

АРИФМЕТИКА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ**Л. З. Лившиц, И. В. Островский, Г. П. Чистяков**

1. Введение. Арифметика вероятностных законов оформилась как самостоятельная область в конце 30-х годов в работах Крамера [82], Д. А. Райкова [62, 64], Леви [148—150, 155], А. Я. Хинчина [69], где были получены некоторые фундаментальные результаты. После почти двадцатилетнего перерыва интерес к этой области возобновился в конце 50-х годов с появлением цикла работ Ю. В. Линника [25—32, 35], открывших новый подход к ряду важных проблем.

В настоящем обзоре рассматриваются работы, прореферированные в Реферативном журнале «Математика» за 1953—1973 годы. Однако мы включили в обзор и работы, вышедшие до этого периода, так как эти работы сравнительно немногочисленны и содержат результаты, продолжающие играть важную роль.

Мы включили в обзор результаты по аналитическим характеристическим функциям, так как эти функции играют основную роль в построении арифметики вероятностных законов. С другой стороны, ряд важных результатов, примыкающих к арифметике вероятностных законов, остался за пределами нашего изложения. В первую очередь это относится к результатам по устойчивости разложений законов, которые могли бы составить содержание отдельного обзора.

2. Обзорные статьи, монографии. Обзор работ 30-х годов дан в статьях Леви [149, 150]. Состояние арифметики вероятностных законов накануне появления работ Ю. В. Линника описано в обзоре Дюге [121].

Первой монографией, посвященной арифметике вероятностных законов, явилась монография Ю. В. Линника [34, 159, 160], где с исчерпывающей полнотой отражено положение дел в 1960 году и сформулированы нерешенные вопросы. В монографии Ю. В. Линника и И. В. Островского [36] подытожены результаты, полученные до 1972 года, причем из-

ложение многих результатов, входивших в [34, 159, 160], существенно упрощено; помещен список актуальных проблем.

Изложение вопросов, относящихся к арифметике вероятностных законов, занимает важное место в монографиях Лукача [166, 168, 174], Рамачандрана [189], а также в обзорных статьях Лукача [163, 167, 171, 173, 175] и Фиша [125].

3. Терминология и обозначения. n -мерным вероятностным законом будем называть неотрицательную счетно-аддитивную меру $P=P(E)$, определенную на борелевских множествах евклидова n -мерного пространства \mathbb{R}^n и нормированную условием $P(\mathbb{R}^n)=1$. В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, вместо « n -мерный вероятностный закон» будем говорить просто «закон». Законы вида

$$\varepsilon_a(E) = \begin{cases} 1, & E \ni a, \\ 0, & E \bar{\ni} a, \end{cases}$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, будем называть единичными.

Спектром закона P называем множество $S(P) = \{x: P(U_\varepsilon(x)) > 0, \forall \varepsilon > 0\}$, где $U_\varepsilon(x)$ — шар в \mathbb{R}^n с центром в точке x и радиусом ε . Дискретным спектром закона P называем множество $D(P) = \{x: P(\{x\}) > 0\}$. Множество $S(P)$ замкнуто и непусто, а $D(P)$ является его не более чем счетным подмножеством и, вообще говоря, может быть пустым.

Характеристической функцией (х. ф.) закона P называем функцию

$$\varphi(t; P) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} P(dx), \quad t \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Как известно, из $\varphi(t; P_1) \equiv \varphi(t; P_2)$ следует $P_1 = P_2$.

Проекцией n -мерного ($n > 1$) закона P на вектор $s \in \mathbb{R}^n$, $|s|=1$, будем называть одномерный закон P_s , определяемый равенством $P_s(E) = P(\{x: (x, s) \in E\})$, где E — любое борелевское множество в \mathbb{R}^1 . Х. ф. проекции связана с х. ф. закона равенством $\varphi(t; P_s) = \varphi(ts; P)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Совокупность проекций $\{P_s\}$, где s пробегает плотное множество на сфере $|s|=1$, однозначно определяет закон P .

Композицией законов P_1 и P_2 называется закон $P = P_1 * P_2$, определяемый равенством

$$P(E) = (P_1 * P_2)(E) = \int_{\mathbb{R}^n} P_1(E-x) P_2(dx),$$

где через $E-x$ обозначено множество $\{y: y = z - x, z \in E\}$. Операция композиции коммутативна и ассоциативна. Равенство $P = P_1 * P_2$ эквивалентно равенству $\varphi(t; P) = \varphi(t; P_1) \times \varphi(t; P_2)$. Справедливы соотношения:

$$S(P_1 * P_2) = \overline{S(P_1) + S(P_2)}, \quad D(P_1 * P_2) = D(P_1) + D(P_2), \quad (2)$$

где черта обозначает замыкание, а $A+B$ — арифметическую сумму множеств A и B , т. е. $A+B = \{z : z = x + y, x \in A, y \in B\}$. Пусть m — натуральное число, P — закон, A — множество в \mathbb{R}^n . Будем полагать: $P^{1*} = P$, $P^{m*} = P * P^{(m-1)*}$; (1) $A = A$, (m) $A = A + (m-1)A$.

Закон P называется безгранично делимым (б. д.), если для любого $m=2, 3, \dots$ найдется закон P_m такой, что $P = P_m^{m*}$. По известной теореме Леви—Хинчина закон P является б. д. в том и только в том случае, когда его х. ф. допускает представление

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i(\beta_P, t) - Q_P(t) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(e^{i(t, x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + |x|^2} \right) \nu_P(dx) \right\}, \quad (3)$$

где $\beta_P \in \mathbb{R}^n$, $Q_P(t)$ — неотрицательная квадратичная форма, а $\nu_P = \nu_P(E)$ — неотрицательная вполне σ -конечная мера на классе борелевских множеств в \mathbb{R}^n , удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |x|^2 (1 + |x|^2)^{-1} \nu_P(dx) < \infty.$$

Представление (3) единственно. Мере ν_P принято называть спектральной мерой Леви б. д. закона P , а множество $\{x : \nu_P(U_\sigma(x)) > 0, \forall \sigma > 0\}$ — пуассоновым спектром б. д. закона P . Будем говорить, что мера $\nu_P(E)$ сосредоточена на (борелевском) множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, если $\nu_P(E) \equiv \nu_P(E \cap A)$. Б. д. закон P называется законом с гауссовой компонентой, если в представлении (3) $Q_P(t) \neq 0$.

Закон P_1 называется компонентой закона P , если существует закон P_2 такой, что $P = P_1 * P$.

Заметим, что закон P_2 , вообще говоря, не определяется законами P и P_1 однозначно. Первый пример такого рода указан Б. В. Гнеденко [3].

Законы P_1 и P_2 называются эквивалентными, если для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$ выполняется $P_1 = P_2 * \varepsilon_a$, другими словами, $P_1(E) = P_2(E - a)$. Если закон P_1 является компонентой закона P , то компонентой P будет и любой закон, эквивалентный P_1 .

4. Неразложимые законы. Закон P называется неразложимым, если он не является единичным и из равенства $P = P_1 * P_2$, где P_1 и P_2 — законы, следует, что либо P_1 , либо P_2 — единичный закон. Очевидно, закон, эквивалентный неразложимому, — неразложимый. Изучение свойств неразложимых законов представляет интерес потому, что они играют

в арифметике вероятностных законов роль, аналогичную роли простых чисел.

Остановимся сначала на достаточных условиях неразложимости, выраженных в терминах спектра закона. Следуя Партасаратхи, Рао и Варадгену [180], будем называть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ неразложимым, если его невозможно представить в виде арифметической суммы $A=B+C$ так, чтобы каждое из множеств B и C содержало хотя бы две точки. Из формул (2) следует такой факт. Если спектр $S(P)$ закона P можно поместить в некоторый выпуклый конус, вершина которого является крайней точкой, и $S(P)$ является неразложимым множеством, то закон P — неразложимый. Если закон P — дискретный, то достаточным условием его неразложимости является неразложимость дискретного спектра $D(P)$.

В связи с этой теоремой представляют интерес критерии неразложимости множеств. Ряд таких критериев получен в работах Леви [149], Партасаратхи, Рао и Варадгена [180]. Приведем некоторые из них: а) если во множестве невозможно найти две различные пары точек $\{x, y\}$ и $\{u, v\}$ такие, что $x-y=u-v$, то оно неразложимо; б) если множество неограничено и в нем невозможно найти последовательность точек x_j , $|x_j| \rightarrow \infty$, такую, что $x_1-x_2=x_3-x_4=\dots$, то оно неразложимо; в) множество, состоящее из двух точек, неразложимо; г) множество с линейно независимыми над полем рациональных чисел точками*) неразложимо; д) если бесконечное множество удовлетворяет условию, указанному в а), то его объединение с любым конечным множеством неразложимо.

А. Д. Милка [41] доказал, что всякое множество, лежащее на замкнутой выпуклой поверхности в \mathbb{R}^3 и содержащее каждую ее крайнюю точку вместе с некоторой поверхностной окрестностью, является неразложимым. А. Д. Милка указал признаки неразложимости множеств, лежащих на незамкнутой выпуклой поверхности в \mathbb{R}^3 , а также множеств, лежащих на выпуклых поверхностях в \mathbb{R}^n , $n > 3$.

Л. С. Кудина [10] показала, что, каково бы ни было замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$, содержащее хотя бы две точки, существует неразложимый закон P такой, что $S(P)=A$. Таким образом, не существует необходимых условий неразложимости (или, что то же самое, достаточных условий разложимости), выраженных в терминах спектра.

Имеются достаточные условия неразложимости, не выражаемые в терминах спектра. Условие, полученное Л. С. Ку-

*) Это означает, что для любого конечного набора x_1, \dots, x_p точек множества из равенства $h_1x_1 + \dots + h_px_p = 0$, где h_1, \dots, h_p — рациональные числа, следует, что $h_1 = h_2 = \dots = h_p = 0$.

диной [11], удобно сформулировать как необходимое условие разложимости. Пусть P — одномерный разложимый закон с ограниченным спектром $S(P)$. Положим $a = \inf S(P)$, $b = \sup S(P)$. Найдутся точки k и l , лежащие строго внутри интервала (a, b) , такие, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$P([a, a + \varepsilon]) P([b - \varepsilon, b]) \leq P([k - 2\varepsilon, k + 2\varepsilon]) P([l - 2\varepsilon, l + 2\varepsilon]).$$

Из этого результата следует, например, неразложимость классического закона арксинуса. Из него следует также, что если спектр $S(P)$ одномерного закона P ограничен, а его дискретный спектр $D(P)$ состоит из двух точек a и b , $a = \inf S(P)$, $b = \sup S(P)$, то закон P — неразложимый. Этот результат был ранее отмечен Леви [149].

Д. А. Райков [63], Краснер и Ранулак [138] одновременно и независимо доказали, что одномерный закон с х. ф. вида $\varphi(t; P) = \frac{1}{m} \{1 + e^{it} + \dots + e^{i(m-1)t}\}$ является неразложимым тогда и только тогда, когда m — простое число.

Дюге [118] указал пример абсолютно непрерывного неразложимого закона. Леви [153] построил абсолютно непрерывный неразложимый закон с ограниченным спектром и ограниченной плотностью; конструкция позволяет потребовать от плотности существования производных всех порядков. Леви [148] принадлежит пример неразложимого закона, х. ф. которого является целой функцией без корней. Лукач [169, 170] нашел необходимые и достаточные условия неразложимости одномерных законов, х. ф. которых имеют вид $\varphi(t; P) = Q(t) \exp\{-\gamma t^2 + i\beta t\}$, где $Q(t)$ — полином, а $\gamma \geq 0$ и $\beta, \operatorname{Im} \beta = 0$, — постоянные.

Леви [152] показал, что закон Уишарта, используемый в математической статистике, является неразложимым трехмерным законом, обладающим б. д. проекциями на три взаимно ортогональные направления. В связи с этим результатом Леви см. также [115, 196]. Можно показать [36], стр. 245, что если n -мерный закон обладает неразложимыми проекциями на $2n-1$ векторов, из которых никакие n не являются линейно зависимыми, то этот закон — неразложимый. Число $2n-1$ нельзя заменить меньшим.

Партасаратхи, Рао и Варадген [180] установили, что множество неразложимых законов является — в топологии слабой сходимости — плотным в классе всех законов множеством типа G_δ . Ими же установлено, что множество абсолютно непрерывных неразложимых законов является плотным в классе всех абсолютно непрерывных законов в топологии, определяемой расстоянием $\rho(P_1, P_2) =$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |p_1(x) - p_2(x)| dx, \text{ где } p_1(x) \text{ и } p_2(x) \text{ — плотности законов}$$

P_1 и P_2 соответственно. В работе Л. С. Кудиной [12] изучается замыкание в топологии слабой сходимости множества неразложимых законов с фиксированным спектром $A \subset \mathbb{R}^n$. Это замыкание не всегда совпадает с совокупностью всех законов P таких, что $S(P) = A$.

Описание совокупности всех неразложимых компонент известно лишь для немногих классов законов. Краснер и Ранулак [138] показали, что любая неразложимая компонента одномерного закона с х. ф. $\frac{1}{m} \{1 + e^{it} + \dots + e^{i(m-1)t}\}$ эквивалентна закону с х. ф. $\frac{1}{p} \{1 + e^{iqt} + \dots + e^{i(p-1)qt}\}$, где p — простой делитель m , а q делит mp^{-1} .

