О. В. Зубков, Нахождение и оценка числа бесповторных булевых функций в элементарном базисе в виде сходящегося ряда, *Дискрет. матем.*, 2009, том 21, выпуск 4, 30–38

DOI: 10.4213/dm1069

Дискретная математика

том 21 выпуск 4 * 2009

УДК 519.7

Нахождение и оценка числа бесповторных булевых функций в элементарном базисе в виде сходящегося ряда

© 2009 г. О. В. Зубков

В работе получено представление числа K_n бесповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе $\{\&, \vee, \bar{}\ \}$ в виде сходящегося показательно-степенного ряда. Представление является самым простым в ряде аналогичных формул, содержащих различные комбинаторные числа. Полученный результат позволяет находить асимптотику для K_n.

Формула над базисом B называется бесповторной, если каждая переменная входит в нее не более одного раза. Булева функция f называется бесповторной в базисе B, если найдется бесповторная формула над B, реализующая f. Под элементарным будем понимать базис $B_0 = \{\&, \vee, \bar{}\}$. Вопросы, связанные с нахождением и оценкой числа бесповторных булевых функций в элементарном базисе рассматриваются в [1, 5, 6].

В книге Риордана [6] описывается общая идея нахождения числа двухполюсных последовательно-параллельных сетей, частному виду которых можно взаимно однозначно поставить в соответствие бесповторные формулы над базисом B_0. Здесь же получено комбинаторное соотношение, содержащее полином и его производную, из которого можно получать итеративным путем число K_n бесповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе.

В явном виде рекуррентная формула для числа K_n получена в [5]. Будучи нелинейной, данная формула не поддается раскрытию рекуррентности известными способами.

В [1] приводится метод подсчета упомянутых функций, принципиально отличающийся от использованного в [5]. На его основе получена формула

$$K_n = \sum_{j=0}^{n-2} 2^{n+j+1} B(n-2-j, j),$$

где $B(i, j)$ находится в виде суммы по сложному множеству неубывающих наборов.

В [3] показано, что числа $B(i, j)$ являются числами Эйлера второго порядка (см. с. 300 в [2]). Тогда, как следствие, можно получить формулу

$$K_n = \sum_{j=0}^{n-2} 2^{n+j+1} \left\langle\!\!\left\langle {n-1 \atop n-2-j} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Далее в [3], на основании данной формулы и свойств чисел Эйлера второго порядка, получена формула, выражающая число K_n через числа Стирлинга второго рода в виде сходящегося ряда

$$K_n = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j S(n+j, j+1), \tag{1}$$

где $S(n,k)$ — числа Стирлинга второго рода.

Отметим, что хотя выражение числа K_n в виде (1) имеет значительно более простой вид, чем формула, полученная в [1], оно все же недостаточно удобно для получения асимптотики в силу наличия чисел Стирлинга.

Теорема 1. *Число K_n бесповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе B_0 можно представить в виде сходящегося ряда*

$$K_n = 2\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^{n+s-1}}{s!\,(2\sqrt{e})^s}. \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением чисел Стирлинга второго рода через биномиальные коэффициенты, степени и факториалы (см. с. 295 в [2])

$$m!\,S(n,m) = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} s^n (-1)^{m-s}.$$

Получим, что

$$S(n+j, j+1) = \frac{1}{(j+1)!} \sum_{s=1}^{j+1} \binom{j+1}{s} s^{n+j} (-1)^{j-s+1}, \tag{3}$$

подставляя это представление в (1), получим, что

$$K_n = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{j+1} \frac{1}{(j+1)!} \frac{1}{2^j} \binom{j+1}{s} s^{n+j} (-1)^{j-s+1}, \tag{4}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что в (4) возможна смена порядка суммирования, что не является очевидным, так как полученный двойной ряд сходится условно. Тем не менее, здесь поменять порядок суммирования можно, для доказательства чего введем в рассмотрение производящие функции действительной переменной x

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{j+1} \frac{1}{(j+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{j+1}{s} s^{n+j} (-1)^{j-s+1} x^j,$$

$$V_n(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=s-1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{j+1}{s} s^{n+j} (-1)^{j-s+1} x^j,$$

$$H_n^{\downarrow}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{j+1} \frac{1}{(j+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{j+1}{s} s^{n+j} (-1)^{j-s+1} (j+1) x^j,$$

$$V_n^{\downarrow}(x) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=s-1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{j+1}{s} s^{n+j}(-1)^{j-s+1}(j+1)x^j,$$

$$H_n^{\to} n(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{j+1} \frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{j+1}{s} s^{n+j}(-1)^{j-s+1} s x^j,$$

$$V_n^{\to}(x) = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=s-1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{j+1}{s} s^{n+j}(-1)^{j-s+1} s x^j.$$

Отметим, что согласно [4] справедливо равенство $K_n = H_n(1)$.

Лемма 1. *Для любого действительного α из некоторой окрестности единицы и для любого натурального $n \geqslant 1$ равенство $H_n^{\downarrow}(\alpha) = V_n(\alpha)$ верно тогда и только тогда, когда $H_n^{\to}(\alpha) = V_n^{\to}(\alpha)$.*

Доказательство. Покажем, что для любого действительного α из некоторой окрестности единицы и любого натурального $n \geqslant 1$

$$\frac{H_n^{\downarrow}(\alpha)}{H_n^{\to}(\alpha)} = \frac{V_n^{\downarrow}(\alpha)}{V_n^{\to}(\alpha)} = 1 - \frac{\alpha}{2}. \tag{5}$$

Заметим, что

$$H_n^{\to}(\alpha) = H_{n+1}(\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j S(n+1+j, j+1)\alpha^j.$$

Воспользуемся следующим представлением для чисел Стирлинга (см. с. 295 в [2]):

$$S(m+n+1, m) = \sum_{i=1}^{m} i S(n+i, i),$$

тогда

$$\begin{aligned} H_n^{\to}(\alpha) &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^j S((j+1)+(n-1)+1, j+1) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{j+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^j i S((n-1)+i, i). \end{aligned}$$

Так как все слагаемые положительны, можно провести смену порядка суммирования:

$$H_n^{\to}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} i S((n-1)+i, i) \sum_{j=i-1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^j.$$

Учитывая, что

$$\sum_{j=i-1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^j = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{i-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^j = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{i-1}\frac{1}{1-\alpha/2},$$

получим, что

$$H_n^{\rightarrow}(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha/2}\sum_{i=1}^{\infty} i\,S((n-1)+i,i)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{i-1}$$
$$= \frac{1}{1-\alpha/2}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)S(n+j,j+1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{j}.$$

Раскладывая $S(n+j,j+1)$, согласно (3) получим равенства

$$H_n^{\rightarrow}(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha/2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\binom{j+1}{s}s^{n+j}(-1)^{j-s+1}(j+1)\alpha^{j}$$
$$= \frac{1}{1-\alpha/2}H_n^{\downarrow}(\alpha).$$

откуда следует, что

$$\frac{H_n^{\downarrow}(\alpha)}{H_n^{\rightarrow}(\alpha)} = 1-\frac{\alpha}{2}.$$

Для доказательства второй части равенства (5) построим производящую функцию

$$D_s(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{s+i}{s}\frac{1}{(s+i)!}x^{i}.$$

Выразим ее в замкнутом виде:

$$D_s(x) = \frac{1}{s!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!} = \frac{e^x}{s!}.$$

Далее рассмотрим внутреннюю сумму ряда $V_n^{\rightarrow}(\alpha)$

$$\sum_{j=s-1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\binom{j+1}{s}s^{n+j}(-1)^{j-s+1}s\alpha^{j}.$$

Сменим в ней индекс суммирования, полагая $j+1=s+i$ и вынося все, что необходимо, за знак суммы, получаем, что

$$\alpha^{s-1}s^{n+1}\left(\frac{s}{2}\right)^{s-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(s+i)!}\binom{s+i}{s}\left(\frac{-\alpha s}{2}\right)^{i} = \left(\frac{\alpha s}{2}\right)^{s-1}s^{n+1}D_s(-\alpha s/2)$$
$$= s^{n+1}\left(\frac{-\alpha s}{2}\right)^{s-1}\frac{e^{-\alpha s/2}}{s!}.$$

Таким образом,

$$V_n^{\rightarrow}(\alpha) = \sum_{s=1}^{\infty}s^{n+1}\left(\frac{\alpha s}{2}\right)^{s-1}\frac{1}{s!}\sqrt{e^{\alpha s}}. \qquad (6)$$

Для преобразования ряда $V_n^{\downarrow}(\alpha)$ умножим $D_s(x)$ на x^s и возьмем производную по x. Здесь и далее воспользуемся возможностью почленного дифференцирования степенного ряда в интервале его сходимости (корректность этого докажем позже):

$$(x^s D_s(x))' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{s+i}{s} \frac{x^{s+i}}{(s+i)!}\right)' = x^{s-1} \sum_{i=0}^{\infty} (s+i) \binom{s+i}{s} \frac{x^i}{(s+i)!}.$$

С другой стороны, если воспользоваться замкнутым представлением для $D_s(x)$, то получим, что

$$(x^s D_s(x))' = \left(\frac{x^s e^x}{s!}\right)' = (s x^{s-1} + x^s) \frac{e^x}{s!}.$$

Используя первое из полученных представлений производной, выразим через $(x^s D_s(x))'$ внутреннюю сумму ряда $V_n^{\downarrow}(\alpha)$. Сделаем снова замену $j+1 = s+i$ и вынесем за знак суммы все необходимое:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=s-1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} \binom{j+1}{s} & s^{n+j} (-1)^{j-s+1} (j+1) \alpha^j \\
&= s^n \left(\frac{\alpha s}{2}\right)^{s-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(s+i)!} \binom{s+i}{s} \left(\frac{-\alpha s}{2}\right)^i (s+i) \\
&= s^n (-1)^{s-1} (x^s D_s(x))' \big|_{-\alpha s/2}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство верно за счет того, что

$$\left(\frac{\alpha s}{2}\right)^{s-1} = (-1)^{s-1} \left(\frac{-\alpha s}{2}\right)^{s-1}.$$

Воспользовавшись теперь вторым из представлений для $(x^s D_s(x))'$, получим, что

$$\begin{aligned}
s^n (-1)^{s-1} (x^s D_s(x))' \big|_{-\alpha s/2} &= s^n (-1)^{s-1} \left(s \left(\frac{-\alpha s}{2}\right)^{s-1} + \left(\frac{-\alpha s}{2}\right)^s\right) \frac{1}{s! \sqrt{e^{\alpha s}}} \\
&= s^{n+1} \left(\frac{\alpha s}{2}\right)^{s-1} \frac{1}{s! \sqrt{e^{\alpha s}}} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$V_n^{\downarrow}(\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sum_{s=1}^{\infty} s^{n+1} \left(\frac{\alpha s}{2}\right)^{s-1} \frac{1}{s! \sqrt{e^{\alpha s}}} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) V_n^{\rightarrow}(\alpha).$$

Отсюда получим, что

$$\frac{V_n^{\downarrow}(\alpha)}{V_n^{\rightarrow}(\alpha)} = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Возвращаясь к формулировке леммы 1, из равенства $H_n^{\rightarrow}(\alpha) = V_n^{\rightarrow}(\alpha)$ находим, что для любого α из некоторой окрестности единицы и для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$H_n^{\downarrow}(\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) H_n^{\rightarrow}(\alpha) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) V_n^{\rightarrow}(\alpha) = V_n^{\downarrow}(\alpha)$$

Очевидно, что верно и обратное. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого α из интервала* $(0{,}9, 1{,}001)$ *верно, что* $H_1(\alpha) = V_1(\alpha)$.

Доказательство. Утверждение леммы 2 означает, что в некоторой окрестности единицы при $n = 1$ в (4) возможна смена порядка суммирования. Согласно (3)

$$H_1(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j S(j+1, j+1)\alpha^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^j = \frac{1}{1-\alpha/2} = \frac{2}{2-\alpha}.$$

С другой стороны, $V_1(\alpha)$ является частным случаем $V_n^{\rightarrow}(\alpha)$ при $n = 0$. Тогда, согласно (6),

$$V_1(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}\right)^s.$$

Таким образом, для доказательства леммы 2 достаточно показать, что для любого α из интервала $(0{,}9, 1{,}001)$ выполняется равенство

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}\right)^s = \frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

Воспользуемся представлением суммы в левой части этого равенства через обобщенный экспоненциальный ряд

$$E_t(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ts+1)^{s-1}}{s!} x^s.$$

Для данного ряда верно соотношение

$$1 + \frac{(ts+r)^s}{s!} x^s = \frac{E_t(x)^r}{1 - xtE_t(x)^t}$$

(см. с. 228 в [2]). Полагая здесь $t = 1$, $r = 0$, $x = \alpha/(2\sqrt{e^\alpha})$, получим, что

$$1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^s}{s!} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}\right)^s = \frac{2\sqrt{e^\alpha}}{2\sqrt{e^\alpha} - \alpha E_1(\alpha/(2\sqrt{e^\alpha}))}. \tag{7}$$

Для экспоненциального ряда $E_1(x)$ неизвестно выражение в замкнутой форме, но известно основное соотношение, которому удовлетворяет $\ln E_1(x) = x\varepsilon_1(x)$. Полагая здесь $x = \alpha/(2\sqrt{e^\alpha})$, получим, что величина $E_1(\alpha/(2\sqrt{e^\alpha}))$ должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\ln E_1(\alpha/(2\sqrt{e^\alpha}))}{E_1(\alpha/(2\sqrt{e^\alpha}))} = \frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}.$$

Функция $(\ln y)/y$ достигает максимума при $y = e$. Отсюда следует, что уравнение

$$\frac{\ln y}{y} = \frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}$$

при $\alpha \in (0{,}9, 1{,}001)$ имеет не больше двух решений, одно из которых меньше e, а другое больше e. Одним из этих решений является $y = \sqrt{e^\alpha} < e$. Второе решение обозначим через ψ. Покажем, что $E_1(\alpha/(2\sqrt{e^\alpha})) < e < \psi$.

Оценим величину, стоящую в левой части равенства (7), используем при этом известную оценку Стирлинга для факториала $s! > (s/e)^s\sqrt{2\pi s}$ и получим, что

$$\begin{aligned}
1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s^s}{s!}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}\right)^s &< 1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{\alpha e}{2\sqrt{e^\alpha}}\right)^s \\
&< 1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha e}{2\sqrt{e^\alpha}}\right)^s \\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha e}{2\sqrt{e^\alpha}}\right)^s-1\right) \\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-\alpha e/(2\sqrt{e^\alpha})}-1\right) \\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha e}{2\sqrt{e^\alpha}-\alpha e}\right) \\
&< 1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1.001e}{2e^{0,45}-1,001e}\right) < 3,7.
\end{aligned}$$

Тогда, согласно (7),

$$\frac{2\sqrt{e^\alpha}}{2\sqrt{e^\alpha}-\alpha E_1(\alpha/(2\sqrt{e^\alpha}))} < 3,7,$$

и, преобразуя это неравенство, получим, что

$$E_1\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}\right) < \frac{5,4}{3,7}\frac{\sqrt{e^\alpha}}{\alpha} < \frac{5,4}{3,7}\frac{e^{1,001/2}}{0,9} < e.$$

Таким образом,

$$E_1\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}\right) = \sqrt{e^\alpha}.$$

Подставив это в (7), получим равенства

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s^s}{s!}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{e^\alpha}}\right)^s = \frac{2\sqrt{e^\alpha}}{2\sqrt{e^\alpha}-\alpha\sqrt{e^\alpha}}-1 = \frac{\alpha}{2-\alpha},$$

что и требовалось для доказательства леммы 2.

Лемма 3. *Для любого* α *из интервала* $(0{,}9, 1{,}001)$ *и для любого* $n \geqslant 1$ *справедливо равенство*

$$H_n(\alpha) = V_n(\alpha).$$

Доказательство. Используем метод математической индукции по n. При $n = 1$ лемма 3 верна в силу леммы 2. Предположим, что на интервале $(0{,}9, 1{,}001)$ выполняется равенство $H_n(x) = V_n(x)$, и проведем индуктивный переход.

Если на указанном интервале функции $xH_n(x)$ и $xV_n(x)$ равны, то на нем равны и их производные, причем

$$(xH_n(x))' = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{j+1} \frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{j+1}{s} s^{n+j}(-1)^{j-s+1}(j+1)x^j$$
$$= H_n^{\downarrow}(x),$$
$$(xV_n(x))' = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=s-1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{j+1}{s} s^{n+j}(-1)^{j-s+1}(j+1)x^j$$
$$= V_n^{\downarrow}(x).$$

Таким образом, на рассматриваемом интервале

$$H_n^{\downarrow}(x) = V_n^{\downarrow}(x).$$

По лемме 1, из этого равенства следует равенство

$$H_n^{\rightarrow}(x) = V_n \rightarrow (x).$$

Осталось заметить, что

$$H_n^{\rightarrow}(x) = H_{n+1}(x), \qquad V_n^{\rightarrow}(x) = V_{n+1}(x),$$

что и завершает доказательство леммы 3.

