Б. А. Дуйсенгалиева, А. С. Науразбекова, У. У. Умирбаев, Ручные и дикие автоморфизмы алгебры дифференциальных многочленов ранга 2, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2019, том 22, выпуск 4, 101–114

# Ручные и дикие автоморфизмы алгебры дифференциальных многочленов ранга 2

**Б. А. ДУЙСЕНГАЛИЕВА**
*Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан*
e-mail: bibinur.88@mail.ru

**А. С. НАУРАЗБЕКОВА**
*Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан*
e-mail: altyngul.82@mail.ru

**У. У. УМИРБАЕВ**
*Университет Уэйна, США*
e-mail: umirbaev@math.wayne.edu

УДК 512.5

**Ключевые слова:** алгебра дифференциальных многочленов, ручные и дикие автоморфизмы, свободное произведение.

**Аннотация**

Доказано, что группа ручных автоморфизмов алгебры дифференциальных многочленов $k\{x,y\}$ над полем $k$ характеристики 0 от двух переменных $x$, $y$ с $m$ коммутирующими дифференцированиями $\delta_1,\ldots,\delta_m$ является свободным произведением с объединением. Построен пример дикого автоморфизма алгебры $k\{x,y\}$ в случае $m\geqslant 2$.

**Abstract**

*B. A. Duisengaliyeva, A. S. Naurazbekova, U. U. Umirbaev, Tame and wild automorphisms of differential polynomial algebras of rank* 2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 4, pp. 101—114.

It is proved that the tame automorphism group of a differential polynomial algebra $k\{x,y\}$ over a field $k$ of characteristic 0 in two variables $x$, $y$ with $m$ commuting derivations $\delta_1,\ldots,\delta_m$ is a free product with amalgamation. An example of a wild automorphism of the algebra $k\{x,y\}$ in the case of $m\geqslant 2$ derivations is constructed.

## 1. Введение

Хорошо известно [3, 13, 14, 18], что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x,y]$ и свободной ассоциативной алгебры $k\langle x,y\rangle$ от двух переменных над произвольным полем $k$ являются ручными. Более того [3, 13], группы автоморфизмов алгебр $k[x,y]$ и $k\langle x,y\rangle$ изоморфны, т.е.

$$\operatorname{Aut}_k k[x,y]\cong\operatorname{Aut}_k k\langle x,y\rangle.$$

Известно также, что автоморфизмы двупорождённых свободных алгебр Пуассона над полями нулевой характеристики [20] и автоморфизмы двупорождённых свободных правосимметричных алгебр над произвольными полями [17] являются ручными. П. Кон [11] доказал, что автоморфизмы свободных алгебр Ли конечного ранга являются ручными. Аналог этой теоремы верен для свободных алгебр любого однородного шрайерова многообразия алгебр [19]. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр [1], коммутативных и антикоммутативных алгебр [8], алгебр Ли [7, 26] и супералгебр Ли [4, 10].

Группы автоморфизмов алгебр многочленов [6, 23, 24] и свободных ассоциативных алгебр [5, 25] от трёх переменных над полем нулевой характеристики не могут быть порождены всеми элементарными автоморфизмами, т. е. существуют дикие автоморфизмы. У. У. Умирбаевым было доказано [5, 25], что автоморфизм Аника

$$\delta = (x + z(xz - zy), y + (xz - zy)z, z)$$

свободной ассоциативной алгебры $k\langle x, y, z\rangle$ над полем характеристики 0 является диким.

Основные понятия дифференциальных алгебр можно найти в [15, 16, 22]. Мы будем рассматривать дифференциальные алгебры с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$. Пусть $k$ — дифференциальное поле характеристики 0 и $k\{x, y\}$ — алгебра дифференциальных многочленов над $k$ от двух переменных $x$, $y$. Если $|\Delta| = 0$, то $k\{x, y\}$ становится обычной алгеброй многочленов $k[x, y]$ над полем $k$. В работах В. ван дер Калка [18] и М. Нагаты [21] доказано, что группа $\mathrm{Aut}(k[x, y])$ представляется в виде амальгамированного свободного произведения

$$\mathrm{Aut}(k[x, y]) = A *_C B,$$

где $A$ — подгруппа аффинных автоморфизмов, $B$ — подгруппа треугольных автоморфизмов и $C = A \cap B$.

В настоящей работе доказывается, что группа ручных автоморфизмов алгебры $k\{x, y\}$ допускает аналогичную структуру амальгамированного свободного произведения для любого множества дифференцирований $\Delta$. Кроме того, с использованием этой структуры приводится пример дикого автоморфизма алгебры $k\{x, y\}$ при $|\Delta| \geqslant 2$. Этот пример является аналогом известного автоморфизма Аника [12, с. 398].

Таким образом, автоморфизмы алгебры $k\{x, y\}$ являются ручными при $|\Delta| = 0$ и $k\{x, y\}$ имеет дикие автоморфизмы при $|\Delta| \geqslant 2$. Вопрос о ручных и диких автоморфизмах алгебры $k\{x, y\}$ остаётся открытым при $|\Delta| = 1$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведены необходимые определения и сформулированы некоторые известные утверждения. Раздел 3 посвящён представлению группы ручных автоморфизмов алгебры $k\{x, y\}$ в виде амальгамированного свободного произведения. В разделе 4 доказывается сократимость любого не аффинного ручного автоморфизма алгебры $k\{x, y\}$. В разделе 5 приводится пример дикого автоморфизма.

