Phi} \in A(G)$.

Для любой точки $a \in G$ можно взять функцию $\Phi \in A(G)$ такую, что $\Phi(a) \neq 0$. Положим $F_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left.\dfrac{\widetilde{F\Phi}}{\Phi}\right|_{U_a}$, где U_a – окрестность точки a, для которой $\Phi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$.

Таким образом, для любой точки $a \in G$ существует окрестность U_a и непрерывная функция $F_a : U_a \to \mathbb{C}$ такие, что $F = F_a$ почти всюду на U_a. Следовательно, существует функция $\widetilde{F} \in C(G)$ такая, что $F = \widetilde{F}$ локально почти всюду. Ясно, что $\widetilde{F}A(G) \subset A(G)$. Чтобы доказать, что $\widetilde{F} \in B(G)$, достаточно сослаться на теорему Хельсона–Эдвардса, см. [4]. $\square$

Замечание. Легко видеть, что если $F = \mathcal{F}\mu$, то $\|F(x-y)\|_{\mathfrak{M}_1(G)} = \|\mu\|_{M(\Gamma)}$.

Литература

1. A. B. Aleksandrov and V. V. Peller, *Hankel and Toeplitz–Schur multipliers.* Preprint.
2. M. Sh. Birman, *A proof of the Fredholm trace formula as an application of a simple embedding for kernels of integral operators of trace class in* $L^2(\mathbb{R}^n)$. Linköping University. Preprint, LITH-Math.-R-89-30.
3. A. Pietsch, *Operator ideals.* North-Holland Mathematical Library, 20, Amsterdam-New York (1980).
4. W. Rudin, *Fourier analys on groups.* Interscience Publisher, New York (1962).

Aleksandrov A. B. Toeplitz–Schur multipliers of $S_p(L^2(G))$ for $p < 1$.

We study Toeplitz–Schur multipliers of Schatten–von Neumann class S_p for $0 < p < 1$. We describe all functions F on an arbitrary commutative locally compact group G satisfying the following condition: for any integral operator in S_p with kernel function $k(x,y)$, the kernel function $F(x-y)k(x)k(y)$ determines also an integral operator in S_p.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Email alex@pdmi.ras.ru

Поступило 25 июня 2001 г.