Покажем, что все операции со степенными рядами, в частности, почленное дифференцирование, проводились в интервале их сходимости. Отметим, что для любого α из интервала $(0{,}9, 1{,}001)$ и для любого $n \geqslant 1$

$$H_{n+1}(\alpha) = H_n^{\rightarrow}(\alpha) = \frac{H_n^{\downarrow}(\alpha)}{1-\alpha/2} = \frac{V_n^{\downarrow}(\alpha)}{1-\alpha/2} = V_n^{\rightarrow}(\alpha) = V_{n+1}(\alpha),$$

то есть эти ряды сходятся либо расходятся на указанном интервале одновременно. Покажем, что интервал $(0{,}9, 1{,}001)$ входит в область сходимости ряда $V_n^{\rightarrow}(x)$. Рассмотрим отношение соседних членов этого ряда, а именно, $(s+1)$-го к s-му, которое, согласно (6), равно

$$\left(\frac{s+1}{s}\right)^{n+1}\left(\frac{x(s+1)}{2}\right)^s\left(\frac{2}{xs}\right)^{s-1}\frac{s!\sqrt{e^{xs}}}{(s+1)!\sqrt{e^{x(s+1)}}} = \left(\frac{s+1}{s}\right)^n\left(\frac{s+1}{s}\right)^s\frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{e^x}}.$$

При $s \to \infty$ отношение соседних членов ряда стремится к $(xe/2)e^{-x/2}$, что на указанном интервале не превосходит $1{,}001e^{0{,}55}/2$. Оценивая данную величину, приходим к выводу, что отношение соседних членов ряда строго меньше единицы. Таким образом, по признаку сходимости Даламбера ряд $V_n^{\rightarrow}(x)$, а вместе с ним и все остальные ряды, сходятся на рассматриваемом интервале.

Возвращаясь к доказательству основной теоремы, заметим, что

$$K_n = H_n(1) = V_n(1) = V_{n-1}^{\rightarrow}(1) = \sum_{s=1}^{\infty} s^n\left(\frac{s}{2}\right)^{s-1}\frac{1}{s!\sqrt{e^s}}.$$

Последнее равенство верно, согласно (6). Отсюда получим, что

$$K_n = 2\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^{n+s-1}}{s!\,(2\sqrt{e})^s}.$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Важным следствием доказанной теоремы является возможность получить асимптотику числа бесповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе B_0. В [4] получены следующие результаты, основанные на представлении числа K_n в виде сходящегося ряда.

(1) Для числа K_n бесповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе B_0 верна следующая асимптотическая аппроксимация при $n \to \infty$:

$$K_n = 2\sqrt{\frac{e^{3-2n}}{n-2}\left(\frac{2n-3}{2\ln 2 - 1}\right)^{2n-1}}\,(1 + O(1/\sqrt{n})).$$

(2) Для числа K_n бесповторных булевых функций от n переменных в элементарном базисе B_0 при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$K_n \approx \frac{2}{\sqrt{2\ln 2 - 1}}\left(\frac{1}{2\ln 2 - 1}\right)^{n-1}(2n-3)!!$$

Список литературы

1. Винокуров С. Ф., Перязев Н. А., *Избранные вопросы теории булевых функций*. Физматлит, Москва, 2001.
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика. Основание информатики*. Мир, Москва, 1998.
3. Зубков О. В., Нахождение числа бесповторных булевых функций в элементарном базисе при помощи чисел Стирлинга второго рода. *Вестник Бурятского университета, серия 13: математика и информатика* (2005) №2, 12–16.
4. Зубков О. В., Асимптотика числа бесповторных булевых функций в элементарном базисе. *Матем. заметки* (2007) **82**, №6, 822–828.
5. Перязев Н. А., Представление функций алгебры логики бесповторными формулами. В сб.: *Тезисы XI Межреспубл. конф. по математической логике*, Казань, 1992, с. 110.
6. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1963.

Статья поступила 20.02.2009.