## 2. Определения и предварительные факты

Пусть $R$ — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Отображение $d\colon R \to R$ называется *дифференцированием*, если для всех $s, t \in R$ выполняются условия

$$d(s+t) = d(s) + d(t),$$
$$d(st) = d(s)t + sd(t)$$

Пусть $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ — основное множество дифференциальных операторов.

Кольцо $R$ называется *дифференциальным кольцом* или *$\Delta$-кольцом*, если $\delta_1, \ldots, \delta_m$ являются коммутирующими дифференцированиями кольца $R$, т. е. $\delta_i\colon R \to R$ — дифференцирования и $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$ для всех $i$, $j$.

Пусть $\Theta$ — свободный коммутативный моноид на множестве дифференциальных операторов $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Элементы

$$\theta = \delta_1^{i_1} \ldots \delta_m^{i_m}$$

моноида $\Theta$ называются *производными операторами*. *Порядком* $\theta$ называется число $|\theta| = i_1 + \ldots + i_m$. Положим также $\gamma(\theta) = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, где $\mathbb{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел.

Пусть $R$ — произвольное дифференциальное кольцо, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество символов. Рассмотрим множество символов

$$X^\Theta = \{x_i^\theta \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ \theta \in \Theta\}$$

и алгебру многочленов $R[X^\Theta]$ на множестве символов $X^\Theta$. Полагая

$$\delta_i(x_j^\theta) = x_j^{\theta\delta_i}$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\theta \in \Theta$, превратим алгебру $R[X^\Theta]$ в дифференциальную алгебру. Дифференциальная алгебра $R[X^\Theta]$ обозначается через $R\{X\}$ и называется *алгеброй дифференциальных многочленов* над $R$ от множества переменных $X$ [15].

Пусть $M$ — свободный коммутативный моноид от множества переменных $x_i^\theta$, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\theta \in \Theta$. Элементы $M$ называются *мономами* алгебры $R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Любой элемент $a \in R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ однозначно записывается в виде

$$a = \sum_{m \in M} r_m m$$

с конечным числом ненулевых $r_m \in R$.

Для любого $x_i^\theta \in X^\Theta$ положим $\alpha(x_i^\theta) = \big(\varepsilon_i, \gamma(\theta)\big) \in \mathbb{Z}_+^{n+m}$, где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — стандартный базис $\mathbb{Z}_+^n$. Если $m = a_1 \ldots a_s \in M$, где $a_1, \ldots, a_s \in X^\Theta$, то положим $\alpha(m) = \alpha(a_1) + \ldots + \alpha(a_s)$. Тогда $\alpha(m)$ является вектором полилинейной степени монома $m$ относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ и дифференциальных операторов $\delta_1, \ldots, \delta_m$. Сумму компонент вектора $\alpha(m)$ назовём *степенью* монома $m$ и обозначим через $\deg(m)$.

Более того, для любого $w \in \mathbb{Z}^{n+m}$ можно определить $w$-степенную функция $\deg_w$ как $\deg_w(m) = w \cdot \alpha(m)$, где $\cdot$ означает обычное скалярное произведение. Ясно, что $\deg_w$ совпадает с $\deg$ если все компоненты $w$ равны 1. Если первые $n$ компонент $w$ равны 1 и остальные равны 0, то $\deg_w$ является общей степенью по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, любое $w \in \mathbb{Z}^{n+m}$ определяет градуировку

$$C = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$$

алгебры $C = R\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $C_i$ является $R$-оболочкой мономов $w$-степени $i$. Каждый ненулевой элемент $c \in C$ однозначно представляется в виде

$$c = c_{i_1} + c_{i_2} + \ldots + c_{i_s}, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_s, \quad 0 \neq c_{i_j} \in C_{i_j}.$$

Элемент $c_{i_s}$ называется *старшей однородной частью* элемента $c$ по отношению к $w$-степени $\deg_w$. Через $\bar{c}$ будем обозначать старшую однородную часть $c$ по отношению к функции степени $\deg$.

Пусть $k$ — произвольное дифференциальное поле характеристики 0 и $B = k\{X\} = k\{x_1, \ldots, x_n\}$ — алгебра дифференциальных многочленов над полем $k$ от множества переменных $X$. Для любых $0 \neq f, g \in B$ имеем

$$\alpha(fg) = \alpha(f) + \alpha(g), \quad \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g), \quad \overline{fg} = \bar{f}\bar{g}.$$

Элемент $f \in B$ называется *дифференциально-алгебраическим* над $k$, если найдётся ненулевой элемент $g \in k\{z\}$, такой что $g(f) = 0$. Иначе $f \in B$ называется *дифференциально-трансцендентным* над $k$. Элементы $f_1, f_2, \ldots, f_s \in B$ называются *дифференциально-алгебраически зависимыми* над $k$, если найдётся ненулевой элемент $g \in k\{z_1, \ldots, z_s\}$, такой что $g(f_1, f_2, \ldots, f_s) = 0$. Если $f_1, f_2, \ldots, f_s$ дифференциально-алгебраически независимы, то гомоморфизм $k\{z_1, \ldots, z_s\} \to k\{f_1, \ldots, f_s\}$, определённый правилом $z_i \mapsto f_i$, является изоморфизмом.

