В. С. Серов, Об абсолютной сходимости рядов Фурье в обобщенных классах Никольского, *Дифференц. уравнения*, 1978, том 14, номер 3, 499–503

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МАРТ 1978 г., ТОМ XIV, № 3

УДК 517.946

В. С. СЕРОВ

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ В ОБОБЩЕННЫХ КЛАССАХ НИКОЛЬСКОГО

В N-мерной области G рассмотрим дифференциальный эллиптический оператор $A(x, D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$ порядка m с коэффициентами $a_\alpha(x)\in C^\infty(G)$. Предположим, что $A(x, D)$ имеет самосопряженное положительно определенное расширение $\hat{A}$, которое к тому же имеет полную ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ собственных функций в $L_2(G)$. Тогда каждой функции f из $L_2(G)$ можно сопоставить ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n\}$

$$\sum_{n=1}^\infty f_n\cdot\varphi_n(x), \tag{1}$$

где $f_n=(f, \varphi_n)_{L_2(G)}$, а ряд (1) суммируется по возрастанию собственных значений.

В данной работе рассматривается абсолютная сходимость рядов (1).

В работе [1] Я. Петре доказана абсолютная сходимость ряда (1) для функций из класса, эквивалентного $B_{2,1}^{\frac{N}{2}}(G)$. В работе [2] автором настоящей заметки было доказано, что в классах Бесова эта теорема не улучшаема. А именно для каждой точки x_0 из области G была построена функция с компактным носителем, содержащимся в области G, которая при любом $\theta>1$ принадлежит классу $B_{2,\theta}^{N/2}(G)$ и у которой ряд (1) расходится абсолютно в точке x_0.

Таким образом, в классе Никольского $H_2^{N/2}(G)$ нет абсолютной сходимости рядов Фурье. Но известно, что для любого $\varepsilon>0$ ряд Фурье по собственным функциям эллиптического оператора любой функции из $H_2^{\frac{N}{2}+\varepsilon}(G)$ сходится абсолютно. Более подробные сведения об абсолютной сходимости можно найти в обзорной статье [3].

В настоящей работе будут рассматриваться обобщенные классы Никольского $H_2^{\frac{N}{2}, v}(G)$, где слабоколеблющаяся функция v принадлежит некоторому классу V. В частности, классу V принадлежат все функции, которые при больших t равны $(\ln t)^{\beta_1}$, $(\ln\ln t)^{\beta_2}$ и т. д., где β_j — любые вещественные числа, а также любое их конечное произведение. Заметим, что все эти функции v таковы, что $1/v$ также принадлежат классу V. Определение классов $H_p^{\alpha, v}$ и V можно найти в работе [4].

Символом $\overset{\circ}{H}{}_p^{\alpha, v}(G)$ обозначим класс функций, полученный замыканием в норме пространства $H_p^{\alpha, v}$ множества функций $C_0^\infty(G)$.

В данной работе будут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in \overset{\circ}{H}{}_2^{\frac{N}{2}, v}(G)$, *функция* $1/v \in V$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n} < \infty$. *Тогда ряд (1) для функции f сходится абсолютно в каждой точке области G и равномерно абсолютно на каждом компакте K из области G.*

О неулучшаемости теоремы 1 говорит следующая

Теорема 2. *Пусть функция* $v \in V$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n} = +\infty$. *Тогда для каждой точки x_0 из области G найдется функция с компактным носителем, содержащимся в области G, которая принадлежит классу $H_2^{N/2, v}(G)$ и у которой ряд (1) расходится абсолютно в точке x_0.*

Прежде чем доказывать теоремы 1 и 2, введем некоторые объекты, с которыми нам придется работать.