Опираясь на результаты работы Льюиса [158], Тортра [206] получил описание совокупности всех неразложимых компонент закона P_0 равномерного распределения на отрезке. В случае отрезка $[-1, 1]$ любая неразложимая компонента этого закона P_0 эквивалентна либо закону с х. ф. вида $\cos(t2^{-k})$, $k=1, 2, \dots$, либо закону с х. ф. вида

$$\frac{1}{p} \left\{ 1 + 2 \cos \frac{2t}{pq} + 2 \cos \frac{4t}{pq} + \dots + 2 \cos \frac{(p-1)t}{pq} \right\},$$

где $p \geq 3$ — простое, а q — произвольное натуральное число. С помощью результатов Льюиса описание множества всех неразложимых компонент закона равномерного распределения в n -мерном кубе получила Лепети [146, 147], а Тортра [206] дал описание множества неразложимых компонент «урезанного» экспоненциального закона, т. е. одномерного закона с плотностью, которая равна $Ce^{\lambda x}$ ($C > 0$, $-\infty < \lambda < \infty$) на некотором конечном отрезке и равна нулю вне этого отрезка. В связи с компонентами последнего закона см. также Бертъе [74, 75]. Заметим, что неразложимые компоненты «урезанного» экспоненциального закона дискретны и их спектр является конечной арифметической прогрессией. А. И. Ильинский [9] показал, что для «полного» экспоненциального закона P_λ , т. е. закона с плотностью, равной $\lambda e^{-\lambda x}$ ($0 < \lambda < \infty$) при $x \geq 0$ и равной 0 при $x < 0$, это не так. Более того, для любого замкнутого множества $A \subset [0, \infty)$, содержащего хотя бы две точки, можно указать неразложимую компоненту закона P_λ , спектр которой совпадает с A . Существуют недискретные неразложимые компоненты P_λ .

Бертъе [76] показал, что любая неразложимая компонента одномерного закона с х. ф. $\varphi_r(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(tr^{-k})$, $r > 1 + \sqrt{2}$, эквивалентна закону с х. ф. $\cos(tr^{-k})$, $k=1, 2, \dots$. При $r=2$ это утверждение неверно, так как

$\varphi_r(t)$ в этом случае является х. ф. закона равномерного распределения на $[-1, 1]$. Случай $2 < r \leq 1 + \sqrt{2}$ остается невыясненным. См. также Бертье [77].

Возникает вопрос, можно ли любой закон представить в виде композиции его неразложимых компонент. Ситуация оказывается существенно более сложной, чем та, которая имеет место в обычной арифметике, поскольку существуют законы (отличные от единичных), вовсе не имеющие неразложимых компонент. Так, по теореме Крамера [82], все компоненты закона Гаусса являются законами Гаусса и, следовательно, разложимы. По теореме Д. А. Райкова [62], аналогичный факт имеет место для закона Пуассона. Теорема, аналогичная основной теореме арифметики натуральных чисел в арифметике вероятностных законов, имеет вид:

Теорема А. Я. Хинчина о факторизации. Всякий закон P , имеющий неразложимые компоненты, представляется в виде

$$P = P_0 * P_1 * P_2 * \dots, \quad (4)$$

где P_0 — закон, не имеющий неразложимых компонент, а P_1, P_2, \dots — неразложимые законы в конечном или счетном числе.

Эта теорема была доказана А. Я. Хинчиным [69] в одномерном случае. В сформулированном выше виде она содержится в работе Партасаратхи, Рао и Варадгена [181] как частный случай их более общего результата (см. п. 10).

Как показал А. Я. Хинчин [69], представление (4), вообще говоря, не является единственным. Фишер и Дюге [124] построили пример, показывающий, что композиция двух неразложимых законов может иметь в качестве компоненты закон Гаусса.

5. Проблема описания класса I_0 . В связи с теоремой А. Я. Хинчина о факторизации возникает вопрос об описании класса законов, не имеющих неразложимых компонент. Этот класс принято обозначать через I_0 . Фундаментальную роль в проблеме описания класса I_0 играет следующая теорема.

Теорема А. Я. Хинчина. Класс I_0 является собственным подклассом класса безгранично делимых законов.

Эта теорема, так же, как и теорема о факторизации, была получена А. Я. Хинчиным [69] в одномерном случае, а позднее обобщена в работе Партасаратхи, Рао и Варадгена [181].

Из теоремы А. Я. Хинчина вытекает, что х. ф. любого закона P класса I_0 допускает представление (3); таким образом, проблема описания класса I_0 сводится к выяснению свойств спектральной меры Леви ν_P и квадратичной формы Q_P , обеспечивающих принадлежность б. д. закона P классу I_0 .

Поскольку все компоненты закона класса I_0 , разумеется, тоже принадлежат классу I_0 , то из теоремы А. Я. Хин-

чина следует, что класс I_0 можно определять как класс б. д. законов, имеющих только б. д. компоненты. Отсюда получается, что совокупность компонент любого закона P класса I_0 допускает простое описание: именно, она совпадает со множеством б. д. законов H таких, что для любого борелевского множества $E \subset \mathbb{R}^n$ выполняется $\nu_H(E) \leq \nu_P(E)$ и, кроме того, $Q_H(t) \leq Q_P(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$.

Полного решения проблемы описания класса I_0 в настоящее время нет. Перейдем к изложению полученных результатов.

5.1. Необходимые условия принадлежности к I_0 . Обозначим через \mathfrak{L} класс одномерных б. д. законов, пуассонов спектр которых лежит во множестве вида

$$\{\mu_{m1}\}_{m=-\infty}^{\infty} \cup \{\mu_{m2}\}_{m=-\infty}^{\infty},$$

где $\mu_{m1} > 0$, $\mu_{m2} < 0$, а все отношения $\mu_{m+1,r}/\mu_{mr}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, r=1, 2$) являются натуральными числами, отличными от единицы. Этот класс законов был введен Ю. В. Линником [27—29], который доказал следующую теорему.

Теорема Ю. В. Линника. Если одномерный б. д. закон с гауссовой компонентой принадлежит классу I_0 , то он необходимо принадлежит классу \mathfrak{L} .

Заметим, что условие наличия гауссовой компоненты в этой теореме является существенным.

Ряд работ, посвященных необходимым условиям принадлежности к I_0 законов без гауссовой компоненты, явился продолжением работы Крамера [83]; сюда относятся работы Симидзу [197], Кюппана [105—108], И. В. Островского [59], Л. З. Лившица [18—20]. Результаты этих работ удобнее формулировать как достаточные условия непринадлежности к I_0 . Приведем теорему Л. З. Лившица [18—20]. Пусть спектральная мера Леви n -мерного б. д. закона P удовлетворяет условию

$$\nu_P(E) \geq k\omega_n(E \cap A),$$

где $k > 0$ — постоянная, ω_n — лебегова мера в \mathbb{R}^n , A — открытое множество в \mathbb{R}^n такое, что $A_1 \cap \bigcup_{h=2}^{\infty} (h)A \neq \emptyset$, где A_1 — наименьшее выпуклое множество, содержащее A . Тогда закон P не принадлежит классу I_0 . Результат Крамера [83] получится, если взять $n=1$, $A=(0, b)$, $b > 0$; при $n=1$, $A=(a, b)$, $0 < a < 2a < b$, получается один из результатов Симидзу [197].

Из результата Крамера, как показал Ф. Ф. Мишейкис [42], вытекает следующий факт: законы класса L А. Я. Хинчина все, кроме закона Гаусса, не принадлежат к I_0 . В частности, устойчивые законы все, кроме закона Гаусса, не при-

надлежат классу I_0 ; этот факт был ранее отмечен Крамером [83].

Приведем также один из результатов работ Кюппана [105—108]. Пусть спектральная мера Леви n -мерного б. д. закона P допускает оценку снизу

$$\nu_P \geq \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu^{a_j^*},$$

где $\lambda_j > 0$ ($j=1, \dots, m$), a_j — натуральные числа, а μ — некоторая вполне конечная мера. Если одномерный б. д. закон

с х. ф. вида $\exp \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j (e^{i t a_j} - 1) \right\}$ не принадлежит классу I_0 , то и закон P не принадлежит классу I_0 .

5.2. Достаточные условия принадлежности к I_0 . Ю. В. Линник [27, 30, 31] доказал следующую теорему: Если одномерный б. д. закон P принадлежит классу \mathfrak{L} (наличие гауссовой компоненты не обязательно) и его спектральная мера Леви удовлетворяет условию

$$\nu_P(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-\exp y^{1+\varepsilon})), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (5)$$

то закон P принадлежит классу I_0 . Частными случаями этой теоремы являются теорема Крамера [82] о компонентах закона Гаусса, теорема Д. А. Райкова [62] о компонентах закона Пуассона и теорема Ю. В. Линника [25, 26] о компонентах композиции законов Гаусса и Пуассона.

И. В. Островский [45, 48] показал, что условие (5) можно заменить менее ограничительным:

$$\nu_P(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-Ky^2)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0. \quad (6)$$

И. В. Островский [46] показал также, что при дополнительном предположении $S(P) \subset \{a + k\xi, k=0, \pm 1, \dots\}$, $\xi \geq 0$, условие (6) можно заменить еще более слабым*

$$\nu_P(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-2y\xi^{-1} \ln y - Ky)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0. \quad (7)$$

Метод, примененный И. В. Островским [45—48], является развитием метода Ю. В. Линника [25, 30, 31], но он в то же время существенно проще.

А. А. Гольдберг и И. В. Островский [4] доказали, что принадлежность классу \mathfrak{L} сама по себе не является достаточным условием принадлежности к I_0 . Построенный ими

*) В [46], а также в книге [36] (стр. 211, строка 14 снизу, и стр. 333, строка 12 снизу) это условие записано неточно.

пример закона класса $\mathfrak{L} \setminus I_0$ показывает также, что условие (7) нельзя заменить условием

$$\nu_P(\{x: |x| > y\}) = O(\exp(-y)), \quad y \rightarrow +\infty.$$

Многомерные обобщения сформулированных выше результатов работ [45, 46, 48] даны в работах Кюппана [89, 91, 93, 94, 97, 109] и Л. З. Лившица [17]. Теоремы, установленные в этих работах, содержат предшествующие теоремы о принадлежности к I_0 следующих законов: многомерного закона Гаусса (Крамер [82]), многомерного закона Пуассона (Тейчер [202]), композиции многомерных законов Гаусса и Пуассона (И. В. Островский [50], Кюппан [86]). См. также Руссо [194].

Перейдем к достаточным условиям принадлежности к I_0 законов, не входящих в класс \mathfrak{L} и его многомерные аналоги.

Д. А. Райков [64] доказал, что одномерный б. д. закон без гауссовой компоненты принадлежит классу I_0 , если его пуассонов спектр конечен и лежит на отрезке $[a, b]$ таком, что $0 < a < b \leq 2a$. И. В. Островский [49] показал, что требование конечности пуассонова спектра можно отбросить, и тем самым дал утвердительный ответ на вопрос Ю. В. Линника [34], стр. 257, о существовании законов класса I_0 с континуальным пуассоновым спектром. Позднее И. В. Островский [51, 54] получил более общий результат: если пуассонов спектр одномерного б. д. закона P без гауссовой компоненты лежит во множестве вида $[a, b] \cup \{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $0 < a < b \leq 2a$, а числа $\mu_m > b$ таковы, что отношения μ_{m+1}/μ_m ($m=1, 2, \dots$) являются натуральными числами, отличными от единицы, и выполнено условие (6), то закон P принадлежит классу I_0 . В многомерном случае И. В. Островский [51, 54] получил такую теорему. Если n -мерный б. д. закон P не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера Леви сосредоточена на выпуклом ограниченном открытом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ таком, что $A \cap (2)A = \emptyset$, то закон P принадлежит классу I_0 . Л. З. Лившиц [18—20] показал, что требование ограниченности множества A можно снять. См. также Кюппан [89, 94, 97].

В работе [64] Д. А. Райков доказал также, что одномерный б. д. закон без гауссовой компоненты принадлежит классу I_0 , если его пуассонов спектр конечен, лежит на полуоси $(0, \infty)$ и является множеством с точками, линейно независимыми над полем рациональных чисел. Обобщения и усиления этого результата получены в работах И. В. Островского [49, 51, 54], Кюппана [93, 97, 104—106], Г. П. Чистякова [71], Л. З. Лившица и И. В. Островского [21, 22]. Позднее Кюппан [107, 109, 110] получил более сильные результаты. Приведем один из них.

Пусть n -мерный б. д. закон P не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера Леви вполне конечна и сосредоточена на борелевском множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, обладающем свойством: проекция множества A на некоторое подпространство в \mathbb{R}^n (оно, в частности, может совпадать с \mathbb{R}^n) является множеством с точками, линейно независимыми над полем рациональных чисел. Тогда закон P принадлежит классу I_0 . Утверждение теоремы сохраняет силу, если потребовать, чтобы множество A допускало представление

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=p_j}^{q_j} (k) B_j, \text{ где } \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \text{ — множество с линейно независимыми над полем рациональных чисел точками, а } 0 < p_j \leq q_j < 2p_j.$$

Приведем также следующую теорему Кюппана [109] (предшествующие результаты см. Кюппан [93, 96, 98, 99, 103, 107], И. В. Островский [57]). Пусть P — б. д. закон без гауссовой компоненты, спектральная мера Леви которого вполне конечна и сосредоточена на множестве вида $\{\lambda_{ms}\sigma_s\}_{m,s=-\infty}^{\infty}$, где $\sigma_s \in \mathbb{R}^n$ образуют множество с точками, линейно независимыми над полем рациональных чисел, а числа λ_{ms} рациональны и таковы, что отношения $\lambda_{m+1,s}/\lambda_{ms}$ ($m, s=0, \pm 1, \dots$) являются натуральными числами, отличными от единицы. Если, кроме того, выполнено условие (6), то закон P принадлежит классу I_0 .

5.3. Необходимые и достаточные условия принадлежности к I_0 для специальных классов законов Леви [148] получил необходимые и достаточные условия принадлежности к I_0 одномерных б. д. законов с х. ф. вида

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j (e^{ia_j t} - 1) \right\},$$

где $\lambda_j > 0$, а a_j — натуральные числа. Мы не будем приводить эти условия из-за громоздкости; отметим только, что в них накладываются ограничения лишь на числа a_j , но не на числа λ_j .

В работах Кюппана [95, 100] был поставлен вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий принадлежности к I_0 б. д. законов без гауссовой компоненты, спектральная мера Леви которых представляется в виде $\nu_P(E) = \int_E \rho(x) dx$, где $\rho(x)$ — непрерывная функция в \mathbb{R}^n .