**Лемма 1.** *Любой элемент алгебры $B = k\{x_1, \ldots, x_n\}$, не принадлежащий полю $k$, является дифференциально-трансцендентным над $k$.*

**Доказательство.** Утверждение леммы является несложным следствием известных теорем о дифференциальной степени трансцендентности [15, гл. 2]. Здесь мы предлагаем прямое доказательство с использованием обычной алгебраической зависимости элементов.

Для любых $u, v \in X^\Theta$ положим $u < v$, если $\deg(u) < \deg(v)$ или $\deg(u) = \deg(v)$ и $\alpha(u) < \alpha(v)$ относительно лексикографического порядка в $\mathbb{Z}_+^{n+m}$.

Пусть $0 \neq f \in B$. Пусть $u$ — наибольший элемент из $X^\Theta$, присутствующий в записи $f$. Такой элемент $u$ называется *лидером* $f$ относительно заданного порядка $\leqslant$ на $X^\Theta$ [15, гл. 1]. Легко понять, что лидером элемента $f^\theta$ является $u^\theta$, т. е. $u^\Theta$ является множеством лидеров множества элементов $f^\Theta$.

Положим $W = X^\Theta \setminus u^\Theta$. Тогда множество всех элементов $u^\Theta$ является алгебраически независимым над $k[W]$, так как $u^\Theta$ и $W$ определяют разбиение множества $X^\Theta$, которое алгебраически независимо над $k$.

Отметим, что $f$ является дифференциально-алгебраическим над $k$ тогда и только тогда, когда множество элементов $f^\Theta$ алгебраически зависимо над $k$. Любая алгебраическая зависимость элементов $f^\Theta$ над $k$ ведёт к алгебраической зависимости $u^\Theta$ над $k[W]$, что невозможно. $\square$

Если $f_1, f_2, \ldots, f_r \in B$, то через $k\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ будем обозначать подалгебру $B$, порождённую элементами $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Отметим, что такая запись не означает дифференциально-алгебраическую независимость элементов $f_1, f_2, \ldots, f_r$, т. е. $k\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ не обязательно изоморфна алгебре дифференциальных многочленов. Аналогичная запись часто используется для обозначения подалгебр алгебр многочленов в аффинной алгебраической геометрии. Утверждение следующей леммы верно для любых однородных свободных алгебр (см., например, [9]).

**Лемма 2.** *Пусть* $f_1, f_2, \ldots, f_r \in B$ *и* $u \in k\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$. *Тогда если элементы* $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r$ *дифференциально-алгебраически независимы, то* $\bar{u} \in \in k\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r\}$.

**Доказательство.** Пусть $u = u(z_1, \ldots, z_r) \in k\{z_1, \ldots, z_r\}$, и пусть также $\deg(f_i) = n_i$, где $1 \leqslant i \leqslant r$. Положим $w = (n_1, n_2, \ldots, n_r, 1, \ldots, 1)$ и рассмотрим в алгебре $k\{z_1, \ldots, z_r\}$ функцию степени $\deg_w$. Тогда $u = u' + \tilde{u}$, где $\tilde{u}$ — старшая однородная часть $u$ относительно $\deg_w$ и $\deg_w(u') < \deg_w(\tilde{u})$. Пусть $\deg_w(u) = k$. Заметим, что $f_i = f_i' + \bar{f}_i$ для всех $i$. Тогда

$$u(f_1, \ldots, f_r) = u'(f_1, \ldots, f_r) + \tilde{u}(f_1, \ldots, f_r) = w' + \tilde{u}(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r),$$

где $\deg(w') < k$. Так как $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r$ дифференциально-алгебраически независимы, то $\tilde{u}(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r)$ не равен нулю и имеет степень $k$ по выбору $w$. Следовательно, $\bar{u} = \tilde{u}(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r) \in k\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r\}$. $\square$

**Следствие 1.** *Пусть* $0 \neq f \in B$. *Если* $a \in k\{f\}$, *то* $\bar{a} \in k\{\bar{f}\}$.

**Доказательство.** Результат непосредственно вытекает из лемм 1 и 2. $\square$

# 3. Амальгамированное свободное произведение

Пусть $A = k\{x, y\}$ — алгебра дифференциальных многочленов от двух переменных $x$, $y$, и пусть $\mathrm{Aut}(A)$ — группа автоморфизмов алгебры $A$.

Через $\varphi = (f_1, f_2)$ обозначим автоморфизм алгебры $A$, такой что $\varphi(x) = f_1$, $\varphi(y) = f_2$. Автоморфизмы вида

$$\sigma(1, a, f) = (ax + f(y), y), \quad \sigma(2, a, g) = \big(x, ay + g(x)\big),$$

где $0 \neq a \in k$, $f(y) \in k\{y\}$, $g(x) \in k\{x\}$, называются *элементарными*. Подгруппа $T(A)$ группы $\mathrm{Aut}(A)$, порождённая всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов*. Неручные автоморфизмы называются *дикими*.

