ФЕВРАЛЬ 1978 г., ТОМ XIV, № 2

УДК 517.946

Г. А. ИВАШКИНА, Л. М. НЕВОСТРУЕВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

1. Пусть D — односвязная область плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная Жордановой кривой σ, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и характеристиками

$$AC:\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0, \qquad BC:\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1 \tag{1}$$

уравнения

$$U_{xx}+\operatorname{sgn} y\,|y|^m U_{yy}=0, \quad 0<m<1. \tag{2}$$

$J=AB$ — единичный интервал; через D_1 и D_2 обозначим соответственно эллиптическую и гиперболическую части смешанной области D.

Примем следующие обозначения:

$$\theta_0(x)=\frac{x}{2}-\left(\frac{1}{1-2\beta}\cdot\frac{x}{2}\right)^{1-2\beta}, \qquad \theta_1(x)=\frac{1+x}{2}-\left(\frac{1}{1-2\beta}\cdot\frac{1-x}{2}\right)^{1-2\beta}, \quad \beta=\frac{m}{2(m-2)}, \tag{3}$$

$$D_{0x}^{l} f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-l)}\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1+l}}, & l<0,\\[2ex] \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{0x}^{l-(n+1)} f(x), & l>0,\end{cases} \tag{4}$$

$$D_{x1}^{l} f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-l)}\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1+l}}, & l<0,\\[2ex] -\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} D_{x1}^{l-(n+1)} f(x), & l>0.\end{cases} \tag{5}$$

З а д а ч а. Найти функцию $U(z)\equiv U(x, y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D_1\cup J)\cap C^1(D_2\cup J)\cap C^2(D_1\cup D_2)$, удовлетворяющую уравнению (2) в каждой из областей D_1 и D_2 и обладающую тем свойством, что $U_y(x, +0)=\nu(x)\in C^1(J)$ и на концах интервала может обращаться в бесконечность при $x=0$ порядка -2β и при $x=1$ порядка $\frac{1}{2}-\beta$ со следующими краевыми условиями [2, 3]:

$$\alpha(x) D_{0x}^{1-\beta} U[\theta_0(x)] + \delta(x) D_{x1}^{1-\beta} U[\theta_1(x)] = \gamma(x) \quad \forall x \in J, \tag{6}$$

$$U(z) = \varphi(z) \quad \forall z \in \sigma; \tag{7}$$

$$U(x;\ +0) = U(x;\ -0), \quad \frac{\partial U(x;\ +0)}{\partial y} = -\frac{\partial U(x;\ -0)}{\partial y}, \tag{8}$$

причем

$$\begin{gathered} \alpha(x) = \alpha^*(x) x^p, \quad p < \beta, \\ \alpha^2(x) + \delta^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{J}, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \alpha(x) x^{-\beta} + \delta(x)(1-x)^{-\beta} \neq 0 \quad \forall x \in \bar{J}, \\ \alpha^*(x),\ \gamma(x),\ \delta(x) \in C(\bar{J}) \cap C^3(J), \end{gathered} \tag{10}$$

$$-1 \leqslant \frac{\delta(x)(1-x)^{-\beta}}{\alpha(x) x^{-\beta} + \delta(x)(1-x)^{-\beta}} \leqslant 0. \tag{11}$$

2. Воспользуемся обобщенным решением задачи Коши [4]

$$\begin{aligned} U(x,\ y) = {} & \int_0^1 T\{[x - (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}}]t\}[x + (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}} - xt + \\ & + (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}} t]^{-\beta} [x - (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}}]^{1-\beta} \times \\ & \times (1-t)^{-\beta} dt + \frac{1}{2\cos\pi\beta} [2(1-2\beta)]^{1-2\beta} \int_0^1 T[x - (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}}(2t-1)] \times \\ & \times (-y) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt - \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} \int_0^1 \nu_1[x - (1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}} \times \\ & \times (2t-1)](-y) t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\nu_1(x) = U_y(x,\ -0), \quad U(x,\ 0) = \tau(x) = \Gamma(1-2\beta) D_{0x}^{2\beta-1} T(x). \tag{13}$$

Из (12) в силу (4) и (5) имеем

$$\begin{aligned} U[\Theta_0(x)] = {} & \frac{\Gamma(1-\beta)}{2\cos\pi\beta} D_{0x}^{\beta-1} T(x) x^{-\beta} - \\ & - \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)[2(1-2\beta)]^{1-2\beta}} D_{0x}^{\beta-1} \nu_1(x) x^{-\beta}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} U[\theta_1(x)] = {} & \Gamma(1-\beta) D_{0x}^{\beta-1} T(x)(1-x)^{-\beta} + \frac{\Gamma(1-\beta)}{2\cos\pi\beta} \times \\ & \times D_{x1}^{\beta-1} T(x)(1-x)^{-\beta} - \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)[2(1-2\beta)]^{1-2\beta}} D_{x1}^{\beta-1} \nu_1(x)(1-x)^{-\beta}. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в краевое условие (6) и учитывая, что

$$D_{0x}^{1-\beta} D_{0x}^{\beta-1} = D_{x1}^{1-\beta} D_{x1}^{\beta-1} = D^0,$$

где D^0 — единичный оператор, найдем

$$\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,[2(1-2\beta)]^{1-2\beta}}\,[\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}]\nu_1(x)=$$
$$=\gamma(x)+\frac{\Gamma(1-\beta)}{2\cos\pi\beta}\,[\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}]\,T(x)+$$
$$+\delta(x)\Gamma(1-\beta)\,D_{x1}^{1-\beta}D_{0x}^{\beta-1}T(x)(1-x)^{-\beta}. \qquad (16)$$

Рассмотрим суперпозицию двух операторов

$$D_{x1}^{1-\beta}D_{0x}^{\beta-1}T(x)(1-x)^{-\beta},$$

где функция $T(x)$ непрерывная в интервале $(0, 1)$ и интегрируемая на сегменте $[0; 1]$.

Имеет место равенство

$$D_{x1}^{1-\beta}D_{0x}^{\beta-1}T(x)(1-x)^{-\beta}=T(x)(1-x)^{-\beta}\cos\pi\beta+$$
$$+\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^1 T(t)\,\frac{(1-t)^{1-2\beta}dt}{(1-x)^{1-\beta}(t-x)} \qquad (17)$$

(интеграл здесь понимается в смысле главного значения по Коши).

Из (16) с учетом (17) и (10) заключаем, что $\nu_1(x)$ принадлежит классу интегрируемых на сегменте $[0, 1]$ и непрерывных в интервале $(0, 1)$ функций.

3. Лемма о знаке $\nu_1(x)$. Пусть $x=\xi$, где $0<\xi<1$ есть точка положительного максимума функции $\tau(x)$. Полагая в (16) $\gamma(x)\equiv 0$, определим знак $\nu_1(x)$ в точке $x=\xi$. Из соотношения (16) с учетом (17), (10) и (13) будем иметь

$$\nu_1(x)=-\varkappa_1\,\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}}+\varkappa_2\Bigg(\frac{1}{2\cos\pi\beta}+$$
$$+\cos\pi\beta\,\frac{\delta(x)(1-x)^{-\beta}}{\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}}\Bigg)\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}+$$
$$+\varkappa_2\,\frac{\sin\pi\beta}{\pi(1-x)^{1-\beta}}\,\frac{\delta(x)}{\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}}\int_0^1\frac{(1-t)^{1-2\beta}}{t-x}\times$$
$$\times\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t\frac{\tau(\lambda)\,d\lambda}{(t-\lambda)^{-2\beta}}\,dt, \qquad (18)$$

где

$$\varkappa_1=\frac{\Gamma(1-\beta)\,[2(1-2\beta)]^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)},\quad \varkappa_2=\frac{\Gamma^2(1-\beta)\,[2(1-2\beta)]^{1-2\beta}}{\Gamma(1-2\beta)\,\Gamma(1+2\beta)\,\Gamma(2-2\beta)}, \qquad (19)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}=\frac{d}{dt}\int_0^x\frac{\tau'(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}. \qquad (20)$$

Следуя идее А. В. Бицадзе, возьмем произвольную точку x_1, где $0<x_1<x$, и разобьем интеграл на два интеграла, т. е.

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}=\frac{d}{dt}\left[\int_0^{x_1}\frac{\tau'(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}+\int_{x_1}^{x}\frac{\tau'(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}\right]=$$

$$= 2\beta \int_0^{x_1} \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1}\,dt + \frac{d}{dx}\left[-\tau'(t)\frac{(x-t)^{2\beta+1}}{1+2\beta}\Big|_{x_1}^{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+2\beta}\int_{x_1}^{x} \tau''(t)(x-t)^{1+2\beta}\,dt\right] = 2\beta\tau(x_1)(x-x_1)^{2\beta-1} -$$

$$-2\beta(1-2\beta)\int_0^{x_1}\tau(t)(x-t)^{2\beta-2}\,dt + \tau'(x_1)(x-x_1)^{2\beta} + \int_{x_1}^{x}\frac{\tau''(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}.$$

При $x=\xi$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}\Big|_{x=\xi} = -2\beta(1-2\beta)\int_0^{x_1}[\tau(t)-\tau(\xi)](\xi-t)^{2\beta-2}\,dt +$$

$$+ 2\beta\xi^{2\beta-1}\tau(\xi) + 2\beta(\xi-x_1)^{2\beta-1}[\tau(x_1)-\tau(\xi)] +$$

$$+ \tau'(x_1)(\xi-x_1)^{2\beta} + \int_{x_1}^{\xi}\frac{\tau''(t)\,dt}{(\xi-t)^{-2\beta}}. \qquad (21)$$

В (21) перейдем к пределу, когда $x_1 \to \xi$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{-2\beta}}\Big|_{x=\xi} = 2\beta\tau(\xi)\,\xi^{2\beta-1} - 2\beta(1-2\beta)\int_0^{\xi}\frac{\tau(t)-\tau(\xi)}{(\xi-t)^{-2\beta+2}}\,dt. \qquad (22)$$

Преобразуем выражение

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{1-2\beta}}{t-x}\,\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \frac{\tau(\lambda)\,d\lambda}{(t-\lambda)^{-2\beta}}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^{1-2\beta}}{t-x}\,d\int_0^t \frac{\tau'(\lambda)\,d\lambda}{(t-\lambda)^{-2\beta}} \equiv J_1(x). \qquad (23)$$

Рассмотрим интеграл

$$i(x,\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{(1-t)^{1-2\beta}}{t-x}\,d\int_\varepsilon^1 \frac{\tau'(\lambda)\,d\lambda}{(t-\lambda)^{-2\beta}} =$$

$$= \int_\varepsilon^1 \frac{(1-t)^{1-2\beta}}{t-x}\left[\tau'(\varepsilon)(t-\varepsilon)^{2\beta} + \int_\varepsilon^1 \frac{\tau''(\lambda)\,d\lambda}{(t-\lambda)^{-2\beta}}\right]dt =$$

$$= \tau'(\varepsilon)\left[-\pi\,\mathrm{ctg}\,2\pi\beta\,(1-x)^{1-2\beta}(x-\varepsilon)^{2\beta} + \frac{\pi(1-x)}{\sin 2\pi\beta} - \frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta}\right] +$$

$$+ \int_\varepsilon^1 \frac{(1-t)^{1-2\beta}}{t-x}\,dt\int_\varepsilon^1 \frac{\tau''(\lambda)\,d\lambda}{(t-\lambda)^{-2\beta}}, \qquad (24)$$

где первый интеграл вычислен с помощью подстановки $U=\frac{(x-\varepsilon)(1-t)}{(t-\varepsilon)(1-x)}$ [9, стр. 106—108].

В двойном интеграле, входящем в (24), поменяем порядок интегрирования и запишем его в виде суммы следующих трех интегралов:

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{(1-t)^{1-2\beta}}{t-x}\,dt\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\tau''(\lambda)\,d\lambda}{(t-\lambda)^{-2\beta}}=\int_{\varepsilon}^{x_1}\tau''(t)\,dt\int_{t}^{1}\frac{(\lambda-t)^{2\beta}(1-\lambda)^{1-2\beta}\,d\lambda}{\lambda-x}+$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\tau''(t)\,dt\int_{t}^{1}\frac{(\lambda-t)^{2\beta}(1-\lambda)^{1-2\beta}}{\lambda-x}\,d\lambda+$$
$$+\int_{x_2}^{1}\tau''(t)\,dt\int_{t}^{1}\frac{(\lambda-t)^{2\beta}(1-\lambda)^{1-2\beta}d\lambda}{\lambda-x},\tag{25}$$

где $\varepsilon<x_1<x<x_2<1$. В результате преобразований, аналогичных (24), получим

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{(1-t)^{1-2\beta}}{t-x}\,dt\int_{\varepsilon}^{t}\frac{\tau''(\lambda)\,d\lambda}{(t-\lambda)^{-2\beta}}=\int_{\varepsilon}^{x_1}\tau''(t)\Big[-\pi\operatorname{ctg}2\pi\beta\,(1-x)^{1-2\beta}\times$$
$$\times(x-t)^{2\beta}+\frac{\pi(1-x)}{\sin 2\pi\beta}-\frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta}\Big]dt+\tag{26}$$
$$+\frac{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(2-2\beta)}{2(1-x)}\int_{x_2}^{1}\tau''(t)(1-t)^2\times$$
$$\times F\left(1,\ 2-2\beta;\ 3;\ \frac{1-t}{1-x}\right)dt+\int_{x_1}^{x_2}\tau''(t)\,dt\int_{t}^{1}\frac{(\lambda-t)^{2\beta}(1-\lambda)^{1-2\beta}d\lambda}{\lambda-x}.$$

Подставим (26) в (24), интегралы возьмем по частям и, учитывая тот факт, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} i(x,\varepsilon)=J_1(x)$, получим

$$J_1(x)=\int_{x_1}^{x_2}\tau''(t)\,dt\int_{t}^{1}\frac{(\lambda-t)^{2\beta}(1-\lambda)^{1-2\beta}d\lambda}{\lambda-x}+\tau'(x_1)\Big[-\pi\operatorname{ctg}2\pi\beta\times$$
$$\times(1-x)^{1-2\beta}(x-x_1)^{2\beta}+\frac{\pi(1-x)}{\sin 2\pi\beta}-\frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta}\Big]-2\pi\beta\operatorname{ctg}2\pi\beta\,(1-x)^{1-2\beta}\times$$
$$\times(x-x_1)^{2\beta-1}\tau(x_1)+2\pi\beta(1-2\beta)\operatorname{ctg}2\pi\beta\,(1-x)^{1-2\beta}\int_{0}^{x_1}\tau(t)(x-t)^{2\beta-2}dt-$$
$$-\frac{2\pi\beta(1-2\beta)}{2(1-x)\sin 2\pi\beta}\tau'(x_2)(1-x_2)^2F\left(1,\ 2-2\beta;\ 3;\ \frac{1-x_2}{1-x}\right)-$$
$$-\frac{2\pi\beta(1-2\beta)}{(1-x)\sin 2\pi\beta}\tau(x_2)(1-x_2)F\left(1,\ 2-2\beta;\ 2;\ \frac{1-x_2}{1-x}\right)+$$
$$+\frac{2\pi\beta(1-2\beta)}{(1-x)\sin 2\pi\beta}\int_{x_2}^{1}\tau(t)F\left(2,\ 2-2\beta;\ 2;\ \frac{1-t}{1-x}\right)dt.\tag{27}$$