В одномерном случае вопрос был решен Кюппаном [95, 100—102], а в многомерном — Л. З. Лившицем [18—20], который показал, что необходимое и достаточное условие

имеет вид

$$A_1 \cap \bigcup_{k=2}^{\infty} (k) A = \emptyset, \quad (8)$$

где $A = \{x: \rho(x) > 0\}$, а A_1 — наименьшее выпуклое множество, содержащее A . Заметим, что в одномерном случае условие (8) эквивалентно указанному Кюппаном [95] условию $A_1 \cap \bigcap (2) A_1 = \emptyset$, однако в многомерном случае последнее условие — более ограничительное, чем (8), и не является необходимым*).

5.4. Некоторые общие результаты о классе I_0 . Д. А. Райков [64] отметил, что класс I_0 не замкнут относительно операции композиции. Как показано в книге [36], стр. 219, из результата А. А. Гольдберга и И. В. Островского [4] следует, что класс I_0 не является замкнутым множеством в топологии слабой сходимости, а из результатов Крамера [82] и Ю. В. Линника [28, 29] — что класс, состоящий из б. д. законов, не принадлежащих к I_0 , тоже не является замкнутым множеством в этой топологии.

И. В. Островский [49, 54] показал, что класс I_0 является «базисом» в классе всех б. д. законов в том смысле, что любой б. д. закон P представляется в виде $P = P_1 * P_2 * \dots$, где $P_k \in I_0$.

Л. З. Лившиц и И. В. Островский [21, 22] доказали, что класс I_0 является плотным (в топологии слабой сходимости) в классе всех б. д. законов. В одномерном случае этот результат ранее получил И. В. Островский [57].

Д. А. Райков [64] поставил вопрос, существуют ли законы класса I_0 с неаналитическими х. ф. Утвердительный ответ на этот вопрос получил Г. П. Чистяков [71].

6. α -разложения. Понятие α -разложения, являющееся обобщением понятия разложения закона в композицию, было введено Ю. В. Линником [23, 24, 28] в связи с некоторыми вопросами математической статистики. Пусть $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ — х. ф. одномерных законов, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — положительные числа. Разложение вида

$$\varphi_0(t) = \varphi_1^{\alpha_1}(t) \dots \varphi_m^{\alpha_m}(t), \quad t \in E, \quad (9)$$

где E — некоторое множество в \mathbb{R}^1 с точкой сгущения в нуле, называется α -разложением х. ф. $\varphi_0(t)$ (или соответствующего закона) на множестве E . Х. ф. $\varphi_1(t)$ называется α -компонентой х. ф. $\varphi_0(t)$ на множестве E , если существуют х. ф. $\varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ и положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ такие, что имеет место α -разложение (9). Очевидно, что если закон

* В работах [95, 100] Кюппан утверждает, что условие $A_1 \cap (2) A_1 = \emptyset$ является необходимым и достаточным и в многомерном случае; в [59] приведен контрпример к этому утверждению.

P_1 является компонентой закона μ , то х. ф. $\varphi_1(t) = \varphi(t; P_1)$ является α -компонентой х. ф. $\varphi_0(t) = \varphi(t; P)$ на \mathbb{R}^1 , причем можно взять $m=2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

А. А. Зингер и Ю. В. Линник [7] доказали, что все α -компоненты х. ф. закона Гаусса (на множестве $E = [-\delta, \delta]$, $\delta > 0$) являются х. ф. законов Гаусса. Аналогичный результат для закона Пуассона (при $E = \mathbb{R}^1$) был получен Дюге [119, 120].

Обозначим через $I_0^\alpha(E)$ класс х. ф. одномерных законов, имеющих только б. д. α -компоненты на множестве E , и пусть $I_0^\alpha = \bigcap I_0^\alpha(E)$ (пересечение берется по всем множествам E с точкой сгущения в 0). Если сохранить обозначение I_0 для класса х. ф. всех одномерных законов из I_0 , то, очевидно, $I_0^\alpha \subset I_0$. До сих пор неизвестно, верно ли равенство $I_0^\alpha = I_0$. Из результатов А. А. Зингера и Ю. В. Линника [7] и Дюге [119—120] вытекает, что х. ф. закона Гаусса принадлежит $I_0^\alpha([-\delta, \delta])$, $\delta > 0$, а х. ф. закона Пуассона принадлежит $I_0^\alpha(\mathbb{R}^1)$. Ю. В. Линник [28, 32] доказал, что х. ф. всех законов класса \mathfrak{L} с ограниченным пуассоновым спектром принадлежат I_0^α . И. В. Островский [46, 48] показал, что условие ограниченности пуассонова спектра можно заменить условием (6), а для х. ф. законов $P \in \mathfrak{L}$ таких, что $S(P) \subset \{0, \pm \xi, \pm 2\xi, \dots\}$, — условием (7). Им же доказано [57], что одномерный б. д. закон P без гауссовой компоненты принадлежит I_0^α , если его спектральная мера Леви вполне конечна, сосредоточена на не более чем счетном множестве с независимыми над полем рациональных чисел точками и, кроме того, удовлетворяется условие (6).

И. В. Островский показал [56, 57], что класс I_0^α является плотным (в топологии слабой сходимости) в классе всех одномерных б. д. законов.

Ю. В. Линник [34] предложил такое обобщение понятия α -разложения. Пусть $\varphi_0(t)$ — х. ф., $\{\varphi(t, s)\}_{s \in [\alpha, \beta]}$ — семейство х. ф., $g(s)$ — неубывающая ограниченная функция на $[\alpha, \beta]$, $E \subset \mathbb{R}^1$ — множество чисел, имеющее точку сгущения в нуле. Разложение вида

$$\varphi_0(t) = \exp \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \ln \varphi(t, s) dg(s) \right\}, \quad t \in E,$$

называется континуальным α -разложением на множестве E . При этом предполагается, что существует интервал $-\delta < t < \delta$, на котором все х. ф. семейства $\{\varphi(t, s)\}$ не обращаются в нуль. Частным случаем континуального α -раз-

ложения является счетное α -разложение

$$\varphi_0(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \varphi_j^{\alpha_j}(t), \quad t \in E, \quad \alpha_j > 0. \quad (10)$$

Счетные α -разложения рассматривались Л. В. Мамай [38, 39], Рамачандрани [187, 188] и Лаха [142]. При дополнительном условии $\inf \alpha_j > 0$ Рамачандран [187, 188] доказал, что если $\varphi_0(t)$ — х. ф. закона Гаусса (Пуассона), то и все х. ф. $\varphi_j(t)$, $j=1, 2, \dots$, — х. ф. закона Гаусса (Пуассона). Вопрос о том, является ли условие $\inf \alpha_j > 0$ существенным, до сих пор не решен. Континуальные α -разложения при дополнительном условии, что $g(s)$ имеет непрерывную положительную на $[\alpha, \beta]$ производную, рассматривались Л. В. Мамай [40].

7. Разложения в композицию функций ограниченной вариации. Обозначим через B класс функций $V(x)$ ограниченной вариации на прямой $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющих условиям: $V(-\infty) = 0$, $V(+\infty) = 1$, $V(x-0) = V(x)$. Если P — одномерный закон, то его функция распределения (ф. р.) $F(x) = P((-\infty, x))$, разумеется, принадлежит B . Пусть $V_1, V_2 \in B$, композицию $V_1 * V_2$ определяем равенством

$$(V_1 * V_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(x-s) dV_2(s), \quad -\infty < x < \infty.$$

Если V, V_1 и V_2 — ф. р. одномерных законов P, P_1 и P_2 соответственно, то равенство $V = V_1 * V_2$ эквивалентно $P = P_1 * P_2$. Разложения ф. р. законов в композицию функций класса B впервые рассматривались в работе Ю. В. Линника и В. П. Скитовича [37]. Их результат усилен Г. П. Чистяковым, который доказал (опубликовано в книге [36], приложение III), что если $\Phi(x)$ — ф. р. закона Гаусса, а функции $V_1(x)$ и $V_2(x) \in B$ удовлетворяют условию ($j=1, 2$)

$$\int_{|x|>y} |dV_j(x)| = O(\exp(-Ky \ln y)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0, \quad (11)$$

то из равенства $V_1 * V_2 = \Phi$ следует, что V_1 и V_2 являются ф. р. законов Гаусса. В условии (11) квантор \forall нельзя заменить квантором \exists .

Приведенный результат не содержит, однако, теорему Крамера [82] о компонентах закона Гаусса, поскольку ф. р. законов не обязаны удовлетворять условию (11). Г. П. Чистяков [70] получил следующую теорему.

Пусть функции $V_1(x)$ и $V_2(x)$ класса B удовлетворяют условию симметрии $V_j(-x) = 1 - V_j(x+0)$, а также условиям ($j=1, 2$):

$$a) \int_{|x|>y} dV_j^0(x) = O(\exp(-Ky \ln y)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \forall K > 0,$$

$$\text{где } V_j^0(x) = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^x |dV_j(x)| - V_j(x) \right),$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yx} dV_j(x) \neq 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad (12)$$

(интеграл в силу а) всегда имеет смысл, но может равняться $+\infty$). Если $V_1 * V_2 = \Phi$, где Φ — ф. р. закона Гаусса, то V_1 и V_2 — тоже ф. р. закона Гаусса.

Если $V_j(x)$ являются ф. р. законов, то $V_j(x)$ — неубывающие функции и, следовательно, интегралы (12) положительны, а $V_j^0(x) \equiv 0$. Поэтому теорема Г. П. Чистякова содержит теорему Крамера [82] для законов P , удовлетворяющих условию симметрии $P((-\infty, -x)) = P((x, \infty))$. Одновременно она содержит также и результат работы Ю. В. Линника и В. П. Скитовича [37].

В работах Лаха [141] и В. И. Ладохина [13—15] изучаются разложения функции $V(x) \in B$ такой, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dV(x) = \exp\{Q(t)\}$, где $Q(t)$ — полином, в композицию $V = V_1 * V_2$. При этом предполагается, что функции V_1 и V_2 удовлетворяют условиям Линника — Скитовича [37]:

$$V_j(-x) = 1 - V_j(x+0), \quad \int_{|x|>y} |dV_j(x)| = O(\exp(-y^{1+\varepsilon})),$$

$$y \rightarrow +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

8. Аналитические и целые характеристические функции.

Законы, обладающие аналитическими и целыми характеристическими функциями, играют важную роль в арифметике вероятностных законов потому, что для исследования их компонент могут быть применены мощные методы современной теории аналитических функций. Это обстоятельство дает возможность получать для этих компонент глубокие и полные результаты.

Дадим определение аналитической и целой х. ф. Пусть G — область n -мерного комплексного пространства \mathbb{C}^n , содержащая точку $t=0$. Х. ф. $\varphi(t; P)$ закона P называется аналитической в области G , если существует аналитическая в G функция $f(t)$ такая, что $\varphi(t; P) = f(t)$ при всех дейст-

вительных $t \in G$. В частности, если $G = \mathbb{C}^n$, то х. ф. $\varphi(t; P)$ называется целой. По теореме единственности аналитических функций может существовать лишь одна функция $f(t)$, поэтому не может возникнуть недоразумения, если мы ее в дальнейшем будем обозначать также через $\varphi(t; P)$ ($t \in G$).

8.1. Области аналитичности х. ф. Леви [149] и Д. А. Райков [64] независимо доказали, что если х. ф. $\varphi(t; P)$ одномерного закона P аналитична в круге $|t| < R$, то она аналитична в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$ и представима там в виде (1), причем интеграл сходится в $|\operatorname{Im} t| < R$ абсолютно. Отсюда следует [36], что если х. ф. $\varphi(t; P)$ одномерного закона аналитична в некоторой области $G \subset \mathbb{C}^1$, содержащей интервал $\{t: t = i\tau, -a < \tau < b\}$, $a > 0, b > 0$, то $\varphi(t; P)$ аналитична в полосе $-a < \operatorname{Im} t < b$. Этот результат перенесен на многомерный случай независимо Кюппаном [87] и И. В. Островским [51, 53] в такой формулировке. Пусть х. ф. $\varphi(t; P)$ n -мерного закона P аналитична в некоторой области $G \subset \mathbb{C}^n$, содержащей множество вида $\{t: t = i\tau, \tau \in H\}$, где H — область в \mathbb{R}^n , содержащая точку 0. Тогда х. ф. $\varphi(t; P)$ аналитична в области*) $G_1 = \{t: \operatorname{Im} t \in H_1\}$, где H_1 — наименьшее выпуклое множество, содержащее область H . Кроме того, для всех $t \in G_1$ справедливо представление (1), причем интеграл сходится при $t \in G_1$ абсолютно.

Область $G \subset \mathbb{C}^n$, $0 \in G$, назовем областью аналитичности х. ф., если существует х. ф., аналитическая в G и не являющаяся аналитической ни в какой области $G_1 \supset G$ такой, что $G_1 \setminus G \neq \emptyset$. И. В. Островский [53] поставил вопрос об описании класса областей, являющихся областями аналитичности х. ф. Этот вопрос решен [53] только в одномерном случае. В этом случае класс состоит из всех областей $G \subset \mathbb{C}^1$, содержащих точку 0, симметричных относительно мнимой оси и, вместе с интервалом $\{t: t = i\tau, -a < \tau < b\}$, $a > 0, b > 0$, содержащих полосу $-a < \operatorname{Im} t < b$. Результаты относящиеся к n -мерному ($n > 1$) случаю, см. в работах Л. А. Айзенберга и А. С. Губановой [1] и И. В. Островского [53].

Не решен также вопрос об описании класса областей в \mathbb{C}^n , являющихся областями мероморфности х. ф., аналитических в некоторой окрестности точки $t = 0$. (Понятия мероморфной х. ф. и области мероморфности х. ф. определяются аналогично понятиям аналитической х. ф. и области аналитичности). Следует отметить [58], что этот класс областей не может совпадать с классом областей аналитичности х. ф.

Необходимые и достаточные условия аналитичности х. ф. одномерных законов в полосе получил Д. А. Райков [64].

*) Через $\operatorname{Im} t$ ($\operatorname{Re} t$) мы обозначаем вектор, координатами которого являются мнимые (действительные) части координат вектора $t \in \mathbb{C}^n$.

Пусть P — одномерный закон. Положим

$$W(x; P) = P(\{y: |y| > x\}).$$

Для того чтобы х. ф. $\varphi(t; P)$ была аналитической в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$, необходимо и достаточно, чтобы $W(x; P) = O(e^{-rx})$, $x \rightarrow +\infty$, $\forall r < R$. В частности, для того чтобы х. ф. $\varphi(t; P)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы $W(x; P) = O(e^{-rx})$, $x \rightarrow +\infty$, $\forall r > 0$.

8.2. Рост целых х. ф. Классическая шкала роста целых функций вводится с помощью понятий порядка и типа (см., например, Б. Я. Левин [16], гл. I). Напомним, что порядком целой функции $f(t)$ называется число $\rho[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} \times \ln \ln M(r, f)$, где $M(r, f) = \max_{|t|=r} |f(t)|$. Типом целой функции $f(t)$ порядка $\rho[f] = \rho$ называется число $\sigma[f] = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln M(r, f)$. Говорят, что функция $f(t)$ нормального, минимального или максимального типа, если соответственно $0 < \sigma[f] < \infty$, $\sigma[f] = 0$ или $\sigma[f] = \infty$.

Леви [149] показал, что любая целая х. ф., за исключением х. ф. $\varphi(t; \varepsilon_0) \equiv 1$, имеет рост по меньшей мере порядка 1 и нормального типа. По́йа [183] доказал, что для того чтобы х. ф. $\varphi(t; P)$ была целой порядка 1 и типа $\sigma > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma = \sup \{x: W(x; P) > 0\}$. Рамачандран [186] получил формулы, связывающие поведение одномерного закона P с порядком и типом его х. ф. $\varphi(t; P)$. Положим

$$\kappa = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{-1} \ln \ln (1/W(x; P));$$

если же $\kappa < \infty$, то введем еще величину

$$\lambda = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} x^{-\kappa} \ln (1/W(x; P)).$$

Тогда при $1 \leq \rho \leq \infty$ выполняется $\rho^{-1} + \kappa^{-1} = 1$, а при $1 < \rho < \infty$, кроме того, выполняется также $(\kappa \lambda)^{\rho-1} \sigma \rho = 1$. Здесь через ρ и σ мы обозначили соответственно порядок и тип х. ф. $\varphi(t; P)$.

Из приведенных результатов следует, что существуют целые х. ф. любого наперед заданного порядка $1 < \rho \leq \infty$ и наперед заданного типа $0 \leq \sigma \leq \infty$, а также порядка $\rho = 1$ и типа $0 < \sigma < \infty$. Как отмечено в [36], стр. 58, ограничений сверху на рост целых х. ф. нет; для любой неубывающей функции $U(r)$, $0 < r < \infty$, существует целая х. ф. $\varphi = \varphi(t; P)$ такая, что $M(r, \varphi) > U(r)$, $r > r_0$.

Более тонкие, чем порядок и тип, характеристики роста целой х. ф. конечного порядка и их связь с поведением со-

ответствующего закона изучались в работах Россберга [190—192].

Рамачандран [186] получил также формулы, связывающие рост целой х. ф. бесконечного порядка с поведением закона. Эти результаты обобщены Н. И. Яковлевой [72].

8.3. Теорема Марцинкевича и ее обобщения. Как отмечено выше, в терминах классической шкалы нет никаких ограничений на рост целых х. ф. $\neq 1$, кроме следующего: он должен быть не ниже порядка 1 и нормального типа. Как показал Марцинкевич [176], для х. ф., имеющих в определенном смысле «мало» корней, дело обстоит иначе. Чтобы сформулировать результат Марцинкевича, напомним, что показателем сходимости корней $\{t_n\}$ целой функции $f(t)$ называется точная нижняя грань $\mu[f]$ чисел μ таких, что $\sum_{t_n \neq 0} |t_n|^{-\mu} < \infty$. Чем меньше число $\mu[f]$, тем реже

на плоскости расположены корни функции $f(t)$. Известно ([16], стр. 27), что всегда выполняется $\mu[f] \leq \rho[f]$; если $\mu[f] < \rho[f]$, то можно считать, что функция $f(t)$ имеет «мало» корней.

Теорема Марцинкевича [176] гласит, что если целая х. ф. $\varphi = \varphi(t; P)$ имеет конечный порядок $\rho[\varphi]$ и выполняется $\mu[\varphi] < \rho[\varphi]$, то $\rho[\varphi] \leq 2$. В качестве следствия Марцинкевич [176] получил следующий факт, имеющий многочисленные применения. Если х. ф. закона P имеет вид

$$\varphi(t; P) = \exp \{Q(t)\}, \quad (13)$$

где $Q(t)$ — полином, то

$$Q(t) = -\gamma t^2 + i\beta t \quad (\gamma \geq 0, \operatorname{Im} \beta = 0) \quad (14)$$

и, следовательно, P является законом Гаусса. Этот результат был обобщен Лукачем [164, 165], который показал, что (14) сохранит силу, если представление (13) заменить более общим: $\varphi(t; P) = C \exp_m \{Q(t)\}$, где \exp_m обозначает m -ю итерацию показательной функции, а $C = (\exp_m(0))^{-1}$.

Легко видеть, что существуют х. ф., допускающие представление (13), но $Q(t)$ является целой функцией, имеющей рост не ниже порядка 1 и нормального типа. Примером может служить х. ф. закона Пуассона $\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$, $\lambda > 0$. Ю. В. Линник [34], стр. 255, поставил вопрос, существуют ли х. ф. вида (13), где $Q(t)$ — целая функция не выше порядка 1 и минимального типа, не являющаяся полиномом вида (14). И. В. Островский [43] получил отрицательный ответ на этот вопрос; этот результат является следствием его более общих результатов, о которых будет идти речь в п. 9. В связи с обобщениями теоремы Марцинкевича см. также работы Кристенсена [81], Кэроли [80], Миллера [179], В. В. Зимогляда [5, 6].

8.4. Х. ф., являющиеся граничными значениями аналитических функций. В ряде работ изучались х. ф. одномерных законов, аналитические в несколько более широком смысле, чем было определено выше. Пусть область $G \subset \mathbb{C}^1$ такова, что ее замыкание содержит некоторую действительную окрестность Γ точки $t=0$, причем ни одна точка Γ не является предельной для недействительных точек границы G . Х. ф. $\varphi(t; P)$ называется аналитической в G , если существует функция $f(t)$, аналитическая в G и непрерывная в $G \cup \Gamma$, такая, что на Γ выполняется $\varphi(t; P) = f(t)$, другими словами, сужение $\varphi(t; P)$ на Γ является граничным значением функции $f(t)$. Функция $f(t)$ в этих условиях единственна, и ее также можно обозначать через $\varphi(t; P)$. Марцинкевич [177] доказал, что если область G содержит интервал $\{t: t = i\tau, 0 < \tau < a\}$, то х. ф. $\varphi(t; P)$ будет также аналитической и в полосе $0 < \text{Im} t < a$. При этом она представима в указанной полосе в виде (1), где интеграл сходится абсолютно. Кюппан и Лукач [111] изучали области аналитичности х. ф., аналитических в полосе вида $0 < \text{Im} t < a$. См. также Эссен [123], Россберг [193], Лукач [163], Лауэ [145].

8.5. Аналитические х. ф. б. д. законов. Д. А. Райков [65] доказал, что если х. ф. $\varphi(t; P)$ одномерного б. д. закона P аналитична в полосе $|\text{Im} t| < R$, то в этой полосе справедливо представление (3), интеграл в правой части которого сходится при $|\text{Im} t| < R$ абсолютно. Отсюда следует, что в полосе $|\text{Im} t| < R$ х. ф. $\varphi(t; P)$ б. д. закона P не имеет корней. Лукач [162] отметил, что х. ф. $\varphi(t; P)$ может аналитически продолжаться за пределы полосы и на прямых $\text{Im} t = \pm R$ иметь корни. Результат Д. А. Райкова [65] перенесен на многомерный случай Кюппаном [90—92]; роль полосы $|\text{Im} t| < R$ в его результате играет область в \mathbb{C}^n вида $\{t: \text{Im} t \in H\}$, где H — выпуклая область в \mathbb{R}^n , содержащая точку 0.

Эссен [123] рассматривал х. ф. одномерных б. д. законов, аналитические в полосе $0 < \text{Im} t < a$ (в смысле п. 8.4). Им доказано, что в этой полосе сохраняет силу формула (3), причем интеграл сходится абсолютно.

8.6. Х. ф. класса D . Следуя Лукачу [172], обозначим через D введенный ван Данцигом класс, состоящий из х. ф. одномерных законов, аналитических в некоторой окрестности точки $t=0$ и таких, что $1/\varphi(it)$ тоже является х. ф.

Рассматривая класс D_E целых х. ф. $\varphi(t)$ порядка $\rho[\varphi] \leq 2$ с действительными корнями с показателем сходимости $\mu[\varphi] < 2$, Лукач [172] доказал, что $D_E \subset D$, и доказал замкнутость класса D_E относительно операций $\varphi(t) \rightarrow \varphi'(t) - [t\varphi''(0)]^{-1}$ и $\varphi(t) \rightarrow \varphi''(t) [\varphi''(0)]^{-1}$. Этот результат позволяет строить многочисленные примеры х. ф. класса D . В частнос-

ти, х. ф. класса D являются такие функции:

$$e^{-\gamma t^2} (\gamma \geq 0), \quad \cos t, \quad \frac{\sin t}{t}, \quad J_0(t), \quad \frac{H_{2k}(t)}{H_{2k}(0)} e^{-t^2/2} \quad (k=1, 2, \dots),$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя, а $H_n(t)$ — полином Эрмита.

И. В. Островский [58] поставил вопрос об описании класса областей в C^1 , являющихся областями мероморфности х. ф. из D ; этот вопрос остается открытым. В [58] показано, что всякая область этого класса симметрична относительно обеих координатных осей и содержит некоторый крест $K(a, b) = \{|\operatorname{Re} t| < a\} \cup \{|\operatorname{Im} t| < b\}$, а также что сам крест $K(\pi, \pi)$ является областью мероморфности некоторой х. ф. из D .

В работе [58] изучается также рост целых х. ф. класса D . Доказано, что существуют целые х. ф. из D с любым наперед заданным порядком $1 \leq \rho \leq \infty$. Однако, в отличие от класса всех целых х. ф. (см. п. 8.2), рост целых х. ф. класса D ограничен сверху: для любой целой х. ф. $\varphi(t) \in D$ выполняется $\ln \ln M(r, \varphi) = O(r)$. Эта оценка — наилучшая, поскольку существуют целые х. ф. из D , для которых $\ln \ln M(r, \varphi) > Cr$, $C > 0$, $r > r_0$.

8.7. Компоненты и α -компоненты законов с аналитическими х. ф. Д. А. Райков [64] доказал, что если х. ф. $\varphi(t; P)$ одномерного закона P аналитична в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$, то в той же полосе аналитична и х. ф. любой компоненты закона P . Этот результат легко переносится на случай полосы вида $-a < \operatorname{Im} t < b$ ($a > 0, b > 0$). Обобщение на многомерный случай получено независимо Кюппаном [88, 92] и И. В. Островским [53]: если х. ф. $\varphi(t; P)$ n -мерного закона P аналитична в области G вида $\{t: \operatorname{Im} t \in B\}$, где B — выпуклая область в R^n , содержащая точку 0 , то в области G аналитична и х. ф. любой компоненты закона P .

Дифференциальные свойства х. ф. компонент одномерного закона, х. ф. которого имеет данное число производных, изучались Дюге [121] и Девинацем [116].

Из результата Д. А. Райкова [64] следует, что если х. ф. одномерного закона P — целая, то целой является и х. ф. любой компоненты P_1 закона P . Этот факт был отмечен независимо Леви [149]. Справедлива следующая оценка роста х. ф. $\varphi_1 = \varphi(t; P_1)$ через рост х. ф. $\varphi = \varphi(t; P)$:

$$M(r, \varphi_1) \leq e^{\alpha r} M(r, \varphi), \quad \alpha = \text{const}, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (15)$$

Эта оценка приведена в работе Д. А. Райкова [64]; близкая оценка имеется в работе Леви [149]. Из (15) следует, что если $\varphi(t; P) \not\equiv 1$, то для порядков х. ф. φ и φ_1 выполняется $\rho[\varphi_1] \leq \rho[\varphi]$, причем, если $\rho[\varphi_1] = \rho[\varphi] > 1$, то и для типов имеем неравенство $\sigma[\varphi_1] \leq \sigma[\varphi]$.

α -разложения (см. п. 6) аналитических х. ф. рассматривались Ю. В. Линником [32], который доказал, что все α -компоненты (на любом множестве $E \subset \mathbb{R}^1$ с предельной точкой в нуле) х. ф., аналитической в круге $|t| < R$ и не имеющей там корней, аналитичны в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$. Это утверждение содержится в таком более общем его результате. Если функция $\varphi_0(t)$ (не обязательно являющаяся х. ф.) аналитична в круге $|t| < R$, не имеет там корней и удовлетворяет условию $\varphi_0(t) \neq \overline{\varphi_0(-t)}$, $-R < t < R$, а $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ — х. ф., связанные с $\varphi_0(t)$ соотношением (9), где $E \subset \mathbb{R}^1$ имеет предельную точку в нуле, то х. ф. $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ аналитичны в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$.

Обобщениями этого результата на счетные и континуальные α -разложения занимались Л. В. Мамай [38—40] и Рамачандран [187—189]. В частности, Рамачандран получил такое усиление приведенного выше результата Ю. В. Линника. Пусть $\varphi_0(t)$ — функция, аналитическая в круге $|t| < R$ и удовлетворяющая условию $\varphi_0(t) = \overline{\varphi_0(-t)}$, $-R < t < R$, а $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ — х. ф., связанные с $\varphi_0(t)$ соотношением (10). Предположим, что $\inf \alpha_j > 0$ и что существует интервал $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, на котором все х. ф. $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ не обращаются в нуль. Тогда все х. ф. $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ аналитичны в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$. Если дополнительно предположить, что $\varphi_0(t) \neq 1$ — целая функция, то все х. ф. $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — тоже целые, причем $\sup_{j \geq 1} \rho[\varphi_j] \leq \rho[\varphi_0]$. α -разложения дифференцируемых х. ф. рассматривались Лаха и Лукачем [143] и Кюпшаном [84]. По поводу α -разложений в \mathbb{R}^n см. [88].