Для автоморфизма $\theta = (f_1, f_2) \in \mathrm{Aut}(A)$ определим степень, полагая

$$\deg(\theta) = \deg(f_1) + \deg(f_2).$$

Если

$$\theta = (f_1, f_2), \quad \varphi = (g_1, g_2),$$

то произведение в $\mathrm{Aut}(A)$ определяется следующей формулой:

$$\theta \circ \varphi = \big(g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2)\big).$$

Пусть $\mathrm{Af}_2(A)$ — группа аффинных автоморфизмов алгебры $A$, т. е. группа автоморфизмов вида $(a_1x+b_1y+c_1, a_2x+b_2y+c_2)$, где $a_i, b_i, c_i \in k$, $a_1b_2 \neq a_2b_1$, $\mathrm{Tr}_2(A)$ — группа треугольных автоморфизмов алгебры $A$, т. е. группа автоморфизмов вида $(ax + f(y), by + c)$, где $0 \neq a, b \in k$, $c \in k$, $f(y) \in k\{y\}$, и пусть $C = \mathrm{Af}_2(A) \cap \mathrm{Tr}_2(A)$.

Пусть $G$ — произвольная группа, $G_0$, $G_1$, $G_2$ — подгруппы группы $G$, причём $G_0 = G_1 \cap G_2$. Группа $G$ называется *свободным произведением подгрупп $G_1$ и $G_2$ с объединённой подгруппой* $G_0$ и обозначается $G = G_1 *_{G_0} G_2$, если

a) $G$ порождается подгруппами $G_1$ и $G_2$;
b) определяющие соотношения группы $G$ состоят только из определяющих соотношений подгрупп $G_1$ и $G_2$.

Если $S_1$ — система левых представителей $G_1$ по $G_0$, $S_2$ — система левых представителей $G_2$ по $G_0$, то группа $G$ является свободным произведением подгрупп $G_1$ и $G_2$ с объединённой подгруппой $G_0$ (см., например, [2]) в том и только в том случае, когда каждый $g \in G$ однозначно представляется в виде

$$g = g_1 \ldots g_k c,$$

где $g_i \in S_1 \cup S_2$, $i = 1, \ldots, k$, $g_i$, $g_{i+1}$ одновременно не принадлежат $S_1$ или $S_2$, $c \in G_0$.

Запись $h_i(y)$ в доказательствах следующих нескольких лемм означает, что $h_i(y) \in k\{y\}$ — однородный дифференциальный многочлен степени $i$ по отношению к функции степени $\deg$ от одной переменной $y$. Ясно, что $h_0(y) \in k$.

**Лемма 3.**

a) *Система элементов*

$$A_0 = \{\mathrm{id} = (x, y),\ \gamma = (y, x + ay) \mid a \in k\}$$

*является системой представителей левых смежных классов* $\mathrm{Af}_2(A)$ *по подгруппе* $C$.

b) *Система элементов*

$$B_0 = \{\beta = (x + q(y), y) \mid q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)\}$$

*является системой представителей левых смежных классов* $\mathrm{Tr}_2(A)$ *по подгруппе* $C$.

**Доказательство.** Проверим условие a). Пусть $l \in \mathrm{Af}_2(A)$. Мы должны показать, что для любого $l$ найдутся $\gamma \in A_0$, $\eta \in C$, такие что $l = \gamma \circ \eta$.

Если $l = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$, где $a_2 \neq 0$, то положим

$$\gamma = \left(y, x + \frac{b_2}{a_2}y\right), \quad \eta = \left(\left(b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2}\right)x + a_1y + c_1, a_2y + c_2\right).$$

Тогда $l$ представляется в виде

$$l = \left(y, x + \frac{b_2}{a_2}y\right) \circ \left(\left(b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2}\right)x + a_1y + c_1, a_2y + c_2\right) = \gamma \circ \eta.$$

Если $a_2 = 0$, то $\gamma = \mathrm{id}$, $\eta = l$, т. е. $l = \mathrm{id} \circ l$.

Допустим, что $\gamma_1 = (y, x + a_1y)$, $\gamma_2 = (y, x + a_2y)$ и $\gamma_1C = \gamma_2C$. Тогда

$$\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 = (-a_1x + y, x) \circ (y, x + a_2y) = (x, (-a_1 + a_2)x + y).$$

Отсюда следует, что $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$. Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Теперь проверим условие b). Пусть $\psi = (ax + h(y), by + c) \in \mathrm{Tr}_2(A)$ и $h(y) = h_n(y) + \ldots + h_1(y) + h_0(y)$. Мы должны показать, что для любого $\psi$ найдутся $\beta \in B_0$, $\mu \in C$, такие что $\psi = \beta \circ \mu$. Положим $\beta = (x + q(y), y)$, $\mu = (ax + h_1(y) + h_0(y), by + c)$, где $q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)$. Тогда $\psi$ представляется в виде

$$\psi = \left(x + \frac{1}{a}q(y), y\right) \circ (ax + h_1(y) + h_0(y), by + c) = \beta \circ \mu.$$

Допустим, что $\beta_1 = (x + q(y), y)$, $\beta_2 = \big(x + q^{(1)}(y), y\big)$ и $\beta_1C = \beta_2C$. Тогда имеем

$$\beta_1^{-1} \circ \beta_2 = (x - q(y), y) \circ \big(x + q^{(1)}(y), y\big) = \big(x - q(y) + q^{(1)}(y), y\big).$$

Отсюда следует, что $\beta_1^{-1} \circ \beta_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $q(y) = q^{(1)}(y)$. Следовательно, $\beta_1 = \beta_2$. □

**Лемма 4.** *Пусть $A_0$, $B_0$ — множества, определённые в лемме 3. Тогда любой ручной автоморфизм $\varphi$ алгебры $A$ разлагается в произведение вида*

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, \tag{1}$$

*где $\gamma_i \in A_0$, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k \neq \mathrm{id}$, $\beta_i \in B_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \neq \mathrm{id}$, $\lambda \in C$.*

**Доказательство.** Очевидно, что

$$(ax + h(y), y) = \left(x + \frac{1}{a}q(y), y\right) \circ (ax + h_1(y) + h_0(y), y),$$

где $h(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y) + h_1(y) + h_0(y)$, $q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)$,

$$\big(x, by + h^{(1)}(x)\big) = (y, x) \circ \left(x + \frac{1}{b}q^{(1)}(y), y\right) \circ \big(y, bx + h_1^{(1)}(y) + h_0^{(1)}(y)\big),$$

где $h^{(1)}(y) = h_m^{(1)}(y)+\ldots+h_2^{(1)}(y)+h_1^{(1)}(y)+h_0^{(1)}(y)$, $q^{(1)}(y) = h_m^{(1)}(y)+\ldots+h_2^{(1)}(y)$, т. е. любой элементарный автоморфизм имеет вид

$$l_1 \circ \beta \circ l_2,$$

где $\beta \in B_0$, $l_1, l_2 \in \mathrm{Af}_2(A)$.

Любой ручной автоморфизм $\varphi$ представляется в виде композиции элементарных автоморфизмов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т. е.

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n.$$

Следовательно, имеем

$$\varphi = l_1 \circ \beta_1 \circ l_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}, \tag{2}$$

где $\beta_i \in B_0$, $l_i \in \mathrm{Af}_2(A)$.

Докажем индукцией по $n$, что $\varphi$ представляется в виде произведения (1) с $k \leqslant n$.

Согласно лемме 3 автоморфизм $l_1$ записывается в виде $\gamma_1 \circ \lambda_1$, где $\gamma_1 \in A_0$, $\lambda_1 \in C$. Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1.$$

Пусть $\lambda_1 = (ax + by + c, b_1y + c_1)$, $\beta_1 = (x + q(y), y)$. Тогда

$$\lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_1^{-1} = \left(x + \frac{1}{a}q(b_1y + c_1), y\right).$$

Через $q_{<2}(b_1y + c_1)$ обозначим линейную часть дифференциального многочлена $q(b_1y + c_1)$. Пусть

$$\lambda = \left(x - \frac{1}{a}q_{<2}(b_1y + c_1), y\right).$$

Ясно, что $\lambda \in C$ и $\lambda_1^{-1} \circ \lambda \in C$. Обозначим $\lambda_1^{-1} \circ \lambda$ через $\lambda_2^{-1}$. Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \lambda_2,$$

где

$$\beta_1' = \lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_2^{-1} = \left(x + \frac{1}{a}\,q(b_1y + c_1) - \frac{1}{a}\,q_{<2}(b_1y + c_1), y\right) \in B_0.$$

Имеем

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ (\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}.$$

По индуктивному предположению произведение

$$(\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}$$

записывается в виде

$$\gamma_2 \circ \beta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, \quad k \leqslant n.$$

Следовательно,

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \gamma_2 \circ \beta_2' \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Если $\gamma_2 \neq \mathrm{id}$, то полученное представление имеет вид (1). Теперь рассмотрим случай, когда $\gamma_2 = \mathrm{id}$. Так как $\beta_1' \circ \beta_2' = \beta_2'' \in B_0$, то

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \beta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \gamma_1 \circ \beta_2'' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Поскольку $k-1 < n$, то по индуктивному предположению $\varphi$ записывается в виде (1). □

**Лемма 5.** *Пусть $\varphi = (f_1, f_2)$ — автоморфизм алгебры $A$, представимый в виде произведения*

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k,$$

*где $\mathrm{id} \neq \gamma_i \in A_0$, $\mathrm{id} \neq \beta_i \in B_0$ для всех $i$. Если $\beta_i = (x+q_i(y), y)$, $\deg\big(q_i(y)\big) = n_i$ и $s_i$ — степень $q_i(y)$ по переменной $y$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$, то*

$$\begin{aligned}
&\deg(f_1) = n_k + (n_{k-1}-1)s_k + \ldots + (n_1-1)s_k s_{k-1}\ldots s_2,\\
&\deg(f_2) = n_{k-1} + (n_{k-2}-1)s_{k-1} + \ldots + (n_1-1)s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_2, \quad \textit{если} \ \ k>1,\\
&\deg(f_2) = 1, \quad \textit{если} \ \ k=1.
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Утверждение леммы докажем индукцией по $k$. Если $k=1$, то $\varphi = \beta_1$ и

$$\begin{aligned}
\deg(f_1) &= \deg\big(q_1(y)\big) = n_1,\\
\deg(f_2) &= 1.
\end{aligned}$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется для $k-1$. Положим

$$\varphi_1 = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_{k-1} \circ \beta_{k-1} = (g_1, g_2).$$

По индуктивному предположению

$$\begin{aligned}
\deg(g_1) &= n_{k-1} + (n_{k-2}-1)s_{k-1} + \ldots + (n_1-1)s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_2,\\
\deg(g_2) &= n_{k-2} + (n_{k-3}-1)s_{k-2} + \ldots + (n_1-1)s_{k-2}s_{k-3}\ldots s_2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k = \varphi_1 \circ \gamma_k \circ \beta_k = (g_1, g_2) \circ \gamma_k \circ \beta_k.$$

Применяя $\gamma_k = (y, x+ay)$ к $(g_1, g_2)$, получаем

$$(u_1, u_2) = (g_1, g_2) \circ \gamma_k = (g_2, g_1 + a g_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\deg(u_1) = \deg(g_2) = n_{k-2} + (n_{k-3}-1)s_{k-2} + \ldots + (n_1-1)s_{k-2}s_{k-3}\ldots s_2,\\
&\deg(u_2) = \max\{\deg(g_1), \deg(g_2)\} =\\
&\quad = n_{k-1} + (n_{k-2}-1)s_{k-1} + \ldots + (n_1-1)s_{k-1}s_{k-2}\ldots s_2.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\varphi = (f_1, f_2) = (u_1, u_2) \circ \beta_k = (u_1, u_2) \circ (x + q_k(y), y) = (u_1 + q_k(u_2), u_2).$$

Следовательно,

$$\deg(f_1) = max\big\{\deg(u_1), \deg\big(q_k(u_2)\big)\big\},$$
$$\deg(f_2) = \deg(u_2).$$

Напомним, что $\deg(q_k) = n_k$ и

$$\deg(u_2) = n_{k-1} + (n_{k-2} - 1)s_{k-1} + \ldots + (n_1 - 1)s_{k-1}s_{k-2} \ldots s_2.$$

Заметим, что

$$\overline{q_k(u_2)} = \tilde{q}_k(\bar{u}_2),$$

где $\tilde{q_k}$ — старшая однородная часть $q_k$ относительно $\deg_w$, $w = (t, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m})$ и $t = \deg(u_2)$. Тогда

$$\deg\big(q_k(u_2)\big) = \deg\big(\overline{q_k(u_2)}\big) = \deg\big(\tilde{q}_k(\bar{u}_2)\big) = \deg_w(q_k) =$$
$$= (t, 1, 1, \ldots, 1) \cdot \alpha(q_k) = \deg(q_k) + (t-1)s_k =$$
$$= n_k + (n_{k-1} - 1)s_k + (n_{k-2} - 1)s_k s_{k-1} + \ldots + (n_1 - 1)s_k s_{k-1} \ldots s_2.$$

Следовательно,

$$\deg(f_1) = n_k + (n_{k-1} - 1)s_k + \ldots + (n_1 - 1)s_k s_{k-1} \ldots s_2,$$
$$\deg(f_2) = n_{k-1} + (n_{k-2} - 1)s_{k-1} + \ldots + (n_1 - 1)s_{k-1}s_{k-2} \ldots s_2,$$

что и требовалось доказать. □

**Лемма 6.** *Разложение* (1) *автоморфизма* $\varphi$ *из леммы* 4 *является однозначным.*

**Доказательство.** Достаточно показать, что

$$\gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda \neq \mathrm{id}$$

при $k \geqslant 1$, $\gamma_i \in A_0$, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k \neq \mathrm{id}$, $\beta_i \in B_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \neq \mathrm{id}$, $\lambda \in C$.

Докажем от противного. Допустим, что

$$\gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \mathrm{id}.$$

Тогда

$$\beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}. \tag{3}$$

Согласно лемме 5 автоморфизм

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k$$

имеет степень

$$\deg(\varphi) = \deg(f_1) + \deg(f_2) = n_k + (n_{k-1} - 1)s_k + \ldots + (n_1 - 1)s_k s_{k-1} \ldots s_2 +$$
$$+ n_{k-1} + (n_{k-2} - 1)s_{k-1} + \ldots + (n_1 - 1)s_{k-1}s_{k-2} \ldots s_2.$$

Правую часть равенства (3) обозначим через $\rho$, т. е.

$$\rho = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}.$$

Ясно, что $\rho \in \mathrm{Af}_2(A)$ и $\deg(\rho) = 2$. Следовательно, $\deg(\varphi) \neq \deg(\rho)$, что противоречит равенству (3). □

**Теорема 1.** *Группа ручных автоморфизмов алгебры $A = k\{x, y\}$ является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов $\mathrm{Af}_2(A)$ и треугольных автоморфизмов $\mathrm{Tr}_2(A)$ с объединённой подгруппой $C = \mathrm{Af}_2(A) \cap \cap \mathrm{Tr}_2(A)$, т. е.*

$$T(A) = \mathrm{Af}_2(A) *_C \mathrm{Tr}_2(A).$$

**Доказательство.** Так как $A_0$ и $B_0$ — системы левых смежных классов $\mathrm{Af}_2(A)$ и $\mathrm{Tr}_2(A)$ по подгруппе $C$, то по леммам 4 и 6 любой ручной автоморфизм однозначно представляется в виде (1). Согласно [2]

$$T(A) = \mathrm{Af}_2(A) *_C \mathrm{Tr}_2(A). \qquad \square$$

# 4. Сократимость ручных автоморфизмов

Напомним, что $\bar{f}$ — старшая однородная часть $f$ по отношению к функции степени $\deg$ и степень автоморфизма $\theta = (f_1, f_2)$ определяется следующим способом:

$$\deg(\theta) = \deg(f_1) + \deg(f_2).$$

Преобразование $(f_1, f_2)$, которое заменяет только один элемент $f_i$ $(i = 1, 2)$ на элемент вида $\alpha f_i + g$, где $0 \neq \alpha \in k$, $g \in k\{f_j \mid j \neq i\}$, называется *элементарным*.

Запись $\theta \to \varphi$ означает, что $\varphi$ получается из $\theta$ с помощью одного элементарного преобразования. Автоморфизм $\theta$ называется *элементарно сократимым*, если существует автоморфизм $\varphi$, такой что $\theta \to \varphi$ и $\deg(\varphi) < \deg(\theta)$.

**Лемма 7.** *Пусть $\theta = (f_1, f_2)$ не аффинный ручной автоморфизм алгебры $A = k\{x, y\}$. Если $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ линейно зависимы, то автоморфизм $\pi$ является элементарно сократимым.*

**Доказательство.** Пусть $\bar{f}_1 = \gamma \bar{f}_2$. Рассмотрим элементарное преобразование

$$\theta = (f_1, f_2) \to (f_1 - \gamma f_2, f_2) = \sigma,$$

где $\gamma \in k^*$. Имеем $\deg(f_1) > \deg(f_1 - \gamma f_2)$. Отсюда следует, что $\deg(\theta) > \deg(\sigma)$, и автоморфизм $\pi$ является элементарно сократимым. $\square$

**Теорема 2.** *Любой не аффинный ручной автоморфизм алгебры $A = k\{x, y\}$ является элементарно сократимым.*

**Доказательство.** Пусть $\theta = (f_1, f_2)$ не аффинный ручной автоморфизм алгебры $A$. По лемме 4 $\theta$ записывается в виде (1). Если $\gamma_{k+1} \circ \lambda = \mathrm{id}$, то

$$\theta = \gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k = (f_1, f_2).$$

Положим

$$\tau = \gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k = (g_1, g_2).$$

Если $\beta_k = (x + q_k(y), y)$, то

$$\theta = (g_1 + q_k(g_2), g_2).$$

По лемме 5

$$\deg(\tau) = \deg(g_1) + \deg(g_2) < \deg(\theta) = \deg\big(g_1 + q_k(g_2)\big) + \deg(g_2).$$

Поскольку

$$\theta \to \tau,$$

то автоморфизм $\theta$ является элементарно сократимым. Допустим, что

$$\gamma_{k+1} \circ \lambda = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) \neq \mathrm{id}.$$

Положим

$$\pi = \gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k = (g_1 + q_k(g_2), g_2) = (u_1, u_2).$$

По лемме 5 $\deg(u_1) > \deg(u_2)$.

Следовательно,

$$\theta = \pi \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = (a_1u_1 + b_1u_2 + c_1, a_2u_1 + b_2u_2 + c_2) = (f_1, f_2).$$

Если $a_1, a_2 \neq 0$, то $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ линейно зависимы, и по лемме 7 автоморфизм $\theta$ является элементарно сократимым.

Если $a_1 = 0$, то $\bar{f}_1 = \bar{u}_2$ и $\bar{f}_2 = \bar{u}_1 = \overline{q_k(u_2)}$. В этом случае автоморфизм $\theta$ элементарно сокращается с помощью автоморфизма $\psi = \big(f_1, f_2 - q_k(f_1)\big)$.

Случай, когда $a_2 = 0$, аналогичен предыдущему. □

**Следствие 2.** *Пусть $(f_1, f_2)$ не аффинный ручной автоморфизм алгебры $A = k\{x, y\}$. Тогда найдутся $i$ и $g \in k\{f_j \mid j \neq i\}$, такие что $\bar{f}_i = \bar{g}$.*

**Доказательство.** В силу теоремы 2 автоморфизм $(f_1, f_2)$ является элементарно сократимым. Допустим, что $f_1$ является сократимым элементом этого автоморфизма. Тогда найдётся $g \in k\{f_2\}$, такой что $\deg\big(f_1 - g(f_2)\big) < \deg(f_1)$. Это означает, что $\bar{f}_1 = \overline{g(f_2)}$. □

# 5. Аналог автоморфизма Аника

**Лемма 8.** *Пусть $|\Delta| \geqslant 2$. Эндоморфизм $\delta$ алгебры $A = k\{x, y\}$, заданный как*

$$\delta(x) = x + w^{\delta_2}, \quad \delta(y) = y + w^{\delta_1},$$

*где $w = x^{\delta_1} - y^{\delta_2}$, является автоморфизмом.*

**Доказательство.** Положим

$$f_1 = x + w^{\delta_2}, \quad f_2 = y + w^{\delta_1}.$$

Покажем, что $k\{x, y\} = k\{f_1, f_2\}$. Очевидно, что $k\{f_1, f_2\} \subseteq k\{x, y\}$. Имеем

$$x = f_1 - w^{\delta_2}, \quad y = f_2 - w^{\delta_1}.$$

Следовательно,

$$w = x^{\delta_1} - y^{\delta_2} = \left(f_1 - w^{\delta_2}\right)^{\delta_1} - \left(f_2 - w^{\delta_1}\right)^{\delta_2} = f_1^{\delta_1} - f_2^{\delta_2} \in k\{f_1, f_2\}$$

и
$$x = f_1 - w^{\delta_2} \in k\{f_1, f_2\}, \quad y = f_2 - w^{\delta_1} \in k\{f_1, f_2\}.$$
Это означает, что $k\{x, y\} \subseteq k\{f_1, f_2\}$. Отсюда следует, что $\delta$ — сюръективный гомоморфизм.