Положим в (27) $x=\xi$, $x_2=\xi+\varepsilon$, $x_1=\xi-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\max(\xi, 1-\xi)$, и перейдем к пределу при $\varepsilon\to0$:

$$J_1'(\xi) = -2\pi\beta \operatorname{ctg} 2\pi\beta (1-\xi)^{1-2\beta}\xi^{2\beta-1}\tau(\xi) +$$
$$+ 2\pi\beta(1-2\beta)\operatorname{ctg} 2\pi\beta(1-\xi)^{1-2\beta}\int_0^\xi [\tau(t)-\tau(\xi)](\xi-t)^{2\beta-2}\,dt +$$
$$+\frac{2\pi\beta(1-2\beta)}{\sin 2\pi\beta}(1-\xi)^{1-2\beta}\int_\xi^1 [\tau(t)-\tau(\xi)](t-\xi)^{2\beta-2}\,dt - \frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta}\tau(\xi). \tag{28}$$

Подставим (22) и (28) в (18), где $\gamma(x)\equiv0$,

$$\nu_1(\xi) = 2\beta\varkappa_2\left[\frac{1}{2\cos\pi\beta} + \frac{\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}}{\alpha(\xi)\xi^{-\beta}+\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}}(\cos\pi\beta -\right.$$
$$\left. -\sin\pi\beta\operatorname{ctg}2\pi\beta)\right]\cdot\left[\tau(\xi)\xi^{2\beta-1} - (1-2\beta)\int_0^\xi [\tau(t)-\tau(\xi)](\xi-t)^{2\beta-2}\,dt\right] -$$
$$-2\beta\varkappa_2\frac{1}{2\cos\pi\beta}\cdot\frac{\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}}{\alpha(\xi)\xi^{-\beta}+\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}}\left[\tau(\xi)(1-\xi)^{2\beta-1} -\right.$$
$$\left. -(1-2\beta)\int_\xi^1 [\tau(t)-\tau(\xi)](t-\xi)^{2\beta-2}\,dt\right]. \tag{29}$$

Чтобы $\nu_1(\xi)$ было отрицательным, достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\cos\pi\beta} + \dfrac{1}{2\cos\pi\beta}\cdot\dfrac{\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}}{\alpha(\xi)\xi^{-\beta}+\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}} \geqslant 0, \\ \dfrac{\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}}{\alpha(\xi)\xi^{-\beta}+\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}} \leqslant 0. \end{cases} \tag{30}$$

Так как $\alpha(x)=\alpha^*(x)x^p$, $p<\beta$, то система неравенств (30) имеет своим решением

$$-1\leqslant \frac{\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}}{\alpha(\xi)\xi^{-\beta}+\delta(\xi)(1-\xi)^{-\beta}} \leqslant 0. \tag{31}$$

Принцип экстремума А. В. Бицадзе применительно к задаче можно сформулировать в виде следующей теоремы [6].

Теорема. *Решение $U(x, y)$ поставленной задачи, удовлетворяющее краевому условию (6) при $\gamma(x)\equiv0$ и*

$$-1\leqslant \frac{\delta(x)(1-x)^{-\beta}}{\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}} \leqslant 0,$$

положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\bar{D}_1$ принимает на σ.

Из теоремы сразу следует единственность задачи.

4. Соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)=\dfrac{\partial U(x_i+0)}{\partial y}$ из эллиптической полуплоскости в случае нормального контура Γ:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}=\frac{1}{4}$$

имеет вид [4]

$$\tau(x)=-k_1\int_0^1\nu(t)\left[|t-x|^{-2\beta}-(t+x-2tx)^{-2\beta}\right]dt+$$

$$+k_1 2\beta(1-2\beta)^{-2\beta}x(1-x)\int_0^1\varphi(t)[t(1-t)]^{\beta-\frac{1}{2}}\left[x^2+(1-2x)t\right]^{-1-\beta}dt, \quad (32)$$

где

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left[2(1-2\beta)\right]^{-2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

Из гиперболической полуплоскости также имеем соотношение между $\nu_1(x)$ и $T(x)$ (16), которое с учетом (17) имеет вид

$$\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)\left[2(1-2\beta)\right]^{1-2\beta}}\nu_1(x)=-\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}}+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\beta)}{2\cos\pi\beta}T(x)+\frac{\Gamma(1-\beta)\delta(x)}{\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}}\times$$

$$\times\left[T(x)(1-x)^{-\beta}\cos\pi\beta+\frac{\sin\pi\beta}{\pi(1-x)^{1-\beta}}\int_0^1\frac{T(t)\,dt}{(1-t)^{2\beta-1}(t-x)}\right]. \quad (33)$$

Учитывая условия склеивания, из (33) и (32) исключим $T(x)$. После некоторых преобразований получим уравнение

$$\nu(x)\left[1-\sin\pi\beta-2\cos^2\pi\beta\sin\pi\beta\cdot\mu(x)\right]-\frac{\cos^2\pi\beta}{\pi}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\cos\pi\beta}+\cos\pi\beta\mu(x)\right]\int_0^1\nu(t)\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)dt-$$

$$-\frac{\sin\pi\beta\sin 2\pi\beta}{\pi}\mu(x)\int_0^1\nu(t)\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{dt}{t-x}-$$

$$-\frac{\sin 2\pi\beta\cos\pi\beta}{\pi^2}\mu(x)\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{dt}{t-x}\int_0^1\nu(t_1)\left(\frac{t_1}{t}\right)^{1-2\beta}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t_1-t}-\frac{1}{t_1+t-2tt_1}\right)dt_1=\frac{\Gamma(1-\beta)\left[2(1-2\beta)\right]^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)}F(x), \quad (34)$$

где

$$\mu(x)=\frac{\delta(x)(1-x)^{-\beta}}{\alpha(x)x^{-\beta}+\delta(x)(1-x)^{-\beta}}. \quad (35)$$

Рассмотрим интеграл

$$J^*(x)=\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{dt}{t-x}\int_0^1\nu(t_1)\left(\frac{t_1}{t}\right)^{1-2\beta}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{t_1-t}-\frac{1}{t_1+t-2tt_1}\right)dt_1, \tag{36}$$

изменим в нем порядок интегрирования, используя формулу Пуанкаре — Бертрана [7, 8], получим

$$J^*(x)=-\pi^2\nu(x)+\frac{2}{(1-x)^{1-2\beta}}\int_0^1\frac{\nu(t)(1-t)t^{1-2\beta}dt}{t-x}\times$$
$$\times\int_0^1\frac{\lambda^{2\beta}(1-\lambda)^{1-2\beta}d\lambda}{(\lambda-x)(\lambda+t-2t\lambda)}-\frac{2}{(1-x)^{1-2\beta}}\int_0^1\frac{\nu(t)t^{1-2\beta}dt}{t-x}\times$$
$$\times\int_0^1\frac{\lambda^{2\beta}(1-\lambda)^{1-2\beta}d\lambda}{(\lambda-t)(\lambda+t-2t\lambda)}. \tag{37}$$

С помощью подстановок [9]: $z=\dfrac{x(1-\lambda)}{\lambda(1-x)}$ и $z=\dfrac{t(1-\lambda)}{\lambda(1-t)}$ интеграл $J^*(x)$ преобразуем следующим образом:

$$J^*(x)=-\pi^2\nu(x)-\frac{1}{(1-x)^{1-2\beta}}\int_0^1\frac{\nu(t)(1-t)^{1-2\beta}dt}{t-x}\int_0^\infty\frac{z^{-2\beta}dz}{(1-z)[t+z(1-t)]}-$$
$$-\frac{1}{(1-x)^{1-2\beta}}\int_0^1\frac{\nu(t)(1-t)^{1-2\beta}(1-2t)}{t+x-2tx}dt\int_0^\infty\frac{z^{-2\beta}dz}{(1+z)[t+z(1-t)]}+$$
$$+x^{2\beta}\int_0^1\nu(t)t^{-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)dt\int_0^\infty\frac{z^{-2\beta}dz}{(1-z)[x+z(1-x)]}=$$
$$=\frac{1}{(1-x)^{1-2\beta}}\int_0^1\frac{\nu(t)(1-t)^{1-2\beta}dt}{t-x}[-\pi\operatorname{ctg}2\pi\beta+t^{-2\beta}\Gamma(1-2\beta)\Gamma(2\beta)\times$$
$$\times F(1-2\beta,\ -2\beta;\ 1-2\beta;\ t)\Bigg]-\frac{1}{(1-x)^{1-2\beta}}\times$$
$$\times\int_0^1\nu(t)(1-t)^{-2\beta}\frac{1-2t}{t+x-2tx}\cdot\frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta}F\left(1+2\beta,\ 1;\ 2;\ \frac{1-2t}{1-t}\right)dt+$$
$$+x^{2\beta}\left[-\pi\operatorname{ctg}2\pi\beta+\frac{\pi x^{-2\beta}(1-x)^{2\beta}}{\sin 2\pi\beta}\right]\times$$