Легко показать, что в дискретном случае спектральная функция $\theta(x, y, \lambda)$ оператора $\hat{A}$ будет иметь следующий вид:

$$\theta(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \varphi_n(x) \cdot \overline{\varphi_n(y)}. \tag{2}$$

Поэтому спектральное разложение $E_\lambda f$ будет представлять собой частичные суммы ряда Фурье (1), так как

$$E_\lambda f = \int_G \theta(x, y, \lambda) f(y)\, dy = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n \cdot \varphi_n(x). \tag{3}$$

Нам понадобится норма в $L_2(G)$ разности $E_{2\lambda} f - E_\lambda f$, которая в нашем случае будет равна величине

$$\| E_{2\lambda} f - E_\lambda f \|_{L_2(G)} = \Big(\sum_{\lambda \leqslant \lambda_n < 2\lambda} |f_n|^2 \Big)^{1/2}. \tag{4}$$

Кроме того, для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}_2^{\alpha}(G)$ будем пользоваться неравенством, которое доказано в работе Ш. А. Алимова [5]:

$$\| E_{2\lambda} f - E_\lambda f \|_{L_2(G)} \leqslant c \lambda^{-\frac{\alpha}{m}} \| f \|_{H_2^\alpha}. \tag{5}$$

Переходим к доказательству теоремы 1.

Доказательство. В силу основного результата [4] для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}_2^{N/2, v}(G)$ существует функция $g \in \overset{\circ}{H}{}_2^{\frac{N}{2} - m\tau}(G)$ такая, что

$$f - \hat{A}^{-\tau} v(\hat{A}^{1/m}) g \in \Delta(\hat{A}), \tag{6}$$

где $\Delta(\hat{A})$ — множество функций, принадлежащих области определения любой степени оператора $\hat{A}$, а число $\tau > 0$ выбрано таким образом, чтобы $\frac{N}{2} - m\tau > 0$.

Таким образом, из соотношения (6) следует, что для абсолютной сходимости ряда (1) функции f достаточно доказать абсолютную сходимость ряда (1) функции $\hat{A}^{-\tau}v(\hat{A}^{1/m})g$. По спектральной теореме ряд (1) функции $\hat{A}^{-\tau}v(\hat{A}^{1/m})g$ будет иметь следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\tau} v(\lambda_n^{1/m})\, g_n \cdot \varphi_n(x). \tag{7}$$

Для ряда в (7) можно получить следующее формальное неравенство:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\tau} v(\lambda_n^{1/m})\, g_n \cdot \varphi_n(x)\right| \leqslant c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k \leqslant \lambda_n^{\frac{1}{m}} < 2^{k+1}} \lambda_n^{-\tau} v(\lambda_n^{\frac{1}{m}})\, |g_n| \cdot |\varphi_n(x)|. \tag{8}$$

Далее, используя свойства слабоколеблющихся функций, правую часть неравенства (8) можно оценить сверху величиной

$$c \sum_{k=0}^{\infty} [2^{-km\tau} v(2^k) \sum_{2^k \leqslant \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} |g_n| \cdot |\varphi_n(x)|]. \tag{9}$$

Оценивая внутреннюю сумму в (9), по неравенству Гёльдера получим следующую оценку сверху:

$$c \sum_{k=0}^{\infty} \left[2^{-km\tau} v(2^k) \left(\sum_{2^k \leqslant \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} |g_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{2^k \leqslant \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} |\varphi_n(x)|^2 \right)^{1/2}\right]. \tag{10}$$

В работе Л. Гординга [6] для спектральной функции $\theta(x, y, \lambda)$ доказана следующая асимптотическая оценка:

$$\theta(x, x, \lambda) = \lambda^{N/m}(A(x) + o(1)), \tag{11}$$

которая равномерна на каждом компакте K из области G. Учитывая соотношения (2), (4), (5), (11) и тот факт, что функция $g \in \mathring{H}_2^{\frac{N}{2}-m\tau}(G)$, для (10) получим следующую оценку сверху:

$$c \left(\sum_{k=0}^{\infty} v(2^k)\right) \|g\|_{H_2^{\frac{N}{2}-m\tau}}, \tag{12}$$

равномерную на каждом компакте K из G. Из (12) следует, что теорема 1 доказана, так как ряд в (12) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v(n)/n$.

Прежде чем доказывать теорему 2, нам необходимо доказать следующую лемму.

Лемма. *Для любого $a>0$ и для любой точки $x_0 \in G$ существует $\mu_0>0$ такое, что для всех $\mu \geqslant \mu_0$ выполняется следующее неравенство:*

$$\sum_{a\mu \leqslant \lambda_n^{1/m} < 2\mu a} |\varphi_n(x_0)|^2 \geqslant c\mu^N, \tag{13}$$

где положительная постоянная c зависит от a, μ_0 и от точки x_0, но не зависит от μ.