9. Хребтовые функции. Если х. ф. $\varphi(t)$ аналитична в области $G \subset \mathbb{C}^n$ вида $G = \{t: \operatorname{Im} t \in B\}$, где B — выпуклая область в \mathbb{R}^n , содержащая точку 0, то, как уже говорилось ранее (п. 8.1), она представляется в области G в виде (1), причем интеграл в правой части сходится абсолютно. Отсюда легко следует, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(i \operatorname{Im} t)|, \quad t \in G. \quad (16)$$

Это свойство аналитических х. ф. будем называть, следуя Ю. В. Линнику, свойством хребта, а любую (не обязательно являющуюся х. ф.) аналитическую в G функцию $\varphi(t)$, обладающую этим свойством, — хребтовой функцией (хр. ф.). Если дополнительно к (16) выполняется еще условие $\varphi(0) = 1$, то функцию $\varphi(t)$ будем называть нормированной хр. ф.

Хребтовые функции в \mathbb{C}^1 впервые рассматривал Дюге [117]. Важность свойства хребта и хребтовых функций в арифметике вероятностных законов выявилась в работах Ю. В. Линника [25—27, 30—35]. В этих работах был пред-

ложен такой подход*) к изучению компонент вероятностных законов с аналитическими х. ф. Пусть P — закон с х. ф., аналитической в области G указанного выше вида. Тогда (см. п. 8.7) в той же области аналитична и х. ф. любой компоненты закона P ; следовательно, нам нужно изучить всевозможные разложения х. ф. $\varphi(t; P)$ на множители, являющиеся аналитическими в G х. ф. Но все эти х. ф. являются хр. ф. Поэтому можно сначала описать все разложения хр. ф. $\varphi(t; P)$ на множители, являющиеся хр. ф., а затем отобразить те из разложений, которые являются разложениями на х. ф. Первая часть задачи имеет чисто теоретико-функциональный характер. Это видно из следующей теоремы «о сглаживании хребта» ([36], стр. 83, 240), которая по существу принадлежит Ю. В. Линнику, хотя не была им явно сформулирована.

Пусть $\varphi(t)$ — хр. ф. в области $G = \{t: \text{Im} t \in B\}$, где B — выпуклая область в \mathbb{R}^n , содержащая точку 0. Множество всех хр. ф. $\varphi_1(t)$, являющихся делителями $\varphi(t)$ (в том смысле, что $\varphi(t)/\varphi_1(t)$ — тоже хр. ф. в G), совпадает со множеством аналитических в G функций $\varphi_1(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$1 \leq \left| \frac{\varphi_1(i \text{Im} t)}{\varphi_1(t)} \right| \leq \left| \frac{\varphi(i \text{Im} t)}{\varphi(t)} \right|, \quad t \in G. \quad (17)$$

Если $G = \mathbb{C}^n$ и заданная функция $\varphi(t)$ — целая, то задача об описании множества всех целых функций $\varphi_1(t)$, удовлетворяющих неравенству (17), может быть исследована с помощью методов теории целых функций, которые в широком классе случаев позволяют получить полное описание. С помощью такого подхода и были получены результаты Ю. В. Линника и другие, о которых шла речь в п. 5.2.

Исследование хр. ф. в одномерном случае было проведено Дюге [117], который показал, что всякая непостоянная хр. ф. $\varphi(t)$ в полосе $-a < \text{Im} t < b$ обладает свойствами: а) $\arg \varphi(i\tau) = \text{const}$, $-a < \tau < b$; б) $\ln |\varphi(i\tau)|$ — выпуклая функция от τ , $-a < \tau < b$; в) корни $\varphi(t)$ расположены симметрично относительно оси $\text{Re} t = 0$. Заметим, что из свойства б) следует оценка $\ln |\varphi(i\tau)| > -C\tau$, $C > 0$, для всякой хр. ф. $\varphi(t)$ в полуплоскости $\text{Im} t > -a$.

Дюге [117] показал, что класс нормированных хр. ф. в полосе существенно шире класса х. ф., аналитических в той же полосе. В частности, им построен пример нормированной целой хр. ф. без корней, не являющейся целой х. ф.

В работе В. М. Тупицыной [68] получена для хр. ф. теорема, аналогичная теореме А. Я. Хинчина [69] о факторизации. Чтобы сформулировать ее, условимся считать полосу, в которой рассматриваются хр. ф., фиксированной, а сами хр. ф. — нормированными. Будем говорить, что хр. ф. $\varphi(t)$

*) Ю. В. Линник рассматривал лишь одномерные законы, но его подход сохраняет силу и в многомерном случае.

неразложима, если из представления $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — хр. ф., следует, что $\varphi_1(t)$ или $\varphi_2(t)$ имеет вид $e^{i\alpha t}$, $\text{Im}\alpha = 0$. Теорема [68], аналогичная теореме А. Я. Хинчина, формулируется так. Всякая хр. ф. $\varphi(t)$, имеющая неразложимые делители, представляется в виде $\varphi(t) = \varphi_0(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)\dots$, где $\varphi_0(t)$ — хр. ф., не имеющая неразложимых делителей, а $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ — неразложимые хр. ф. в конечном или счетном числе (в последнем случае бесконечное произведение равномерно сходится на любом компакте в полосе). В. М. Тупицына [68] доказала также, что класс хр. ф., не имеющих неразложимых делителей, совпадает с классом хр. ф., не имеющих корней в полосе $a < \text{Im}t < b$; таким образом, проблема, аналогичная проблеме описания класса I_0 , допускает здесь простое решение. Заметим, что примеры неразложимых хр. ф. (существование их следует из приведенного выше результата) удалось в явном виде построить [68] только в случае целых хр. ф.

В связи с обобщениями теоремы Марцинкевича [176] (см. п. 8.3) И. В. Островский [44, 52] изучал классы целых функций, более общие, чем класс целых хр. ф. Приведем некоторые из его результатов.

Теорема I. Пусть $F(\omega)$ и $f(t)$ — целые функции и $F(\omega) \neq \text{const}$. Если функция $\varphi(t) = F(f(t))$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(t)| \leq M(|\text{Im}t|, \varphi), \quad \forall t \in \mathbb{C}^1, \quad (18)$$

то либо $f(t)$ — полином степени ≤ 2 , либо $f(t)$ — целая функция не ниже порядка 1 и нормального типа.

Теорема II. Пусть $f(t)$ — целая функция порядка ρ , не являющаяся полиномом, а $g(t)$ — целая функция, удовлетворяющая условию: $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} \ln \ln M(r, g) < \rho$, если $\rho > 0$, и $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\ln r)^{-1} \ln \ln M(r, g) < \infty$, если $\rho = 0$. Если функция

$\varphi(t) = g(t) \exp f(t)$ удовлетворяет условию (18), то $f(t)$ — целая функция не ниже порядка 1 и нормального типа.

Условие (18) менее ограничительное, чем свойство хребта, поскольку $|\varphi(i \text{Im}t)| \leq M(|\text{Im}t|, \varphi)$. Поэтому при $F(\omega) = e^\omega$ из теоремы I получаем отрицательный ответ на вопрос Ю. В. Линника, сформулированный в п. 8.3. При $F(\omega) = \exp_m(\omega)$ из теоремы I получаем обобщение результата Лукача [164, 165]. Теорема II является дополнением к теореме Марцинкевича [176] (см. п. 8.3).

Утверждение теоремы I о том, что функция $f(t)$ не ниже порядка 1 и нормального типа, можно записать в виде

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \ln M(r, f) > 0.$$

В. В. Зимогляд [5] усилил теорему I, доказав, что $\overline{\lim}$ можно заменить на \lim . Приведем также следующую теорему В. В. Зимогляда [6]. Пусть $F(\omega)$ и $f(t)$ — целые функции и $|F(r)| = M(r, F) \neq \text{const}$, $0 < r < \infty$. Если функция $\varphi(t) = F(\lambda_1 e^{it} + \lambda_2 e^{-it} + f(t))$ ($\lambda_1, \lambda_2 = \text{const}$) является хребтовой, то $f(t)$ — либо полином степени ≤ 2 , либо $\rho[f] \geq 1$. Принимая $F(\omega) = e^\omega$ и считая $f(t)$ полиномом, заключаем, что $f(t)$ — степени ≤ 2 , откуда легко следует, что $\varphi(t)$ является в этом случае х. ф. композиции законов Гаусса и Пуассона. Этот результат принадлежит Лукачу [164, 165].

10. Арифметика вероятностных законов на группах. Развитие арифметики вероятностных законов на группах в настоящее время сильно отстает от развития арифметики вероятностных законов в \mathbb{R}^n . Это объясняется, по-видимому, тем обстоятельством, что пока не найдено подхода к изучению вероятностных законов на группах, открывающего пути для применения теоретико-функционального аппарата.

Мы ограничимся указанием работ, содержащих результаты по арифметике вероятностных законов на группах, с кратким описанием характера этих результатов.

Результаты, относящиеся к арифметике законов на конечных абелевых группах, имеются в работе Н. Н. Воробьева [2]. Н. Н. Воробьев называет закон безгранично разложимым, если для любого $n = 2, 3, \dots$ этот закон можно представить в виде композиции n законов, не являющихся единичными. В [2] изучены некоторые свойства безгранично разложимых законов и, в частности, доказано, что для того, чтобы закон был безгранично разложимым, необходимо и достаточно, чтобы его спектр являлся объединением нескольких классов смежности по ненулевой подгруппе. Отсюда следует, что всякий закон, спектр которого есть объединение нескольких классов смежности по ненулевой подгруппе (в частности, если спектр совпадает со всей группой), обязательно является разложимым и, более того, не может быть пределом последовательности неразложимых законов. Этот факт указывает на существенные отличия арифметики законов на конечных абелевых группах от арифметики законов в \mathbb{R}^n : как говорилось в п. 4, для законов в \mathbb{R}^n не может быть достаточных условий разложимости, выраженных в терминах спектра, а множество неразложимых законов плотно во множестве всех законов.

Вопрос о справедливости теоремы, аналогичной теореме Крамера о компонентах закона Гаусса в \mathbb{R}^n , для законов на мультипликативной группе комплексных чисел, по модулю равных 1 (на окружности), был поставлен Леви [151] и решен отрицательно Марцинкевичем [178], который указал широкий класс абсолютно непрерывных законов, включающий законы Гаусса на окружности, имеющих неразложимые ком-

поненты. В связи с этой работой Марцинкевича см. заметку Леви [157]. Н. Н. Воробьев [2] показал, что теорема, аналогичная теореме Крамера, несправедлива для законов на конечных абелевых группах.

Вопрос о справедливости теоремы, аналогичной теореме Д. А. Райкова о компонентах закона Пуассона в \mathbb{R}^1 , для законов на окружности изучался Леви [151], однако не был полностью решен. Полное решение, причем для более общего случая локально компактных абелевых групп со второй аксиомой счетности, получил А. Л. Рухин [66, 67].

Партасаратхи, Рао и Варадген [181] получили аналоги теорем А. Я. Хинчина о факторизации и о законах, не имеющих неразложимых компонент, для законов на локально компактных абелевых метрических сепарабельных группах. Формулировки этих аналогов существенно отличаются от формулировок теорем А. Я. Хинчина для законов в \mathbb{R}^n в связи с возможным наличием так называемых идемпотентных законов.

Совокупность неразложимых законов на полной локально компактной метрической сепарабельной группе (не обязательно абелевой) изучалась в работе Партасаратхи, Рао и Варадгена [180]. Некоторые их результаты в применении к \mathbb{R}^n мы формулировали в п. 4. Сейчас отметим, что утверждение о том, что неразложимые законы образуют в топологии слабой сходимости плотное G_δ во множестве всех законов, доказано в [180] для законов на любых полных сепарабельных метрических группах. При дополнительном предположении недискретности группы в работе [180] установлено, что плотное G_δ образуют уже неразложимые неатомические законы, не обращающиеся в нуль на непустых открытых множествах. В [180] показано также, что абсолютно непрерывные относительно меры Хаара неразложимые законы образуют плотное множество в классе всех абсолютно непрерывных законов в топологии, определяемой L_1 -расстоянием между плотностями, если относительно группы предположить следующее: она локально компактна, некомпактна, метрическая, абелева и сепарабельна. К этому же кругу вопросов относится работа Хейера и Тортра [128].

Арифметика законов на мультипликативной группе действительных чисел без нуля рассматривалась В. М. Золотаревым [8].

В работе Тортра [206] изучаются разложения закона равномерного распределения на окружности. См. также Леви [154, 157], Котлярский [137], Хейер [126, 127].

11. Дельфийские полугруппы. Д. Кендалл [131, 132] выделил класс абстрактных топологических полугрупп, в которых справедливы теоремы, аналогичные теоремам А. Я. Хинчина о факторизации и о законах, не имеющих неразложимых

мых компонент. Эти полугруппы названы Д. Кендаллом «дельфийскими».

Приведем основные определения теории Д. Кендалла.

Пусть G — абелева топологическая полугруппа с единицей e ; полугрупповую операцию будем записывать как умножение. Элемент $u_1 \in G$ назовем компонентой элемента $u \in G$, если $u = u_1 u_2$ для некоторого $u_2 \in G$. Элемент $u \in G$ называется неразложимым, если его компонентами являются лишь u и e . Элемент $u \in G$ называется безгранично делимым (б. д.), если для любого $n = 2, 3, \dots$ найдется элемент $u_n \in G$ такой, что $u = u_n^n$. Следуя Д. Кендаллу [131, 132], полугруппу G , обладающую гомоморфизмом Δ в аддитивную полугруппу неотрицательных чисел, будем называть дельфийской, если выполнены следующие три условия:

I. $\Delta(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = e$.

II. Для любого $u \in G$ множество компонент u компактно.

III. Если для треугольной матрицы (u_{nk}) , $1 \leq k \leq n$, $n = 1, 2, \dots$ элементов из G , удовлетворяющей условию

$\max_{1 \leq k \leq n} \Delta(u_{nk}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, существует предел $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n u_{nk}$, то

u — б. д. элемент.