$$\times \int_0^1 \nu(t)\, t^{-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) dt. \tag{38}$$

Имеет место рекуррентное соотношение Гаусса [5]:

$$\gamma F(\alpha, \beta-1; \gamma; z) - \gamma F(\alpha-1, \beta; \gamma; z) + (\alpha-\beta) z F(\alpha, \beta, \gamma+1; z) = 0,$$

применив которое, получим

$$-\frac{2\beta(1-2t)}{1-t} F\left(1+2\beta, 1; 2; \frac{1-2t}{1-t}\right) = 1 - \left(\frac{t}{1-t}\right)^{-2\beta}.$$

С учетом тождества

$$\frac{1}{t-x} - \frac{1-2t}{t+x-2tx} = \frac{1-t}{1-x}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x-2tx}\right)$$

$J^*(x)$ преобразуется к виду

$$J^*(x) = -\pi^2 \nu(x) + \pi \operatorname{ctg} 2\pi\beta \int_0^1 \nu(t) \left(\frac{t}{x}\right)^{-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)} \right]^{-2\beta} - 1 \right\} dt + \pi \operatorname{tg} \pi\beta \int_0^1 \nu(t) \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta} \frac{dt}{t+x-2tx}. \tag{39}$$

Подставим (39) в (34). Получим сингулярное интегральное уравнение вида

$$A(x)\rho(x) + \frac{B(x)}{\pi i} \int_0^1 \rho(t) \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) dt +$$

$$+ \cos \pi\beta \mu(x) \int_0^1 \rho(t) K(x, t)\, dt = f(x), \tag{40}$$

где

$$\rho(x) = \nu(x) x^{-2\beta}, \quad f(x) = \frac{\Gamma(1-\beta)\,[2(1-2\beta)]^{1-2\beta}}{\Gamma(2-2\beta)} F(x) x^{-2\beta},$$

$$A(x) = 1 - \sin \pi\beta, \quad B(x) = -i \cos \pi\beta\, [1 + 2\mu(x)],$$

$$K(x, t) = \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) \left\{ 1 - \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)} \right]^{-2\beta} \right\}$$

— ядро со слабой особенностью.

Так как $A^2(x) - B^2(x) \neq 0$, то сингулярное интегральное уравнение (40) нормального типа.

Производя замену переменных [10]:

$$\tau = \frac{t^2}{1-2t+2t^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{x^2}{1-2x+2x^2}.$$

Уравнение (40) сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши. Применяя затем к нему известный метод регуляризации Карлемана — Векуа [7, 8], приходим к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Литература

1. Hardy G., Littlewood J. Some properties of fractional integrals. I. Math., Z., **27**, 565—606, 1928.

2. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения, 5, № 1, 1969.

3. Бицадзе А. В. Механика сплошной среды и некоторые родственные проблемы анализа. К 80-летию академика Н. И. Мусхелишвили, 1972.

4. Кароль И. Л. Автореф. канд. дисс. Л., ЛГУ, 1952.

5. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

6. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.

7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.

8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.

9. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., «Наука», 1970.

10. Manwell A. R. Arch. Rut. Mech. Analysis, **12**, 3, 1963.

Поступила в редакцию
27 января 1976 г.

Оренбургский политехнический институт