Доказательство. Учитывая соотношение (11), сумму в левой части (13) можно представить в следующем виде:

$$\mu^N a^N [A(x_0)[2^N-1)+o(1)]. \tag{14}$$

Отсюда вытекает, что μ_0 можно выбрать таким образом, чтобы для всех $\mu \geqslant \mu_0$ выполнялось неравенство (13). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим оператор $\hat{A}^{-\frac{N}{m}} v(\hat{A}^{\frac{1}{m}})$. В силу основных результатов работы [7] Ш. А. Алимова и работы [4] можно утверждать, что этот оператор является интегральным с ядром

$$E(x, y)+Q(x, y).$$

При этом функция $E(x, y) \in \overset{\circ}{H}{}_1^{N, v}(G)$ при каждом фиксированном x (или y), а оператор с ядром $Q(x, y)$ переводит $L(B)$ в $\Delta(\hat{A})$, где B — любой шар из области G. О функции $E(x, y)$ можно утверждать, что она с компактным носителем, который содержится в шаре с центром в точке x_0.

На основании теорем вложения можно утверждать, что функция $E(x, y) \in \overset{\circ}{H}{}_2^{\frac{N}{2}, v}(G)$ при каждом фиксированном x. Легко показать, что

$$\sum_{\lambda_n<\lambda} \varphi_n(x_0) \int_{B_0} E(x_0, z)\overline{\varphi_n}(z)\,dz+\sum_{\lambda_n<\lambda} \varphi_n(x_0) \int_{G} Q(x_0, z)\overline{\varphi_n}(z)\,dz=$$

$$=\sum_{\lambda_n<\lambda} \lambda_n^{-N/m} v(\lambda_n^{1/m})\,|\varphi_n(x_0)|^2. \tag{15}$$

Из (15) следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать, что правая часть в равенстве (15) при $\lambda \to +\infty$ стремится к $+\infty$. Поскольку в этом случае для функции $E(x_0, z)$ ряд Фурье будет расходиться абсолютно в точке x_0, то ряд Фурье для функции $Q(x_0, z)$ абсолютно сходится.

Для ряда в правой части равенства (15) можно получить следующую оценку:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-N/m} v(\lambda_n^{1/m})\,|\varphi_n(x_0)|^2 \geqslant c \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-Nk} v(2^k) \sum_{2^k \leqslant \lambda_n^{1/m} < 2^{k+1}} |\varphi_n(x_0)|^2.$$

Отсюда с использованием леммы получается следующая оценка снизу для правой части равенства (15):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-N/m} v(\lambda_n^{1/m})\,|\varphi_n(x_0)|^2 \geqslant c \sum_{k=0}^{\infty} v(2^k), \tag{16}$$

где c — константа, большая 0. Из неравенства (16) следует утверждение теоремы 2, так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v(2^k)$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v(n)/n$.

Замечание 1. Так как члены ряда в правой части равенства (15) являются положительными, то в теореме 2 фактически доказана расходимость ряда Фурье для функции $E(x_0, z)$ в точке x_0.

Замечание 2. Мы предполагали, что расширение $\hat{A} \geqslant cI$ имеет только дискретный спектр и полную ортонормированную систему собственных функций. Все результаты остаются справедливыми и в случае непрерывного спектра, если под соответствующей абсолютной сходимостью понимать сходимость следующего интеграла: $\int\limits_c^\infty |dE_\lambda f|$, где $\{E_\lambda\}$ — разложение единицы, отвечающее самосопряженному расширению оператора A, и если под соответствующей сходимостью или расходимостью ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n}$ понимать сходимость или расходимость соответственно интеграла $\int\limits_c^\infty \frac{v(t)}{t} dt$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Ш. А. Алимову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Peetre J. Absolute convergence of eigen function expansion. Math. Ann., 169 : 2, 1967
2. Серов В. С. Матем. заметки, **19**, № 3, 1976.
3. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Успехи матем. наук, 31:6, 1976.
4. Серов В. С. Дифференц. уравнения, **12**, № 10, 1976.
5. Алимов Ш. А. Матем. сб., 101 (143); № 1 (9), 1976.
6. Гординг Л. Математика, сб. переводов, вып. 3, т. I, 1957.
7. Алимов Ш. А. Дифференц. уравнения, **8**, № 9, 1972.

Поступила в редакцию
14 марта 1977 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова