$v \in \{v \in L_2(Q) : v(x_1, x_2) = -v(x_1+1, x_2) \quad (0 \leqslant x_1 \leqslant 1;\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1)\}$ — произвольная функция. При этом в силу леммы 12 решение краевой задачи (35), (36) существует и единственно тогда и только тогда, когда $f(x_1, x_2) = f(x_1+1, x_2) \quad (0 \leqslant x_1 \leqslant 1;\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1)$.

Аналогично можно установить связь между краевой задачей для полуограниченного дифференциально-разностного оператора и краевой задачей (35), (37). Для этого надо взять несимметрический разностный оператор $Ru(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + u(x_1-1, x_2)$.

## Литература


1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, 2.— М.: Мир, 1966.
2. Бицадзе А. В., Самарский А. А.— Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 4.
3. Скубачевский А. Л.— В сб.: Методы теории дифференциальных уравнений и их приложения. Изд-во МАИ, 1978, вып. 440.
4. Каменский А. Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами.— Дис. ...канд. физ.-мат. наук. М., 1977.
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
6. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
7. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1966.
8. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1966.
9. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1976.



*Московский авиационный институт*



*Поступила в редакцию 14 декабря 1979 г.*



*УДК 517.956*



А. П. ЧЕРНЯЕВ


# ОСНОВНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ КОШИ—РИМАНА НЕКОТОРОГО КЛАССА

Рассмотрим дифференциальное уравнение для потенциала

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{P'(y)}{P(y)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

которое получается из обобщенной системы Коши — Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{P(y)} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{P(y)} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{2}$$

если исключить функцию тока $\Psi$. Системы вида (2) описывают двухмерные течения идеальной жидкости в слое, толщина которого изменяется по закону $P(y)$ [1, с. 169—175], [2, 3].

Заметим, что в этом случае $x$ и $y$ — суть криволинейные, изотермические координаты на поверхности основания слоя. Системы вида (2) описывают также двухмерные течения линейной фильтрации в неоднородном грунте с коэффициентом проницаемости $P(y)$. Жидкость считается несжимаемой и обладающей постоянной вязкостью [1, с. 275—277], [4, 5]. Здесь $x$ и $y$ — декартовы координаты на плоскости.

В случае, когда $P(0) = 0$, решения системы (2) изучаются при условии неперетекания через прямую $y = 0$, а именно

$$\lim_{y \to 0} P(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

В работе изучаются решения, описывающие течение пары источник — сток. В точке $(x_0, y_0)$ находится источник, а в точке $(-x_0, y_0)$ — сток. Настоящая работа расширяет класс функций $P(y)$, для которых можно в явном виде выписать потенциал $\Phi(x, y)$ для течений источник — сток [1, 3, 6, 7, 8] и др. С точки зрения теории фильтрации течение источник — сток интерпретируется как напорная фильтрация к скважине, расположенной в точке $(-x_0, y_0)$. Здесь $x>0$ — свободная вязкая жидкость, $x<0$ — пористая среда с коэффициентом проницаемости $P(y)$, в случае $P(0)=0$, $y=0$ — непроницаемая стенка. Решения этого типа названы основными, потому что при помощи известной техники [1] из них можно получить решения, описывающие все остальные течения.

Формулы (4.7), (4.15) и (5.8) значительно расширяют класс функций $P(y)$, для которых потенциалы выписываются в явном виде. Причем в § 4 дано подробное исследование исходной задачи при (4.7) и (4.15), из которого следует, что из этих случаев вытекает большинство известных результатов подобного типа.

Однако основным результатом настоящей работы надо считать формулу (1.17) § 1 при (3.17) § 3. Формула (3.17) дает общую структуру преобразования Фурье решения источник — сток. Асимптотическое разложение (3.20) формулы (3.17) во всех рассмотренных случаях показывает абсолютную интегрируемость преобразования Фурье по переменной интегрирования.

## § 1. СВЕДЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ К ОТЫСКАНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальные уравнения, решения которых суть потенциалы скоростей течения источник — сток.

Пусть

$$P(y) \in \theta_M, \tag{1.1}$$

[9, с. 125]. Тогда рассмотрим уравнение

$$P(y)\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]+P'(y)\frac{\partial\Phi}{\partial y}=QP(y)\left[\delta(x-x_0,\ y-y_0)-\right.$$
$$\left.-\delta(x+x_0,\ y-y_0)\right]. \tag{1.2}$$

Здесь $Q=\text{const}>0$, а $\delta$ — двухмерная дельта-функция Дирака [9, с. 75, 84]. В случае (1.1) (1.2) можно понимать в смысле обобщенных функций медленного роста на плоскости $(x, y)$ (см. [9], § 8).

Пусть $P(y)$ удовлетворяет одному из условий

$$P'(y)/P(y) \in \theta_M, \quad P(y)/P'(y) \in \theta_M. \tag{1.1$'$}$$

Тогда рассмотрим соответственно уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{P'(y)}{P(y)}\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q\left[\delta(x-x_0,\ y-y_0)-\delta(x+x_0,\ y-y_0)\right],$$
$$\frac{P(y)}{P'(y)}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{QP(y)}{P'(y)}\left[\delta(x-x_0,\ y-y_0)-\right.$$
$$\left.-\delta(x+x_0,\ y-y_0)\right]. \tag{1.2$'$}$$

В каждом из случаев (1.1)$'$ соответствующее уравнение из (1.2)$'$ можно понимать в смысле обобщенных функций медленного роста на плоскости $(x, y)$. Все три уравнения описывают течение пары источник — сток при разных условиях на $P(y)$.

Положим теперь

$$u(\xi, y)=F_x[\Phi], \tag{1.3}$$

где $F_x$ — преобразование Фурье по переменной $x$ ([9], § 9, формула (10)). Предположим теперь, что $\Phi$ удовлетворяет условию

$$\Phi(-x, y)=-\Phi(x, y), \quad \forall y, \tag{1.4}$$

что соответствует физическому смыслу пары источник — сток, и будем искать функцию $\Phi$ при выполнении этого условия. Докажем теперь, что $u$ — функция чисто мнимая, т. е. для любой действительной функции $\varphi(x, y)\in\mathscr{S}(R^2)$ (см. [9], с. 124), $(u, \varphi)$ — чисто мнимое число. Действительно,

$$(u, \varphi)=(F_x[\Phi], \varphi)=(\Phi, F_\xi[\varphi])=$$

$$=\int\limits_{R^2}\Phi(x, y)\left\{\int\varphi(\xi, y)\exp(i\xi x)d\xi\right\}dxdy=$$

$$=\int\limits_{R^2}\Phi\left\{\int\varphi(\xi, y)\cos(\xi x)d\xi\right\}dxdy+i\int\limits_{R^2}\Phi\left\{\int\varphi(\xi, y)\sin(\xi x)d\xi\right\}dxdy=$$

$$=i\int\limits_{R^2}\Phi(x, y)\left\{\int\varphi(\xi, y)\sin(\xi x)d\xi\right\}dxdy. \tag{1.5}$$

Последнее справедливо ввиду того, что из (1.4) следует, что функция $\Phi(x, y)\int\varphi(\xi, y)\cos(\xi x)d\xi$ нечетна по $x$ при любом $y$ и, следовательно,

$$\int\limits_{R^2}\Phi(x, y)\left\{\int\varphi(\xi, y)\cos(\xi x)d\xi\right\}dx=0.$$

Введя обозначение

$$v=\frac{u}{2iQ\sin(x_0\xi)}, \tag{1.6}$$

имеем из (1.5), что $v$ — действительная функция. Применив к обеим частям (1.2) и (1.2)′ преобразование Фурье по переменной $x$, воспользовавшись формулой а) п. 9 § 7, а также формулами (13), (16) и (19) § 9 монографии [9] и принимая во внимание (1.3) и (1.6) соответственно, имеем

$$P(y)[-|\xi|^2v+v''_{yy}]+P'(y)v'_y=P(y)\delta(y-y_0), \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}-|\xi|^2v+v''_{yy}+\frac{P'(y)}{P(y)}v'_y=\delta(y-y_0),\\ \frac{P(y)}{P'(y)}[-|\xi|^2v+v''_{yy}]+v'_y=\frac{P(y)}{P'(y)}\delta(y-y_0).\end{gathered} \tag{1.7$'$}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$v=v(|\xi|, y), \tag{1.8}$$

так как уравнения (1.7) и (1.7)′ зависят от $|\xi|$. Применяя результат § 10 п. 5 монографии [9], имеем, что функция

$$\mathscr{E}=\theta(y-y_0)Z(|\xi|, y), \tag{1.9}$$

где $Z$ удовлетворяет однородному уравнению

$$Z''_{yy}+\frac{P'(y)}{P(y)}Z'_y-|\xi|^2Z=0 \tag{1.10}$$

и начальным условиям

$$Z(|\xi|, y_0)=0, \quad Z'_y(|\xi|, y_0)=1, \tag{1.11}$$

является решением уравнений (1.7) и (1.7)′. Здесь $\theta$ — функция Хевисайда: $\theta(y-y_0)=1$, $y>y_0$; $\theta(y-y_0)=0$, $y<y_0$ [9, с. 93].

Итак, все сводится к отысканию общего решения уравнения (1.10). Пусть $I$ и $K$ — фундаментальная система решений уравнения (1.10) (см. [10, с. 187]). Тогда общее решение уравнения (1.10) выразится формулой

$$Y=AI+BK. \tag{1.12}$$

Тогда

$$Z=A_1I+B_1K, \tag{1.13}$$

где $A_1$ и $B_1$ — являются решением системы линейных уравнений

$$A_1I(|\xi|, y_0)+B_1K(|\xi|, y_0)=0, \quad A_1\frac{\partial}{\partial y}I(|\xi|, y_0)+B_1\frac{\partial}{\partial y}K(|\xi|, y_0)=1, \tag{1.14}$$

что вытекает из начальных условий (1.11). Так как общее решение линейного уравнения с правой частью (1.7) или (1.7)′ есть сумма частного решения $\mathscr{E}$ (1.9) и общего решения (1.12) однородного уравнения (1.10), то

$$v=\operatorname{Re}\{\mathscr{E}(|\xi|, y)+[AI(|\xi|, y)+BK(|\xi|, y)]\}. \tag{1.15}$$

Причем $A$ и $B$ подберем таким образом, чтобы $|\xi|^2v$, а значит, и $|\xi|u$ были бы абсолютно интегрируемы по $\xi$ для всех $y\neq y_0$. Применяя обратное преобразование Фурье $F_\xi^{-1}$, имеем

$$\Phi=F_\xi^{-1}[u(\xi, y)]=\frac{1}{2\pi}F_\xi[u(-\xi, y)],$$

[9, с. 135]. По определению преобразования Фурье для абсолютно интегрируемых функций [9, с. 134] получаем

$$\Phi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(-\xi, y)\exp(i\xi x)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi, y)\exp(-i\xi x)d\xi. \tag{1.16}$$

$A$ и $B$ будем подбирать зависящими от $|\xi|$. В этом случае функция $v$ — четна по $\xi$, так как зависит лишь от $|\xi|$. В этом случае формула (1.16) допускает значительное упрощение, а именно

$$\Phi(x, y)=\frac{2Q}{\pi}\int_0^{\infty}v(|\xi|, y)\sin(x_0\xi)\sin(x\xi)d\xi, \tag{1.17}$$

здесь мы воспользовались формулой (1.6) и тем, что функция $v(|\xi|, y)\sin(x_0\xi)\cos(x\xi)$ нечетная по $\xi$, а $v(|\xi|, y)\sin(x_0\xi)\sin(x\xi)$ четная по $\xi$.

Последняя формула показывает, что нашим методом ищется действительное решение уравнения (1.2) или (1.2)′, что очень важно, так как потенциал скорости не может быть комплекснозначной функцией.

## § 2. ПОЛУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ

В этом параграфе дадим метод отыскания общего решения уравнения (1.10) для достаточно широкого класса функций $P(y)$.

Приведем результат, которым мы будем пользоваться в этом параграфе. Рассмотрим уравнение

$$Y''-\frac{f'}{f}Y'+\left[\frac{3}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{f''}{f}-\frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{g'''}{g'}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\left(\frac{g'}{g}\right)^2+(g')^2\Bigg]Y=0, \tag{2.1}$$

(см. [11], с. 384, формула 2.83). Тогда

$$Y=\sqrt{\frac{fg}{g'}}\,Z_\nu(g), \tag{2.2}$$

где $Z_\nu$ — цилиндрическая функция $\nu$-го порядка. Положим

$$f=C_1/P,\quad g=ih;\quad C_1=\text{const}. \tag{2.3}$$

Тогда $f'/f=-P'/P$ и $f''/f=2(P'/P)^2-P''/P$. Отсюда имеем результат. Если $Y$ удовлетворяет уравнению

$$Y''+\frac{P'}{P}Y'+\Bigg[\frac{1}{2}\frac{P''}{P}-\frac{1}{4}\left(\frac{P'}{P}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{h'''}{h'}-\frac{3}{4}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\left(\frac{h'}{h}\right)^2-(h')^2\Bigg]Y=0, \tag{2.4}$$

то

$$Y=\sqrt{\frac{C_1h}{Ph'}}\,Z_\nu(ih). \tag{2.5}$$

Положим теперь

$$\frac{1}{2}\frac{P''}{P}-\frac{1}{4}\left(\frac{P'}{P}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{h'''}{h'}-\frac{3}{4}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\left(\frac{h'}{h}\right)^2-(h')^2=-|\xi|^2. \tag{2.6}$$

Тогда уравнение (2.4) переходит в уравнение

$$Y''+\frac{P'}{P}Y'-|\xi|^2Y=0, \tag{2.7}$$

которое совпадает с уравнением (1.10), вещественное общее решение $X(y)$ уравнения (2.7) выразится

$$X(y)=\operatorname{Re}\{Y(y)\}=\operatorname{Re}\left\{\sqrt{\frac{C_1h}{Ph'}}\,Z_\nu(ih)\right\}. \tag{2.8}$$

Преобразуем уравнение (2.6), введя обозначение

$$P=\omega^2. \tag{2.9}$$

Тогда $P'=2\omega\omega'$, $P''=2(\omega\omega''+(\omega')^2)$ и $\frac{1}{2}\frac{P''}{P}-\frac{1}{4}\left(\frac{P'}{P}\right)^2=\frac{\omega''}{\omega}$. Подставляя последнее в (2.6), имеем

$$\omega''+\left[\frac{1}{2}\frac{h'''}{h'}-\frac{3}{4}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\left(\frac{h'}{h}\right)^2-(h')^2+|\xi|^2\right]\omega=0. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.7) назовем основным уравнением, а уравнение (2.10) — уравнением разрешимости. Для того чтобы найти общее решение (1.10) при произвольном $P(y)$, нужно найти $h$ из уравнения (2.10), а затем найти $X(y)$ по формуле (2.8). Однако найти $h$ из (2.10) при произвольном $P(y)$ или, что то же самое, $\omega(y)$ невозможно.

Наш метод заключается в следующем. Взяв какую-нибудь конкретную функцию $h$, получаем из (2.10) вполне конкретное линейное одно-

родное уравнение второго порядка относительно $\omega(y)$. Если мы сможем найти общее решение этого полученного уравнения, то по формуле (2.9) найдем $P(y)$, а по (2.8) — искомое общее решение (1.10).

## § 3. СТРУКТУРА ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

В этом параграфе зададим некоторую структуру общего решения уравнения (2.7), а затем определим структуру частного решения $\mathscr{E}$ (1.9), отыскав $A_1$ и $B_1$, и структуру $Y$ (1.12), отыскав $A$ и $B$.

Положим в (1.12) и (1.13)

$$I=\sqrt{\frac{C_1h}{Ph'}}\,I_\nu(h),\quad K=\sqrt{\frac{C_1h}{Ph'}}\,K_\nu(h). \tag{3.1}$$

Здесь $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — известные функции Бесселя [12, с. 32—35]. Тогда из (2.5) имеем

$$Z_\nu(ih)=AI_\nu(h)+BK_\nu(h). \tag{3.2}$$

Дифференцируя (2.5) по $y$, имеем

$$Y'_y=\sqrt{\frac{C_1h'h}{P}}\left(\frac{P(h')^2-P'hh'-Phh''}{2Ph(h')^2}Z_\nu(ih)+iZ'_\nu(ih)\right). \tag{3.3}$$

Дифференцируя (3.2) по $h$, имеем $iZ'_\nu(ih)=AI'_\nu(h)+BK'_\nu(h)$. Пользуясь (1.12), (1.13), (3.3) и последним, полагая

$$Y=Z(|\xi|,y), \tag{3.4}$$

получаем

$$Z=\sqrt{\frac{C_1h}{Ph'}}\,(A_1I_\nu(h)+B_1K_\nu(h)), \tag{3.5}$$

$$Z'_y=\sqrt{\frac{C_1hh'}{P}}\left(\frac{P(h')^2-Phh'-Phh''}{2Ph(h')^2}[A_1I_\nu(h)+B_1K_\nu(h)]+\right.$$
$$\left.+A_1I'_\nu(h)+B_1K'_\nu(h)\right). \tag{3.6}$$

Полагая в (3.5) и (3.6) $y=y_0$ и предполагая, что

$$h|_{y=y_0}\neq 0, \tag{3.7}$$

это всегда можно осуществить прибавив к $h$ константу, а также

$$h'|_{y=y_0}\neq 0, \tag{3.8}$$

получаем из (1.11) и (1.14) линейную систему для определения $A_1$ и $B_1$:

$$\begin{cases} A_1I_\nu(h)+B_1K_\nu(h)|_{y=y_0}=0,\\ A_1I'_\nu(h)+B_1K'_\nu(h)|_{y=y_0}=\left.\sqrt{\dfrac{P}{C_1hh'}}\right|_{y=y_0}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Пользуясь тем, что $K_\nu I'_\nu-K'_\nu I_\nu=1/h$ [12, с. 38], находим определитель системы (3.9):

$$\Delta=I_\nu(h)K'_\nu(h)-K_\nu(h)I'_\nu(h)\,|_{y=y_0}=-1/h|_{y=y_0}.$$

Тогда, решая систему (3.9) по правилу Крамера, имеем

$$A_1=\sqrt{\frac{Ph}{C_1h'}}\,K_\nu(h)\,|_{y=y_0},\quad B_1=-\sqrt{\frac{Ph}{C_1h'}}\,I_\nu(h)\,|_{y=y_0}. \tag{3.10}$$

Поскольку $h$ — решение уравнения (2.10), то

$$h=h(y,|\xi|),\quad h'=\frac{\partial}{\partial y}h(y,|\xi|). \tag{3.11}$$

Решение задачи (1.10), (1.11) получим, подставив в формулу (1.13) формулы (3.1) и (3.10):

$$Z=\sqrt{\frac{P(y_0)h(y_0,\ |\xi|)h(y,\ |\xi|)}{P(y)h'(y_0,\ |\xi|)h'(y,\ |\xi|)}}\,[K_\nu(h(y_0,\ |\xi|))I_\nu(h(y,\ |\xi|))-$$
$$-I_\nu(h(y_0,\ |\xi|))K_\nu(h(y,\ |\xi|))]. \qquad (3.12)$$

Частное решение (1.7), (1.7)′ найдем по формуле (1.9)

$$\mathscr{E}=\theta(y-y_0)\sqrt{\frac{P(y_0)h(y_0,\ |\xi|)h(y,\ |\xi|)}{P(y)h'(y_0,\ |\xi|)h'(y,\ |\xi|)}}\,[K_\nu(h(y_0,\ |\xi|))I_\nu(h(y,\ |\xi|))-$$
$$-I_\nu(h(y_0,\ |\xi|))K_\nu(h(y,\ |\xi|))]. \qquad (3.13)$$

Функцию $\mathscr{E}$ нельзя подставить в формулу (1.17) вместо функции $v$, так как $|\xi|^2\mathscr{E}$ не является, вообще говоря, абсолютно интегрируемой по $\xi$.

Далее определим значения параметров $A$ и $B$ (1.12) таким образом, что $|\xi|^2v$ (1.15) будет абсолютно интегрируема по $\xi$. Положим в формулах (3.1)

$$C_1=\frac{P(y_0)h(y_0,\ |\xi|)}{h'(y_0,\ |\xi|)}, \qquad (3.14)$$

тогда

$$I=\sqrt{\frac{P(y_0)h(y_0,\ |\xi|)h(y,\ |\xi|)}{P(y)h'(y_0,\ |\xi|)h'(y,\ |\xi|)}}\,I_\nu(h(y,\ |\xi|)),$$

$$K=\sqrt{\frac{P(y_0)h(y_0,\ |\xi|)h(y,\ |\xi|)}{P(y)h'(y_0,\ |\xi|)h'(y,\ |\xi|)}}\,K_\nu(h(y,\ |\xi|)). \qquad (3.15)$$

Положим теперь

$$A=-K_\nu(h(y_0,\ |\xi|)),\quad B=\frac{1}{\pi}\exp\left\{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}K_\nu(h(y_0,\ |\xi|)). \qquad (3.16)$$

Подставив (3.13), (3.15) и (3.16) в (1.15), будем иметь

$$v=-\operatorname{Re}\left\{\sqrt{\frac{P(y_0)h(y_0,\ |\xi|)h(y,\ |\xi|)}{P(y)h'(y_0,\ |\xi|)h'(y,\ |\xi|)}}\left\{\theta(y_0-\right.\right.$$
$$-y)K_\nu(h(y_0,\ |\xi|))I_\nu(h(y,\ |\xi|))+\theta(y-y_0)I_\nu(h(y_0,\ |\xi|))K_\nu(h(y,\ |\xi|))-$$
$$\left.\left.-\frac{\exp\left[i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\pi}K_\nu(h(y_0,\ |\xi|))K_\nu(h(y,\ |\xi|))\right\}\right\}. \qquad (3.17)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\theta(y-y_0)-1=-\theta(y_0-y)$. Для того чтобы установить абсолютную интегрируемость функции $|\xi|^2v$ по $\xi$, напишем асимптотическое разложение функции $v$. Из асимптотического разложения функции $K_\nu(z)$ [12, с. 76, 83, 85] следует, что

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\{1+\alpha(z)\},\quad -\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}. \qquad (3.18)$$

Здесь $\alpha(z)\to 0$ при $z\to\infty$. Из формулы (56) [12, с. 79, 85] следует, что

$$I_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\exp(z)\{1+\beta(z)\}+$$
$$+\frac{\exp\left[i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\exp(-z)}{\sqrt{2\pi z}}\{1+\alpha(z)\}, \qquad (3.19)$$

здесь $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$, а

$$\beta(z)=-\frac{4\nu^2-1^2}{1!8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2}-\ldots \qquad (3.19)'$$

$$\alpha(z)=\frac{4\nu^2-1^2}{1!8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2}+\ldots+R_s. \qquad (3.19)''$$

Подставив (3.18) и (3.19) в (3.17) и упростив выражение, получим, что асимптотическое разложение $v$ имеет вид

$$v=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\sqrt{\frac{P(y_0)}{P(y)\,h'(y_0,\ |\xi|)\,h'(y,\ |\xi|)}}\{\theta(y_0-y)[1+\right.$$
$$+\alpha(h(y_0,\ |\xi|))][1+\beta(h(y,\ |\xi|))]\exp(-[h(y_0,\ |\xi|)-h(y,\ |\xi|)])+$$
$$+\theta(y-y_0)[1+\beta(h(y_0,\ |\xi|))][1+\alpha(h,\ (y,\ |\xi|))]\times$$
$$\left.\times\exp(-[h(y,\ |\xi|)-h(y_0,\ |\xi|)])\}\right\}. \qquad (3.20)$$

Обращаясь к (3.20) при всех $h$, которые будем рассматривать, каждый раз будем устанавливать абсолютную интегрируемость $|\xi|^2 v$ по $\xi$.

## § 4. РЕШЕНИЯ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ СТЕПЕННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ

В этом параграфе мы исследуем решения (1.2) при (1.1) или (1.2)′ при (1.1)′ для таких $P(y)$, которые получаются из (2.10) при (2.9), если положить

$$h(y,\ |\xi|)=C_2 y. \qquad (4.1)$$

Тогда при $y_0\neq 0$ $h$ удовлетворяет условиям (3.7) и (3.8). Принимая во внимание (3.11) и подставляя (4.1) в (2.10), имеем

$$y^2\omega''+\left[(|\xi|^2-C_2^2)y^2+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\right]\omega=0. \qquad (4.2)$$

Пользуясь результатом [11, с. 401], формулой (1б) при $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ и

$$c=\sqrt{|\xi|^2-c_2^2}, \qquad (4.3)$$

а также формулой (2.9), получаем

$$P(y)=\begin{cases} yZ_\nu^2(cy), & c\neq 0,\\ (D_1 y^{\frac{1}{2}-\nu}+D_2 y^{\frac{1}{2}+\nu})^2, & c=0,\ \nu\neq 0,\\ y(D_1+D_2\ln y)^2, & c=0,\ \nu=0.\end{cases} \qquad (4.4)$$

Формула (4.1) при условии (4.3) имеет вид

$$h(y,\ |\xi|)=\sqrt{|\xi|^2-c^2}\,y. \qquad (4.1)'$$

Разберем каждый из случаев (4.4) в отдельности. Пусть $P(y)=y(D_1+D_2\ln y)^2$, $P(y)$ удовлетворяет (1.1) лишь при $D_2=0$.

Итак, имеем следующий результат. Решение (1.2) при

$$P(y)=D_1^2 y \qquad (4.5)$$

дается формулой (1.17), где $v$ имеет вид (3.17) при (4.5), $\nu=0$ и

$$h(y,\ |\xi|)=|\xi|y. \qquad (4.6)$$

Пусть теперь

$$P(y) = (D_1 y^{\frac{1}{2}-\nu} + D_2 y^{\frac{1}{2}+\nu})^2. \tag{4.7}$$

Если $\nu$, $D_1$, $D_2$ таковы, что

$$P(y)/P'(y) = (y(D_1 + D_2 y^{2\nu}))/\left(2\left(D_1\left(\frac{1}{2}-\nu\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + D_2\left(\frac{1}{2}+\nu\right) y^{2\nu}\right)\right) \in \theta_M, \tag{4.4$'$}$$

то имеем следующий результат. Решение второго уравнения (1.2)$'$ при (4.7) дается формулой (1.17), где $v$ имеет вид (3.17) при (4.7) и (4.6). Например, при $D_1=0$ условие (4.4)$'$ выполнено при любом действительном $\nu$. Введя обозначение

$$\nu = (n-1)/2, \quad \forall n, \tag{4.8}$$

получаем, что для

$$P = D^2 y^n, \quad \forall n, \tag{4.7$'$}$$

решение второго уравнения (1.2)$'$ при (4.7)$'$ дается формулой (1.17), где $v$ имеет вид (3.17) при (4.6), (4.7)$'$ и (4.8), т. е.

$$v = -\operatorname{Re}\left\{\sqrt{\frac{y_0^{n+1}}{y^{n-1}}}\left\{\theta(y_0-y) K_{\frac{n-1}{2}}(|\xi| y_0) I_{\frac{n-1}{2}}(|\xi| y) + \right.\right.$$

$$+ \theta(y-y_0) I_{\frac{n-1}{2}}(|\xi| y_0) K_{\frac{n-1}{2}}(|\xi| y) -$$

$$\left.\left. - \frac{\exp\left(\frac{i\pi n}{2}\right)}{\pi} K_{\frac{n-1}{2}}(|\xi| y_0) K_{\frac{n-1}{2}}(|\xi| y)\right\}\right\}. \tag{4.9}$$

Пусть теперь в (4.9) $n=0$, тогда

$$P = D^2. \tag{4.7$''$}$$

Из (4.9), пользуясь формулами 4) и 6) п. 7 [12, с. 42], имеем

$$v = -\frac{1}{2|\xi|}\{\theta(y_0-y)\exp(-|\xi|(y_0-y)) + \theta(y-y_0)\exp(-|\xi|(y-y_0))\}. \tag{4.10}$$

Тогда по формуле (1.17) имеем

$$\Phi(x, y) = -\frac{Q}{\pi}\left\{\theta(y_0-y)\int_0^\infty \frac{\exp(-|\xi|(y_0-y))\sin(x_0\xi)\sin(x\xi)}{\xi} d\xi + \right.$$

$$\left. + \theta(y-y_0)\int_0^\infty \frac{\exp(-|\xi|(y-y_0))\sin(x_0\xi)\sin(x\xi)}{\xi} d\xi\right\} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}. \tag{4.11}$$

Здесь мы воспользовались формулой 3.947 [13, с. 550] и тем, что $\theta(y_0-y)+\theta(y-y_0)=1$. Это есть широко известная формула, описывающая течение пары источник — сток в случае постоянного коэффициента проницаемости. Пусть теперь в (4.9) $n=2$, тогда

$$P = D^2 y^2. \tag{4.7$'''$}$$

Из (4.9), пользуясь формулами 3) и 5) п. 7 [12, с. 42], имеем

$$v=-\frac{y_0}{2|\xi|y}\{\theta(y_0-y)\exp(-|\xi|(y_0-y))+\theta(y-y_0)\exp(-|\xi|(y-y_0))\}.$$

Это отличается от (4.10) лишь множителем $y_0/y$. Поэтому из (4.10) и (4.11) имеем

$$\Phi(x,\ y)=\frac{Qy_0}{4\pi y}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}. \tag{4.12}$$

Это также известная формула, описывающая течение пары источник — сток в случае (4.7)'''.

Отметим, что формула (1.17) при (4.9) является обобщением известных результатов [3, 6, 7, 8].

Сделаем замечание, что в случаях, когда $P(0)=0$, для получения решения уравнения (1.2) или уравнений (1.2)' при условии неперетекания (3) необходимо в качестве основного решения взять

$$\Phi(x,\ y)+\Phi^*(x,\ y), \tag{4.13}$$

где $\Phi^*(x,\ y)$ получается из $\Phi(x,\ y)$ заменой $y_0$ на $-y_0$. Это очевидное следствие из принципа симметрии.

Разберем третий, последний случай (4.4) $P(y)=yZ_\nu^2(cy)$. Введем обозначение

$$\nu=m. \tag{4.14}$$

Имеем следующий результат. Пусть

$$P(y)=yZ_m^2(cy). \tag{4.15}$$

Тогда решение (1.2), если (4.15) удовлетворяет (1.1), или решение одного из уравнений (1.2)', если (4.15) удовлетворяет соответствующему из условий (1.1)', дается формулой (1.17), где $v$ имеет вид (3.17) при (4.1), (4.14) и (4.15), т. е.

$$v=-\operatorname{Re}\left\{\frac{y_0Z_m(cy_0)}{Z_m(cy)}\left\{\theta(y_0-y)K_m(\sqrt{|\xi|^2-c^2}y_0)I_m(\sqrt{|\xi|^2-c^2}y)+\right.\right.$$

$$+\theta(y-y_0)I_m(\sqrt{|\xi|^2-c^2}y_0)K_m(\sqrt{|\xi|^2-c^2}y)-\frac{\exp\left[i\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\pi}\times$$

$$\left.\left.\times K_m(\sqrt{|\xi|^2-c^2}y_0)K_m(\sqrt{|\xi|^2-c^2}y)\right\}\right\}. \tag{4.16}$$

Положим в последней формуле $m=\frac{1}{2}$, $c=\mu i$. Имеем $Z_{\frac{1}{2}}(cy)=$ $=\frac{1}{\sqrt{y}}(D_1\exp(-\mu y)+D_2\exp(\mu y))$, (см. [12, с. 42]). Из (4.15) получаем

$$P(y)=(D_1\exp(-\mu y)+D_2\exp(\mu y))^2. \tag{4.15'}$$

Заметим, что $P(y)$ не удовлетворяет (1.1), однако удовлетворяет (1.1)'. Отметим, что случаи, исследованные ранее: $P=\exp(2\mu y)$, $\operatorname{sh}^2(\mu y)$, $\operatorname{ch}^2(\mu y)$, являются частными случаями формулы (4.15)'. Подставляя в (4.16) $c=\mu i$ и $m=1/2$ и применяя формулы 3) и 5) п. 7 [12, с. 42], имеем

$$v=-\frac{(D_1\exp(-\mu y_0)+D_2\exp(\mu y_0))}{2\sqrt{|\xi|^2+\mu^2}(D_1\exp(-\mu y)+D_2\exp(\mu y))}\times$$

$$\times\{\theta(y_0-y)\exp[-\sqrt{|\xi|^2+\mu^2}(y_0-y)]+\theta(y-$$

$$-y_0)\exp[-\sqrt{|\xi|^2+\mu^2}(y-y_0)]\}. \tag{4.17}$$

Далее, по формуле (1.17) имеем

$$\Phi(x,\ y) = -\frac{Q\,(D_1 \exp(-\mu y_0) + D_2 \exp(\mu y_0))}{\pi\,(D_1 \exp(-\mu y) + D_2 \exp(\mu y))} \times$$

$$\times \left\{ \theta(y_0 - y) \int_0^\infty \frac{\exp[-(y_0 - y)\sqrt{|\xi|^2 + \mu^2}]\sin(x_0\xi)\sin(x\xi)\,d\xi}{\sqrt{|\xi|^2 + \mu^2}} + \right.$$

$$\left. + \theta(y - y_0) \int_0^\infty \frac{\exp[-(y - y_0)\sqrt{|\xi|^2 + \mu^2}]\sin(x_0\xi)\sin(x\xi)\,d\xi}{\sqrt{|\xi|^2 + \mu^2}} \right\}. \quad (4.18)$$

Введем обозначение

$$G(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\exp[-\alpha\sqrt{\xi^2 + \mu^2}]\cos(b\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \mu^2}}, \quad (4.19)$$

тогда $G'(\alpha) = -\int_0^\infty \exp[-\alpha\sqrt{\xi^2+\mu^2}]\cos(b\xi)\,d\xi$. Пользуясь формулой 3.914 [13, с. 496], имеем $G'(\alpha) = -\frac{\alpha\mu}{\sqrt{\alpha^2+b^2}} K_1(\mu\sqrt{\alpha^2+b^2})$, тогда

$$G(\alpha) = -\int K_1(\mu\sqrt{b^2 + \alpha^2})\,\frac{\mu\alpha}{\sqrt{b^2 + \alpha^2}}\,d\alpha. \quad (4.20)$$

Сделав замену переменных $\mu\sqrt{b^2+\alpha^2} = \eta$, имеем

$$\int K_1(\mu\sqrt{b^2 + \alpha^2})\,\frac{\mu\alpha}{\sqrt{b^2 + \alpha^2}} = \int K_1(\eta)\,d\eta.$$

Пользуясь формулой $K_0' = -K_1$ [12, с. 35, формула (19)], имеем $\int K_1(\eta)\,d\eta = -K_0(\eta) + \text{const}$. Следовательно,

$$\int K_1(\mu\sqrt{b^2 + \alpha^2})\,\frac{\mu\alpha\,d\alpha}{\sqrt{b^2 + \alpha^2}} = -K_0(\mu\sqrt{b^2 + \alpha^2}) + \text{const}.$$