Линейные части $f_1$ и $f_2$ равны $x$ и $y$ соответственно. Следовательно, $f_1$ и $f_2$ дифференциально-алгебраически независимы. Это показывает инъективность гомоморфизма $\delta$. □

**Теорема 3.** *Автоморфизм $\delta$ алгебры $A = k\{x, y\}$ является диким.*

**Доказательство.** Имеем
$$\bar{f}_1 = \overline{x + x^{\delta_1\delta_2} - y^{\delta_2^2}} = x^{\delta_1\delta_2} - y^{\delta_2^2},$$
$$\bar{f}_2 = \overline{y + x^{\delta_1^2} - y^{\delta_1\delta_2}} = x^{\delta_1^2} - y^{\delta_1\delta_2}.$$

Имеем $\deg(x^{\delta_1^2} - y^{\delta_1\delta_2}) = 3$ и $\deg(x^{\delta_1\delta_2} - y^{\delta_2^2}) = 3$. Заметим, что любой однородный элемент степени 3 алгебры $k\{x^{\delta_1\delta_2} - y^{\delta_2^2}\}$ имеет вид $a(x^{\delta_1\delta_2} - y^{\delta_2^2})$ для некоторого $a \in k^*$. Поэтому $x^{\delta_1^2} - y^{\delta_1\delta_2} \notin k\{x^{\delta_1\delta_2} - y^{\delta_2^2}\}$, так как $x^{\delta_1^2} - y^{\delta_1\delta_2} = a(x^{\delta_1\delta_2} - y^{\delta_2^2})$ невозможно.

Аналогично $x^{\delta_1\delta_2} - y^{\delta_2^2} \notin k\{x^{\delta_1^2} - y^{\delta_1\delta_2}\}$.

Следовательно, автоморфизм $\delta$ не удовлетворяет утверждению следствия 2, т. е. является диким. □

## Литература


[1] Курош А. Г. Неассоциативные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб. — 1947. — Т. 20. — С. 239—262.

[2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1974.

[3] Макар-Лиманов Л. Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих // Функц. анализ и его прил. — 1970. — Т. 4. — С. 107—108.

[4] Михалёв А. А. Подалгебры свободных цветных суперагебр Ли // Матем. заметки. — 1985. — Т. 37, № 5. — С. 653—661.

[5] Умирбаев У. У. Определяющее соотношения группы ручных автоморфизмов алгебры многочленов и дикие автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр // Докл. РАН. — 2006. — Т. 407, № 3. — С. 319—324.

[6] Умирбаев У. У., Шестаков И. П. Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов // Докл. РАН. — 2002. — Т. 386, № 6. — С. 745—748.

[7] Ширшов А. И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Матем. сб. — 1953. — Т. 33, № 2. — С. 441—452.

[8] Ширшов А. И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Матем. сб. — 1954. — Т. 34, № 1. — С. 81—88.

[9] Ширшов А. И. Кольца и алгебры. — М.: Наука, 1984.

[10] Штерн А. С. Свободные суперагебры Ли // Сиб. матем. журн. — 1986. — Т. 27. — С. 170—174.

[11] Cohn P. M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. — 1964. — Vol. 56. — P. 618—632.

[12] Cohn P. M. Free Ideal Rings and Localization in General Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. — (New Math. Monogr.; Vol. 3).

[13] Czerniakiewicz A. G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II // Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — Vol. 160. — P. 393—401; 1972. — Vol. 171. — P. 309—315.

[14] Jung H. W. E. Über ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math. — 1942. — Vol. 184. — P. 161—174.

[15] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — New York: Academic Press, 1973. — (Pure Appl. Math.; Vol. 54).

[16] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. — (Math. Its Appl.; Vol. 461).

[17] Kozybaev D., Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras // Asian-Eur. J. Math. — 2008. — Vol. 1. — P. 243—254.

[18] Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wisk. — 1953. — Vol. 3, no. 1. — P. 33—41.

[19] Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras // Trans. Am. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 553—562.

[20] Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra. — 2009. — Vol. 322, no. 9. — P. 3318—3330.

[21] Nagata M. On Automorphism Group of $k[x, y]$. — Tokyo: Kinokuniya, 1972. — (Lect. Math., Kyoto Univ.; No. 5).

[22] Ritt J. F. Differential Algebra. — New York: Dover, 1966.

[23] Shestakov I. P., Umirbaev U. U. The Nagata automorphism is wild // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 2003. — Vol. 100, no. 22. — P. 12561—12563.

[24] Shestakov I. P., Umirbaev U. U. Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables // J. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 17. — P. 197—227.

[25] Umirbaev U. U. The Anick automorphism of free associative algebras // J. Reine Angew. Math. — 2007. — Vol. 605. — P. 165—178.

[26] Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. — 1956. — Vol. 64. — P. 195—216.