Простейшим примером дельфийской полугруппы является мультипликативная полугруппа чисел полуинтервала $(0, 1)$ с обычной топологией и гомоморфизмом $\Delta(u) = -\ln u$. Д. Кендалл [132] показал, что дельфийскими являются некоторые полугруппы, встречающиеся в теории восстановления: полугруппа положительных последовательностей восстановления (арифметика которой изучалась им ранее в [130]) и полугруппа p -функций Кингмена (см. [134—136]). Другие важные примеры дельфийских полугрупп изучаются в работах Ламперти [144], Давидсона [112—114], Бингхема [78, 79]. Заметим, что, как показал А. Е. Фрынтов, класс функций $\varphi(t)$, хребтовых в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$ (см. п. 9) и нормированных условиями $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, также является дельфийской полугруппой; гомоморфизм Δ можно ввести равенством $\Delta(\varphi) = -\ln \varphi(ir)$, где $0 < r < R$. Давидсон [112, 114] разработал обобщение теории Д. Кендалла, которое позволяет включить и полугруппу всех одномерных вероятностных законов в рамки абстрактной теории.

Основными вопросами, возникающими при изучении конкретной дельфийской полугруппы, являются вопросы об описании совокупности неразложимых элементов и об описании класса I_0 — элементов, не имеющих неразложимых компонент. Для полугрупп положительных последовательностей восстановления и p -функций Кингмена эти вопросы подробно исследовались Давидсоном [112, 113]. Для некоторых других дельфийских полугрупп вопрос об общих свойствах класса I_0

обсуждается в его работе [114]. Отметим, что в произвольной дельфийской полугруппе класс I_0 может не обладать свойствами, приведенными в п. 5.4 настоящего обзора. В некоторых дельфийских полугруппах класс I_0 совпадает с классом всех б. д. элементов. Примером служит — как это следует из результата В. М. Тупицыной [68] (см. п. 9) — полугруппа функций $\varphi(t)$, хребтовых в полосе и удовлетворяющих условиям $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$.

Опираясь на общие результаты Давидсона, Бингхем [78] получил аналоги теорем А. Я. Хинчина для так называемых полугрупп с обобщенной сверткой, введенных Урбаником [207—209]. В результатах Бингхема содержатся, в частности, аналоги теорем А. Я. Хинчина для полугрупп, рассмотренных Кингменом [133] в связи с исследованием сферически симметричного случайного блуждания. И. В. Островский [60, 61] дал описание класса I_0 в этих полугруппах.

Цитированные выше работы Д. Кендалла, Давидсона, а также работы по дельфийским полугруппам ряда других авторов вошли в сборник [200], посвященный памяти Давидсона.

12. Разное. Пусть P — произвольный n -мерный закон; обозначим через $G(P)$ множество всех гауссовых компонент закона P , то есть компонент $P_{\beta, Q}$ с х. ф. вида

$$\varphi(t; P_{\beta, Q}) = \exp \{i(\beta, t) - Q(t)\},$$

где $\beta \in \mathbb{R}^n$, $Q(t)$ — неотрицательная квадратичная форма (возможно $Q(t) \equiv 0$). Рао поставил вопрос о существовании во множестве $G(P)$ закона $P_{\beta, Q}$, максимального в том смысле, что для любого закона $P_{\beta_1, Q_1} \in G(P)$ форма $Q - Q_1$ неотрицательна. В одномерном случае ответ на этот вопрос утвердителен, но уже в двумерном оказывается отрицательным, что было установлено одновременно Рамачандраном [36] и И. В. Островским [55].

В одномерном случае Поллард [182] дал необходимые и достаточные условия наличия у закона P гауссовой компоненты. См. также Рюэгг [195].

Льюис [158] установил, что если P_1 и P_2 — компоненты закона P_0 равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ такие, что $P_0 = P_1 * P_2$, то либо законы P_1 и P_2 сингулярны, либо один из них дискретный, а другой абсолютно непрерывный. Как показал Дюге [122], второй случай всегда имеет место, если $S(P_1)$ и $S(P_2)$ можно поместить на отрезок длины $(b - a)/2$.

В работе Симидзу [198] указан широкий класс компонент закона Коши. См. также Арканогели [73] и Пуглизи [184].

Стаудт и Тата [199] показали, что для любого $m=2, 3, \dots$ существуют законы P_m с х. ф. $\varphi(t; P_m)$ такими, что

$$\operatorname{Im} \varphi(t; P_m) \neq 0 \quad (t \in \mathbb{R}^1), \text{ но } \operatorname{Im} [\varphi(t; P_m)]^n \equiv 0 \quad (t \in \mathbb{R}^1).$$

В частности, существуют ¹одномерные законы P , не являющиеся симметричными относительно начала координат, такие, что $P * P$ обладает этой симметрией.

В работах Тейчера [201, 203] рассматриваются семейства законов, компоненты которых принадлежат этим же семействам. В частности, установлено, что таким семейством является семейство биномиальных законов. Показано также, что α -компоненты (см. п. 8) биномиального закона являются биномиальными законами. Обобщения этого результата на случай счетных α -разложений получены Кюппаном [85] и Рамачандром [188]. Компоненты обобщенных биномиальных и полиномиальных распределений изучались Калленбергом [129], по поводу компонент композиции биномиального и пуассонова законов см. [185, 188].

В работе Тортра [205] исследуются признаки разложимости одномерных законов, х. ф. которых являются четными, неотрицательными и выпуклыми на полуоси $[0, \infty)$, на компоненты с х. ф. такого же вида.

Кубик [139] вводит следующее определение. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — два класса законов, причем $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$. Класс \mathcal{X} называется замкнутым относительно разложений в классе \mathcal{Y} , если из условий $P \in \mathcal{X}$, $P_1, P_2 \in \mathcal{Y}$, $P = P_1 * P_2$ вытекает, что $P_1, P_2 \in \mathcal{X}$. Приведем один из результатов работы [139]. Пусть $\varphi(t)$ — х. ф. б. д. закона, \mathcal{X} — класс всех б. д. законов с х. ф. вида $\{\varphi(t)\}^\alpha$, $0 \leq \alpha < \infty$. Если класс \mathcal{X} замкнут относительно разложений в классе Л. А. Я. Хинчина, то $\varphi(t)$ — либо х. ф. закона Гаусса, либо $\varphi(t)$ или $\varphi(-t)$ являются х. ф. б. д. закона без гауссовой компоненты, спектральная мера Леви которого абсолютно непрерывна и ее плотность имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, b], \\ 2ax(1+x^2)^{-1}, & x \in [0, b], \end{cases}$$

где $a > 0$, $b > 0$.

В работе Тейгелса [204] изучается класс одномерных вероятностных законов, плотности которых с точностью до постоянного множителя совпадают с их характеристическими функциями. Приведем один из результатов этой работы. Если вероятностная плотность совпадает с точностью до постоянного множителя со своей х. ф. и является целой функцией, то ее рост не ниже типа $1/2$ при порядке 2.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Айзенберг Л. А., Губанова А. С., Об областях голоморфности функций с действительными или неотрицательными тейлоровскими коэффициентами. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1972, вып. 15, 50—55 (РЖМат, 1972, 7Б189)
2. Воробьев Н. И., Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах. Мат. сб., 1954, 34 (76), № 1, 89—126 (РЖМат, 1955, 1858)
3. Гнеденко Б. В., О характеристических функциях. Бюлл. МГУ, 1937, 1, № 5, 17—18
4. Гольдберг А. А., Островский И. В., Применение теоремы У. К. Хеймана к одному вопросу теории разложений вероятностных законов. Укр. мат. ж., 1967, 19, № 3, 104—106 (РЖМат, 1968, 2В25)
5. Зимогляд В. В., О росте целых функций, удовлетворяющих специальным неравенствам. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1968, вып. 6, 30—41 (РЖМат, 1969, 12Б201)
6. —, Об одном классе целых функций, обладающих свойством «хребта». В сб. «Мат. физика и функц. анализ», ФТИНТ АН УССР, 1969, вып. 1, 172—190 (РЖМат, 1970, 10Б162)
7. Зингер А. А., Линник Ю. В., Об одном аналитическом обобщении теоремы Крамера и его применении. Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 51—56 (РЖМат, 1958, 2225)
8. Золотарев В. М., Общая теория перемножения независимых случайных величин. Докл. АН СССР, 1962, 142, № 4, 788—791 (РЖМат, 1962, 9В18)
9. Ильинский А. И., О неразложимых компонентах некоторых безгранично делимых законов. Докл. АН СССР, 1974, 215, № 3, 529—531 (РЖМат, 1974, 7В11)
10. Кудина Л. С., Неразложимые законы с наперед заданным спектром. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1972, вып. 16, 206—212 (РЖМат, 1973, 4В21)
11. —, Неразложимость закона арксинуса. Докл. АН СССР, 1972, 204, № 1, 25—26 (РЖМат, 1972, 8В16)
12. —, О замыкании множества неразложимых распределений с фиксированным спектром. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1973, вып. 17, 51—56 (РЖМат, 1973, 10В16)
13. Ладохин В. И., О квазинормальном распределении. В сб. «Итог. Науч. конференция Казанск. ун-та», 1963. Секц. мат., киберн. и теория вероятн., мех. Казань, 1964, 74—76 (РЖМат, 1966, 7В10)
14. —, Обобщение некоторых теорем теории вероятностей на случай комплексных распределений. Уч. зап. Казан. ун-т, 1966, 125, № 6, 94—100 (РЖМат, 1967, 7В26)
15. —, Теоремы Крамера, Линдеберга, Чебышева для комплексных распределений. Докл. АН СССР, 1968, 181, № 3, 542—545 (РЖМат, 1969, 7В21)
16. Левин Б. Я., Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956, 632 с. (РЖМат, 1958, 2027К)
17. Лившиц Л. З., Достаточные условия, при которых двумерный безгранично делимый закон имеет только безгранично делимые компоненты. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1970, вып. 12, 36—59 (РЖМат, 1971, 8В10)
18. —, Про умови належності безмежно подільного закону до класу I_0 . Доповіди АН УРСР, 1972, А, № 11, 992—993 (РЖМат, 1973, 3В11)

19. —, О некоторых условиях отсутствия неразложимых компонент у бесгранично делимых законов. I, II. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1974, вып. 19, 53—66 (РЖМат, 1974, 11В17)
20. —, О некоторых условиях отсутствия неразложимых компонент у бесгранично делимых законов. III. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1974, вып. 20, 86—101 (РЖМат, 1974, 11В18)
21. —, Островский И. В., О многомерных бесгранично делимых законах, имеющих только бесгранично делимые компоненты. Докл. АН СССР, 1971, 198, № 6, 1273 (РЖМат, 1971, 11В14)
22. —, —, О многомерных бесгранично делимых законах, имеющих только бесгранично делимые компоненты. В сб. «Мат. физика и функц. анализ», ФТИНТ АН УССР, 1971, вып. 2, 61—75 (РЖМат, 1972, 4В10)
23. Линник Ю. В., Одна задача о характеристических функциях вероятностных распределений. Успехи мат. наук, 1955, 10, № 1, 137—138 (РЖМат, 1956, 3172)
24. —, Замечание к теореме Крамера о разложении нормального закона. Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 4, 479—480 (РЖМат, 1957, 7193)
25. —, О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 1, 34—59 (РЖМат, 1958, 3929)
26. —, О композиции вероятностных законов Гаусса и Пуассона. Докл. АН СССР, 1957, 114, № 1, 21—24 (РЖМат, 1958, 6927)
27. —, Некоторые теоремы о разложении бесгранично делимых законов. Докл. АН СССР, 1957, 116, № 4, 549—551 (РЖМат, 1959, 1739)
28. —, О разложении бесгранично делимых законов. Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 735—737 (РЖМат, 1960, 5556)
29. —, Общие теоремы о разложении бесгранично делимых законов. I. Формулировки. Три основные леммы. Необходимые условия. Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 1, 3—40 (РЖМат, 1959, 620). Исправления: там же, 1960, 5, № 3, 376 (РЖМат, 1963, 4В94)
30. —, Общие теоремы о разложении бесгранично делимых законов. II. Достаточные условия (случай конечного пуассонова спектра). Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 1, 55—85 (РЖМат, 1960, 5557)
31. —, Общие теоремы о разложении бесгранично делимых законов. III. Достаточные условия (Счетный ограниченный пуассонов спектр. Неограниченный спектр. «Устойчивость»). Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 2, 150—171 (РЖМат, 1961, 3В17)
32. —, Об « α -разложениях» бесгранично делимых вероятностных законов. Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 1, 14—23 (РЖМат, 1961, 12В17)
33. —, Обзор некоторых новых применений теории функций комплексного переменного в теории вероятностей (тезисы). Тр. Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике, 1958. Ереван, АН АрмССР, 1960, 25 (РЖМат, 1961, 6В5)
34. —, Разложения вероятностных законов. Л., Ленингр. ун-т, 1960, 263 с. (РЖМат, 1963, 7В110К)
35. —, Некоторые вопросы теории целых функций, возникающие из теории вероятностей. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексн. переменного». М., Физматгиз, 1961, 49—57 (РЖМат, 1964, 2Б208)
36. —, Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972, 480 с. (РЖМат, 1973, 8В20К)