Отсюда, используя (4.20), имеем

$$G(\alpha) = K_0(\mu\sqrt{b^2+\alpha^2}) + \text{const}. \quad (4.21)$$

Применяя формулу $\sin(x_0\xi)\sin(x\xi) = \frac{1}{2}[\cos(x-x_0)\xi - \cos(x+x_0)\xi]$ к (4.18) и используя (4.21), имеем

$$\Phi(x,\ y) = -\frac{Q\,(D_1 \exp(-\mu y_0) + D_2 \exp(\mu y_0))}{2\pi(D_1 \exp(-\mu y_0) + D_2 \exp(\mu y))} \times$$

$$\times \{K_0(\mu\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) - K_0(\mu\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})\}. \quad (4.22)$$

Если в (4.22) положить $D_1 = 0$, то будем иметь

$$\Phi(x,\ y) = -\frac{Q}{2\pi}\exp[\mu(y_0 - y)]\{K_0(\mu\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) -$$

$$-K_0(\mu\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})\}$$

при $P(y) = D_2^2 \exp(2\mu y)$, что получается из формулы (4.15)′. Это пол-

ностью совпадает с формулой (7.9.21) при (7.9.5) (см. [1], с. 198, 195 соответственно). Положив в (4.15)′ и (4.22) $D_1=-D_2$, получим результат подобного характера для $P=D_2^2\operatorname{sh}^2(\mu y)$, а положив $D_1=D_2$,— для $P=D_2^2\operatorname{ch}^2(\mu y)$.

Замечание. Аналогично можно получить решение нашей задачи при $P=(D_1\sin(\mu y)+D_2\cos(\mu y))^2$.

## § 5. РЕШЕНИЯ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ РАЗРЕШИМОСТИ

В этом параграфе мы исследуем решения (1.2) при (1.1) или (1.2)′ при (1.1)′ для таких $P(y)$, которые получаются из (2.10) при (2.9), если положить

$$h(y,\ |\xi|)=C_3\exp(\gamma y),\quad \gamma>0. \tag{5.1}$$

Тогда $h$ удовлетворяет условиям (3.7) и (3.8). Принимая во внимание (3.11) и подставляя (5.1) в (2.10), имеем

$$\omega''+[|\xi|^2-\nu^2\gamma^2-\gamma^2C_3^2\exp(2\gamma y)]\omega=0. \tag{5.2}$$

Положим теперь в формулах (2.4) и (2.5) $P=1$, $\nu=\nu_1$, $h=\exp(\gamma y)$. Имеем

$$Y''+[-\nu_1^2\gamma^2-b^2\gamma^2\exp(2\gamma y)]Y=0, \tag{5.3}$$

$$Y=\sqrt{\frac{C_1}{\gamma}}\,Z_{\nu_1}(ib\exp(\gamma y)). \tag{5.4}$$

Для того чтобы (5.2) совпадало с (5.3), достаточно чтобы $b=C_3$ и

$$|\xi|^2-\nu^2\gamma^2=-\nu_1^2\gamma^2. \tag{5.5}$$

Выражая из последнего равенства $\nu_1$ и подставляя в формулу (5.4), находим, что решение уравнения (5.2) выразится формулой

$$\omega=\sqrt{\frac{C_1}{\gamma}}\,Z_{\frac{\pm\sqrt{\nu^2\gamma^2-|\xi|^2}}{\gamma}}(iC_3\exp(\gamma y)). \tag{5.6}$$

Разрешая равенство (5.5) относительно $\gamma$ и подставляя в (5.1), имеем

$$h(y,\ |\xi|)=C_3\exp\frac{|\xi|\,y}{\sqrt{\nu^2-\nu_1^2}}. \tag{5.7}$$

Положив в формуле (5.6) $C_1=\gamma$ и обращаясь к (2.9), получаем следующий результат. Решение (1.2) или (1.2)′ при

$$P(y)=Z^2_{\nu_1}(iC_3\exp(\gamma y)), \tag{5.8}$$

если в качестве $Z_{\nu_1}$ подобрана такая функция Бесселя, чтобы $P(y)$ удовлетворяла условию (1.1) или (1.1)′, дается формулой (1.17), где $v$ имеет вид (1.15) при (5.5) и (5.8).

В заключение отметим, что список конкретных результатов далеко не полон. Конкретные результаты мы привели в качестве примеров. Они, с одной стороны, являются следствиями основного результата работы, а с другой стороны — достаточно хорошо его иллюстрируют. Можно брать различные функции $h$ и получать для них результаты подобного характера, если суметь проинтегрировать уравнение разрешимости (2.10).

## Литература

1. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред.— М.: Высшая школа, 1972.
2. Голубева О. В.— Уч. зап. МОПИ, 1955, т. 33, вып. 3.
3. Быстров К. Н.— Уч. зап. МОПИ, 1956, т. 43, вып. 3.
4. Голубева О. В.— ПММ, 1950, т. 14, вып. 3.
5. Голубева О. В. Гидромеханика, сб. трудов.— М., 1975, вып. 4.
6. Белов В. А.— Уч. зап. МОПИ, 1968, т. 200, вып. 7.
7. Гладышев Ю. А.— Уч. зап. МОПИ, 1964, т. 142, вып. 5.
8. Белов В. А. Гидродинамика. Московское об-во испытателей природы.— М., 1970.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1967
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.
12. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике.— М.: ИЛ, 1949.
13. Грандштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.

*Московский физико-технический институт*

*Поступила в редакцию 19 ноября 1979 г.*