37. —, Скитович В. П., Еще об обобщениях теоремы Г. Крамера. Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 1, 39—44 (РЖМат, 1959, 614). Поправки: там же, 1960, № 13, 152 (РЖМат, 1963, 7В111); 1961, № 7, 168 (РЖМат, 1962, 3В11)
38. Мамай Л. В., О некоторых теоремах теории положительно определенных функций. Докл. АН СССР, 1959, 126, № 2, 271—273 (РЖМат, 1961, 11В30)
39. —, К теории характеристических функций. Вестн. Ленингр. ун-та, 1960, № 1, 85—99 (РЖМат, 1963, 6В73)
40. —, Разложения континуального типа для характеристических функций. Вестн. Ленингр. ун-та, 1965, № 1, 34—46 (РЖМат, 1967, 11В11)
41. Милка А. Д., Неразложимость выпуклой поверхности. Укр. геометр. сб., 1973, вып. 13, 112—129 (РЖМат, 1973, 8А523)
42. Мишейкис Ф. Ф., О некоторых классах законов распределения. Лит. мат. сб., 1972, 12, № 3, 101—106 (РЖМат, 1973, 2В18)
43. Островский И. В., О применении одной закономерности, установленной Виманом и Валироном, к исследованию характеристических функций вероятностных законов. Докл. АН СССР, 1962, 143, № 3, 532—535 (РЖМат, 1964, 4В8)
44. —, О целых функциях, удовлетворяющих некоторым специальным неравенствам, связанным с теорией характеристических функций вероятностных законов. Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1963, 135, Зап. мех.-мат. фак. и Харьковск. мат. о-ва, 29, 145—168 (РЖМат, 1964, 7В146)
45. —, О безгранично делимых законах с неограниченным пуассоновским спектром. Докл. АН СССР, 1963, 152, № 6, 1301—1304 (РЖМат, 1964, 7В25)
46. —, О разложениях решетчатых безгранично делимых законов. Вестн. Ленингр. ун-та, 1964, № 19, 51—60 (РЖМат, 1967, 2В30)
47. —, О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. Успехи мат. наук, 1965, 20, № 4, 166—171 (РЖМат, 1966, 1В13)
48. —, Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1965, 79, 198—235 (РЖМат, 1965, 12В19)
49. —, О разложениях безгранично делимых законов без гауссовой компоненты. Докл. АН СССР, 1965, 161, № 1, 48—51 (РЖМат, 1965, 7В17)
50. —, Многомерный аналог теоремы Ю. В. Линника о разложениях композиции законов Гаусса и Пуассона. Теория вероятностей и ее применения, 1965, 10, № 4, 742—745 (РЖМат, 1966, 4В14). Поправка: там же, 1967, 12, № 3, 586—587
51. —, О разложении многомерных вероятностных законов. Докл. АН СССР, 1966, 169, № 5, 1017—1019 (РЖМат, 1966, 12В15)
52. —, О росте целых характеристических функций вероятностных законов. В сб. «Соврем. пробл. теории аналит. функций». М., «Наука», 1966, 239—245 (РЖМат, 1967, 5В13)
53. —, Некоторые свойства голоморфных характеристических функций многомерных вероятностных законов. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1966, вып. 2, 169—177 (РЖМат, 1968, 12В33)
54. —, О разложениях многомерных безгранично делимых законов без гауссовой компоненты. Вестн. Харьковск. ун-та. Сер. мех.-мат., 1966, № 14, 51—72 (РЖМат, 1967, 8В3)
55. —, Об одном вопросе С. Р. Рао. Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, № 2, 317—318 (РЖМат, 1970, 2В16)
56. —, О безгранично делимых законах, имеющих только безгранично делимые компоненты. Докл. АН СССР, 1970, 193, № 6, 1238—1240 (РЖМат, 1970, 12В20)
57. —, О некоторых классах безгранично делимых законов. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, 34, № 4, 923—944 (РЖМат, 1971, 2В17)

58. —, Об одном классе характеристических функций. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1970, 111, 195—207 (РЖМат, 1971, 7В22)
59. —, До теорії розкладань багатовимірних безмежно подільних законів. Доповіді АН УРСР, 1972, А, № 11, 997—1000 (РЖМат, 1973, 3В10)
60. —, Описание класса I_0 в специальной полугруппе вероятностных мер. Докл. АН СССР, 1973, 209, № 4, 788—791 (РЖМат, 1973, 7В5)
61. —, Описание класса I_0 в одной специальной полугруппе вероятностных мер. В сб. «Мат. физика и функц. анализ», ФТИНТ АН УССР, 1973, вып. 4, 3—12 (РЖМат, 1974, 7В12)
62. Райков Д. А., О разложении закона Пуассона. Докл. АН СССР, 1937, 14, 9—12
63. —, Об одном свойстве полиномов деления круга. Мат. сб., 1937, 2, 379—382
64. —, О разложении законов Гаусса и Пуассона. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1938, 2, 91—124
65. —, Одна теорема из теории аналитических характеристических функций. Изв. НИИ мат. и мех. при Томск. ун-те, 1938, 2, № 2, 8—11
66. Рухин А. Л., Некоторые статистические и вероятностные задачи на группах. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1970, 111, 52—109 (РЖМат, 1971, 6В138)
67. —, О законе Пуассона на группах. Лит. мат. сб., 1970, 10, № 3, 537—543 (РЖМат, 1971, 7В9)
68. Тупицына В. М., Об арифметике хребтовых функций. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1972, вып. 15, 142—152 (РЖМат, 1972, 7В177)
69. Хинчин А. Я., Об арифметике законов распределения. Бюлл. МГУ, 1937, А1, 1, 6—17
70. Чистяков Г. П., Обобщение теорем Г. Крамера и Ю. В. Линника — В. П. Скитовича. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 2, 345—350 (РЖМат, 1970, 10В10)
71. —, О принадлежности классу I_0 законов с неаналитическими характеристическими функциями. Докл. АН СССР, 1971, 201, № 2, 280—283 (РЖМат, 1972, 3В15)
72. Яковлева Н. И., О росте целых характеристических функций вероятностных законов. Теория функций, функц. анализ и их прил. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1972, вып. 15, 43—49 (РЖМат, 1972, 7В165)
73. Arcanogeli F., Sulla decomposizione di una variabile casuale seguente la legge di Cauchy. Boll. Unione mat. ital., 1965, 20, № 2, 177—180 (РЖМат, 1966, 3В24)
74. Berthuet R., Sur la loi exponentielle tronquée. C. r. Acad. sci., 1970, 271, № 20, А1010—А1013 (РЖМат, 1971, 6В8)
75. —, Sur la loi exponentielle tronquée. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1972, 21, № 4, 300—328 (РЖМат, 1972, 4В6)
76. —, Factorisation des distributions de Cantor. Ann. sci. Univ. Clermont. Math., 1972, № 49, fasc. 8, 1—9 (РЖМат, 1973, 11В13)
77. —, Remarque sur la factorisation de la distribution triangulaire. Ann. sci. Univ. Clermont. Math., 1972, № 49, fasc. 8, 1—2 (РЖМат, 1973, 11В14)
78. Bingham N. H., Factorization theory and domains of attraction for generalized convolution algebras. Proc. London Math. Soc., 1971, 23, № 1, 16—30 (РЖМат, 1972, 2В35)
79. —, Positive definite functions on spheres. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1973, 73, № 1, 145—156 (РЖМат, 1973, 5В123)
80. Caroli R., Sur les fonctions caractéristiques de lois de probabilité. Publ. Inst. statist. Univ. Paris, 1964, 13, № 1, 44—53 (РЖМат, 1965, 3В10)
81. Christensen I. F., Some further extensions of a theorem of Marcinkiewicz. Pacif. J. Math., 1962, 12, № 1, 59—67 (РЖМат, 1964, 4В106)

82. Cramér H., Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. *Math. Z.*, 1936, 41, 405—414
83. —, On the factorisation of certain probability distribution. *Ark. mat.*, 1949, 1, № 7, 61—65
84. Cuppens R., Sur la décomposition d'une fonction $2q$ fois dérivable à l'origine en produit infini de fonctions caractéristiques. *C. r. Acad. sci.*, 1963, 256, № 18, 3806—3808 (PЖMar, 1963, 12B98)
85. —, Sur un théorème de Mamay. *C. r. Acad. sci.*, 1963, 257, № 3, 586—588 (PЖMar, 1964, 2B176)
86. —, Sur la décomposition de la composition d'une loi normale et d'une loi de Poisson. *C. r. Acad. sci.*, 1966, AB 262, № 20, A1113—A1116 (PЖMar, 1967, 2B18)
87. —, Sur les fonctions caractéristiques analytiques. *C. r. Acad. sci.*, 1966, 263, № 2, A86—A88 (PЖMar, 1968, 2B28)
88. —, Décomposition des fonctions caractéristiques analytiques. *C. r. Acad. sci.*, 1966, 263, № 3, A133—A135 (PЖMar, 1967, 5B14)
89. —, Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles. *C. r. Acad. sci.*, 1966, 263, № 18, A616—A619 (PЖMar, 1967, 6B14)
90. —, Extensions de la notion de fonction caractéristique analytique. *C. r. Acad. sci.*, 1966, 263, № 19, A682—A684 (PЖMar, 1967, 12B19)
91. —, Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Paris, 1967, 111 p. (PЖMar, 1969, 1B16Д)
92. —, Décomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires. *Publs Inst. statist. Univ. Paris*, 1967, 16, № 2, 61—153 (PЖMar, 1969, 10B12)
93. —, Sur les produits finis de lois de Poisson. *C. r. Acad. sci.*, 1968, 266, № 14, A726—A729 (PЖMar, 1968, 12B26)
94. —, Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles à spectre de Poisson positif. *C. r. Acad. sci.*, 1968, 266, № 17, A877—A879 (PЖMar, 1969, 1B17)
95. —, Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles de plusieurs variables à spectre de Poisson continu. *C. r. Acad. sci.*, 1968, 267, № 23, A899—A901 (PЖMar, 1970, 1B23)
96. —, Sur un théorème de Paul Lévy. *Publs Inst. statist. Univ. Paris*, 1968, 17, № 3, 1—6 (PЖMar, 1970, 10B28)
97. —, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions of several variables. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1969, 12, № 1, 59—72 (PЖMar, 1969, 8B11)
98. —, On the decomposition of infinitely divisible probability laws without normal factor. *Pacif. J. Math.*, 1969, 28, № 1, 61—76 (PЖMar, 1969, 9B19)
99. —, Application de la théorie des fonctions caractéristiques de plusieurs variables au problème de la décomposition des produits de lois de Poisson d'une variable. *C. r. Acad. sci.*, 1969, 268, № 11, A605—A608 (PЖMar, 1969, 12B16)
100. —, Décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles de plusieurs variables à spectre de Poisson continu. *Ann. Inst. H. Poincaré* 1969, Sect. B, 5, № 2, 123—133 (PЖMar, 1970, 2B14)
101. —, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous Poisson spectrum. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1969, 21, № 1, 145—152 (PЖMar, 1970, 2B15)
102. —, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with continuous Poisson spectrum. II. *Pacif. J. Math.*, 1969, 29, № 3, 521—525 (PЖMar, 1970, 5B11)
103. —, On finite products of Poisson type characteristic function of several variables. *Ann. Math. Stat.*, 1969, 40, № 2, 434—444 (PЖMar, 1971, 8B18)

104. —, Application de la théorie des fonctions caractéristiques de plusieurs variables à l'étude de certains problèmes de la décomposition des fonctions caractéristiques d'une variable. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1970, 15, № 2, 144—156 (PJKMar, 1970, 12B18)
105. —, Quelques nouveaux résultats en arithmétique des lois de probabilité. *C. r. Acad. sci.*, 1970, 270, № 18, A1182—A1185 (PJKMar, 1970, 12B19)
106. —, Quelques nouveaux résultats en arithmétique des lois de probabilité. *Colloq. int CNRS*, 1970, № 186, 97—112
107. —, Ensembles indépendants et décomposition des fonctions caractéristiques. *C. r. Acad. sci.*, 1971, 272, № 22, A1464—A1466 (PJKMar, 1971, 12B26)
108. —, Sur un problème de R. Shimizu, *J. Multivar. Anal.*, 1971, 1, № 3, 276—287
109. —, Isomorphismes et arithmétique des semigroupes de lois de probabilité. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1972, 21, № 2, 147—153 (PJKMar, 1972, 4B5)
110. —, Independent sets and factorization of probability laws. *J. Multivar. Anal.*, 1972, 2, № 3, 239—248 (PJKMar, 1973, 2B17)
111. —, Lukacs E., On the domains of definition of analytic characteristic functions. *Ann. Math. Stat.*, 1970, 41, № 3, 1096—1101 (PJKMar, 1971, 12B27)
112. Davidson R., Arithmetic and other properties of certain Delphic semigroups. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1968, 10, № 2, 120—145 (PJKMar, 1969, 4B39)
113. —, Arithmetic and other properties of certain Delphic semigroups. II. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1968, 10, № 2, 146—172 (PJKMar, 1969, 4B40)
114. —, More delphic theory and practice. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1969, 13, № 3-4, 191—203 (PJKMar, 1970, 6B50)
115. —, Amplification of some remarks of Lévy concerning the Wishart distribution. *Stochastic Anal.*, London e. a., 1973, 212—219 (PJKMar, 1974, 2B18)
116. Devinalz A., On a theorem of Lévy—Raikov. *Ann. Math. Stat.*, 1959, 30, № 2, 583—586 (PJKMar, 1961, 2B14)
117. Dugué D., Analyticité et convexité des fonctions caractéristiques. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1951, 12, № 1, 45—56
118. —, Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois de probabilité. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1951, 12, № 3, 159—169
119. —, Résultats sur les fonction absolument monotones et applications à l'arithmétique des fonctions de type positif. *C. r. Acad. sci.*, 1957, 244, № 6, 715—717 (PJKMar, 1958, 7950)
120. —, Sur le théorème de Lévy—Cramér. *Publs Inst. statist. Univ. Paris*, 1957, 6, № 3, 213—225 (PJKMar, 1960, 5558)
121. —, Arithmétique des lois de probabilités. *Mém. sci. math.*, № 137, Paris, Gauthier—Villars, 1957, 51 p. (PJKMar, 1958, 7982)
122. —, Un théorème d'unicité dans la décomposition de la loi uniforme. Propriétés des facteurs de la loi uniforme. *C. r. Acad. sci.*, 1970, 271, № 13, A 606—A 607 (PJKMar, 1971, 7B19)
123. Esseen C.-G., On infinitely divisible one-sided distributions. *Math. scand.*, 1965, 17, 65—76
124. Fisher R. A., Dugué D., Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité. *C. r. Acad. sci.*, 1948, 227, 1205—1207
125. Fisz M., Infinitely divisible distributions; recent results and applications. *Ann. Math. Stat.*, 1962, 33, № 1, 68—84 (PJKMar, 1964, 4B21)
126. Heyer H., Factorization of probability measures on locally compact groups. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1967, 8, № 3, 231—258 (PJKMar, 1968, 2B9)
127. —, Infinitely divisible probability measures on compact groups. *Lect. Notes Math.*, 1972, 247, 55—249 (PJKMar, 1972, 8B12)

128. —, **Toutrat A.**, Sur la divisibilité des probabilités dans un groupe topologique. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1970, 16, № 4, 307—320 (PЖMat, 1971, 11B10)
129. **Kallenberg O.**, Decomposition of generalized binomial and multinomial distributions. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1972, 23, № 3, 224—229 (PЖMat, 1973, 1B18)
130. **Kendall D. G.**, Renewal sequences and their arithmetic. Lect. Notes. Math., 1967, 31, 147—175 (PЖMat, 1969, 8B22)
131. —, Delphic semigroups. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, № 1, 120—121 (PЖMat, 1967, 9A132)
132. —, Delphic semigroups, infinitely divisible regenerative phenomena, and the arithmetic of p -functions. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1968, 9, № 3, 163—195 (PЖMat, 1969, 4B38)
133. **Kingman J. F. C.**, Random walks with spherical symmetry. Acta math., 1963, 109, № 1-2, 11—53 (PЖMat, 1965, 2B88)
134. —, The stochastic theory of regenerative events. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1964, 2, № 3, 180—224 (PЖMat, 1966, 7B1); русский перевод: Вероятностная теория регенеративных событий. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1967, № 2, 106—151 (PЖMat, 1968, 2B16)
135. —, Some further analytical results in the theory of regenerative events. J. Math. Anal. and Appl., 1965, 11, № 1-3, 422—433 (PЖMat, 1966, 3B11)
136. —, Regenerative phenomena. New York. J. Wiley, 1972, 194 pp
137. **Kotlarski I.**, On pairs of independent random variables whose product follows the Gamma distribution. Biometrika, 1965, 52, № 1-2, 289—294 (PЖMat, 1965, 12B13)
138. **Krasner M., Ranulac B.**, Sur une propriété des polynômes de la division du cercle. C. r. Acad. sci., 1937, 204, 397—399
139. **Kubik L.**, On the classes of probability distributions closed under decompositions. Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1964, 12, № 7, 397—403 (PЖMat, 1965, 5B9)
140. **Laha R. G.**, On a factorization theorem in the theory of analytic characteristic functions. Ann. Math. Stat., 1958, 29, № 3, 922—926 (PЖMat, 1960, 5559)
141. —, On the decomposition of a class of functions of bounded variation. Can. J. Math., 1964, 16, № 3, 479—483 (PЖMat, 1965, 7B60)
142. —, On an analytical decomposition of the Poisson law. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 140, June, 137—148 (PЖMat, 1970, 5B9)
143. —, **Lukacs E.**, On a factorization of characteristic functions which have a finite number of derivatives at the origin. Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1962, 11, № 3, 221—224 (PЖMat, 1963, 9B79)
144. **Lamperti J.**, The arithmetic of certain semigroups of positive operators. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1968, 64, № 1, 161—166 (PЖMat, 1968, 11B19)
145. **Laue G.**, Zur Theorie der charakteristischen Funktionen nicht-negativer Zufallsgrößen. Trans. 6-th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct., Random Proces., Prague, 1971. Prague, 1973, 529—546 (PЖMat, 1974, 7B14)
146. **Lepetit Ch.**, Sur la factorization de certaines distributions à support compact et des mesures uniformes sur un cube. C. r. Acad. sci., 1971, 273, № 11, A463—A466 (PЖMat, 1972, 2B639)
147. —, Décomposition de distributions à support compact. Application à la factorisation de certaines lois de probabilité. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1973, 26, № 1, 51—65 (PЖMat, 1973, 10B15)
148. **Lévy P.**, Sur les exponentielles de polynômes et sur l'arithmétique des produits finis de lois de Poisson. Ann. sci. École norm. supér., 1937, 54, 231—292

149. —, L'arithmétique des lois de probabilité. *J. math. pures et appl.*, 1938, 17, 17—40
150. —, L'arithmétique des lois de probabilité et les produits finis des lois de Poisson. *Actualités Sci. et ind.*, 1938, 3, № 736, 25—59
151. —, Sur l'arithmétique des lois de probabilités enroulées. *C. r. séances et conf. Soc. math. France*, 1938 (1939), 32—34
152. —, The arithmetical character of the Wishart distribution. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1948, 44, 2, 295—297
153. —, Sur une classe des lois de probabilité indécomposables. *C. r. Acad. sci.*, 1952, 235, № 8, 589—591 (PЖMar, 1953, 100345)
154. —, Premiers éléments de l'arithmétique des substitutions aléatoires. *C. r. Acad. sci.*, 1953, 237, № 23, 1488—1489 (PЖMar, 1955, 4570)
155. —, Théorie de l'addition des variables aléatoires. 2 ed. Paris, Gauthier—Villars, 1954, XX, 387 p. (PЖMar, 1959, 10217K)
156. —, Remarques sur l'algèbre des produits de composition. *C. r. Acad. sci.*, 1964, 259, № 12, 1923—1927 (PЖMar, 1965, 6B7)
157. —, Remarques sur la décomposition des lois absolument continues, définies sur une circonférence. *C. r. Acad. sci.*, 1969, 268, № 2, A104—A108 (PЖMar, 1969, 10B20)
158. Lewis T., The factorisation of the rectangular distribution. *J. Appl. Probab.*, 1967, 4, № 3, 529—542 (PЖMar, 1968, 10B12)
159. Linnik Y. V., Décompositions des lois de probabilités. *Monogr. internat. mathém. modernes*. Paris, Gauthier—Villars, 1962, 294 p. (PЖMar, 1964, 4B7K)
160. —, Decompositions of probability distributions. Oliver and Boyd, Edinburgh—London, 1964, 291 pp
161. Lukacs E., On certain periodic characteristic functions. *Compos. math.*, 1956, 13, № 1, 76—80 (PЖMar, 1957, 6307)
162. —, Remarks concerning characteristic functions. *Ann. Math. Stat.*, 1957, 28, № 3, 717—723 (PЖMar, 1958, 5906)
163. —, Les fonctions caractéristiques analytiques. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1957, 15, № 4, 217—251 (PЖMar, 1960, 618)
164. —, Extensions of a theorem of Marcinkiewicz. *Abstr. Short commun. Internat. Congress Math. in Edinburgh*. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 123—124 (PЖMar, 1959, 5773)
165. —, Some extensions of a theorem of J. Marcinkiewicz. *Pacif. J. Math.*, 1958, 8, № 3, 487—501 (PЖMar, 1961, 4B113)
166. —, Characteristic functions. London, Griffin, 1960, 216 pp (PЖMar, 1961, 4B440K)
167. —, Recent developments in the theory of characteristic functions. *Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil.*, 1960, Vol. 2. Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 307—335 (PЖMar, 1964, 6B16)
168. —, Fonctions caractéristiques. *Sec. A. Théorie des probabilités*. Paris, Dunod, 1964, 230 p. (PЖMar, 1967, 12B16K)
169. —, Sur les propriétés arithmétiques d'une famille de fonctions caractéristiques entières. *C. r. Acad. sci.*, 1966, AB262, № 11, A628—A630 (PЖMar, 1967, 2B23)
170. —, On the arithmetical properties of certain entire characteristic functions. *Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probab.*, 1965—1966, Vol. 2, Part 1. Berkeley—Los Angeles, 1967, 401—414 (PЖMar, 1970, 1B11)
171. —, Analytical methods in probability theory. *Lect. Notes Math.*, 1967, 31, 208—238 (PЖMar, 1969, 5B1)
172. —, Contributions to a problem of D. van Dantzig. *Теория вероятностей и ее применения*, 1968, 13, № 1, 114—125 (PЖMar, 1969, 1B19)
173. —, Some recent developments in the theory of multivariate characteristic functions. *J. Multivar. Anal.*, 1969, 2, 303—319
174. —, Characteristic functions. 2nd ed., rev. and enlarg. London, Griffin, 1970, 350 pp (PЖMar, 1973, 9B6K)

175. —, A survey of the theory of characteristic functions. *Adv. Appl. Probab.*, 1972, 4, № 1, 1—38 (PЖMat, 1972, 10B18)
176. Marcinkiewicz J., Sur une propriété de la loi de Gauss. *Math. Z.*, 1938, 44, 612—618
177. —, Sur les fonctions indépendantes. III. *Fund. math.*, 1938, 31, 86—102
178. —, Sur les variables aléatoires enroulées. *C. r. séances et conf. Soc. math. France*, 1938 (1939), 34—36
179. Miller H. D., Generalization of a theorem of Marcinkiewicz. *Pacif. J. Math.*, 1967, 20, № 2, 261—274
180. Parthasarathy K. R., Ranga Rao R., Varadhan S. R. S., On the category of indecomposable distributions on topological groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1962, 102, № 2, 200—217 (PЖMat, 1963, 3B107)
181. —, —, —, Probability distributions on locally compact abelian groups. *Ill. J. Math.*, 1963, 7, № 2, 337—369 (PЖMat, 1964, 9B4); русский перевод: Распределение вероятностей на локально компактных абелевых группах. *Математика. Период. сб. перев. ин. статей*, 1965, 9, № 2, 115—146 (PЖMat, 1965, 11B5)
182. Pollard H., Distribution functions containing a Gaussian factor. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1953, 4, № 4, 578—582 (PЖMat, 1954, 2636)
183. Pólya G., Remarks on characteristic functions. *Proc. Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil.* Berkeley, 1949, 115—123
184. Puglisi A., Sulla decomposizione della legge di probabilità di Cauchy. *Boll. Unione mat. ital.*, 1966, 21, № 1, 12—18 (PЖMat, 1967, 2B19)
185. Ramachandran B., On the decomposition of certain random variables. *Publs Inst. statist. Univ. Paris*, 1961, 10, № 4, 267—273 (PЖMat, 1963, 5B87)
186. —, On the order and the type of entire characteristic functions. *Ann. Math. Stat.*, 1962, 33, № 4, 1238—1255 (PЖMat, 1964, 7B17)
187. —, Application of a theorem of Mamay's to a «denumerable decomposition» of the Poisson law. *Publs Inst. statist. Univ. Paris*, 1964, 13, № 1, 13—19 (PЖMat, 1965, 2B22)
188. —, An extension of a theorem of Mamay, with application. *Sankhya Indian J. Statist.*, 1965, A27, № 2-4, 303—310 (PЖMat, 1967, 12B21)
189. —, Advanced theory of characteristic functions. *Calcutta, Statistic Publ. Soc.*, 1967, 208 pp
190. Rossberg H. J., Wachstum und Nullstellenverteilung ganzer charakteristischer Funktionen. *Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin*, 1966, 8, № 4, 275—286 (PЖMat, 1967, 12B20)
191. —, Der Zusammenhang zwischen einer ganzen charakteristischen Funktion einer verfeinerten Ordnung und ihrer Verteilungsfunktion. *Чехосл. мат. ж.*, 1967, 17, № 3, 317—334 (PЖMat, 1968, 5B207)
192. —, Ganze charakteristische Funktionen mit vollkommen regulärem Wachstum. *Чехосл. мат. ж.*, 1967, 17, № 3, 335—346 (PЖMat, 1968, 5B208)
193. —, Eigenschaften der charakteristischen Funktionen von einseitig beschränkten Verteilungsfunktionen und ihre Anwendung auf ein charakterisierungsproblem der Mathematischen Statistik. *Math. Nachr.*, 1968., 37, № 1-2, 37—57 (PЖMat, 1969, 3B7)
194. Rousseau B., Arithmétique des lois de probabilité définies sur un espace de Hilbert séparable. *C. r. Acad. sci.*, 1973, 276, № 2, A141—A143.
195. Ruegg A., A characterization of certain infinitely divisible laws. *Ann. Math. Stat.*, 1970, 41, № 4, 1354—1356 (PЖMat, 1971, 9B23)
196. Shanbhag D. N., An extension of Levy's result concerning indecomposability of the Wishart distribution. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1974, 75, № 1, 109—113 (PЖMat, 1974, 6B9)
197. Shimizu Ryoichi, On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with a continuous Poisson spectrum. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1964, 16, № 3, 387—407 (PЖMat, 1965, 11B21)

198. —, On the decomposition of stable characteristic functions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1972, 24, № 2, 347—353 (PЖMar, 1973, 8B14)
 199. Staudte R. G., Jr., Tata Mahabanoo N., Complex roots of real characteristic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, 25, № 2, 238—246 (PЖMar, 1971, 11B22)
 200. Stochastic Analysis. A tribute to the memory of Rollo Davidson. Ed. Kendall D. G., Herding E. F. London e. a., John Wiley & Sons, 1973, 465 pp (PЖMar, 1974, 1B30K)
 201. Teicher H., On the factorization of distributions. *Ann. Math. Stat.*, 1954, 25, № 4, 769—774 (PЖMar, 1956, 1507)
 202. —, On the multivariate Poisson distribution. *Skand. aktuarietidskr.*, 1954, № 1-2, 1—9 (PЖMar, 1956, 3180)
 203. —, Sur les puissances des fonctions caractéristiques. *C. r. Acad. sci.*, 1958, 246, № 5, 694—695 (PЖMar, 1960, 617)
 204. Teugels J. L., Probability density functions which are their own characteristic functions. *Bull. Soc. math. Belg.*, 1971, 23, № 3, 236—262 (PЖMar, 1973, 4B33)
 205. Tortrat A., Sur la divisibilité des lois convexes de probabilité. *Bull. Soc. math. France*, 1952, 80, № 1, 47—60 (PЖMar, 1953, 100338)
 206. —, Sur un théorème de Lewis et la décomposition en facteurs premiers de la loi rectangulaire. *J. Appl. Probab.*, 1969, 6, № 1, 177—185 (PЖMar, 1970, 3B45)
 207. Urbanik K., Generalized convolutions. *Stud. math.*, 1964, 23, № 3, 217—245 (PЖMar, 1966, 7B20)
 208. —, A characterization of a class of convolutions. *Colloq. math.*, 1967, 18, 239—249 (PЖMar, 1968, 8B12)
 209. —, Generalized convolutions. II. *Stud. math.*, 1973, 45, № 1, 57—70 (PЖMar, 1973, 8B17)
-