



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Боголюбов, Математические проблемы квантовой теории поля,
УМН, 1965, том 20, выпуск 3, 31–40

<https://www.mathnet.ru/rm6025>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

25 апреля 2025 г., 11:27:55



УДК 519.9

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Н. Н. Б о г о л ю б о в

Квантовая теория поля, изучающая взаимодействия так называемых элементарных частиц, зародилась сравнительно уже давно — в конце двадцатых — начале тридцатых годов.

В соответствии с положением, существовавшим в то время, она формулировалась как квантовая электродинамика, имеющая дело с взаимодействием электронов, позитронов и фотонов.

В настоящее время открыто очень много элементарных частиц; стало ясно, что взаимодействия между ними распадаются на три класса: 1) сильные, или ядерные, взаимодействия, 2) электромагнитные, 3) слабые взаимодействия, резко различающиеся друг с другом уже по своей интенсивности.

Таким образом, область приложения квантовой теории поля весьма существенно расширилась. Мне бы хотелось подчеркнуть, что несмотря на достигнутые успехи в рассмотрении различных проблем этой теории, те фундаментальные трудности, с которыми мы встретились еще в самом начале работ по квантовой электродинамике, трудности, связанные с необходимостью синтеза принципов теории относительности с принципами квантовой механики, остаются нерешенными до сих пор. В различных предлагающихся подходах иногда меняется лишь форма их выражения, но, по существу, дело идет об одном и том же. В общих чертах можно сказать, что природа этих фундаментальных трудностей коренится в самых основных представлениях квантовой теории поля — представлении о точечности частиц и локальности их взаимодействий: различные поля взаимодействуют в одной и той же точке. Наблюдаемая на опыте структура элементарных частиц считается вторичной, является динамическим эффектом. Теперь говорят, что «первоначальная» или «голая» частица окружена как бы облаком виртуальных частиц, облаком, которое и ответственно за наблюдаемую структуру реальных частиц.

Нетрудно сообразить, что благодаря точечности «голых» частиц в теории сейчас же появляются обобщенные функции. С другой стороны, благодаря наличию локального взаимодействия уравнения движения нелинейны и мы сталкиваемся с необходимостью производить нелинейные операции над обобщенными функциями. В этом и коренится глубокая физическая

причина тех принципиальных математических трудностей, в которые упирается развитие квантовой теории поля.

Может показаться, что дело здесь легко поправить и что представление о точечности «голых частиц» излишне идеализировано. Казалось бы, что с физической точки зрения было бы более реалистично вводить в теорию частицы, обладающие каким-то пространственным размером l , вводить, как говорят, элементарную длину. Но, поскольку мы должны учитывать требования теории относительности, мы сейчас же должны приписать частице также и «временной размер» $\Delta t \sim \frac{l}{c}$. Но что означает наличие временной длительности Δt ? Оно означает, что в интервале времени продолжительности Δt нельзя говорить о соотношении «раньше — позже». В свою очередь отсюда появляется отступление, правда, так сказать, «микроскопическое», от закона причинности. Нарушение же причинности «в малом» благодаря наличию соответствующих групп может привести и к нарушению причинности «в большом», что недопустимо.

Разовьем сейчас эти простые и наглядные соображения применительно к формулировке основных уравнений квантовой теории поля. Остановимся сейчас на самом первоначальном, но сохранившем свое значение и до сих пор, представлении.

Как известно, классическая теория поля может быть построена, исходя из вариационного принципа:

$$\delta \int L \left(\dots, \varphi_\alpha, \dots, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta}, \dots \right) dx = 0$$

с локальным лагранжианом L , зависящим от полевых функций φ в точках x пространства-времени и их частных производных. При этом лагранжиан должен обладать свойством инвариантности по отношению к группе Лоренца и к другим соответствующим группам.

Данный вариационный принцип приводит к уравнениям движения для полевых функций. В квантовой теории мы сохраняем, по существу, те же самые уравнения, но смысл полевых функций радикальным образом изменяется. Действительно, в классической теории значения компонент φ являются обычными вещественными или комплексными числами. В квантовой же теории мы имеем дело с полями частиц, которые могут рождаться и уничтожаться; полевые функции $\varphi(x)$ здесь должны характеризовать рождение и уничтожение частиц в точках пространства-времени.

Таким образом, $\varphi(x)$ рассматриваются как операторы, действующие на «амплитуды состояний» («state vector») — элементы некоторого линейного пространства, пространства состояний изучаемой динамической системы. Поэтому в квантовой теории уравнения движения дополняются соответствующими коммутационными соотношениями. Типичные уравнения движения, рассматриваемые в квантовой теории поля, имеют вид

$$D\varphi + k_0\varphi = \sum g_0 \prod \varphi.$$

Здесь для бозе-полей D — даламбертиан, $k_0 = m_0^2$ — квадрат массы «голой» частицы; для ферми-полей D — диракиан, $k_0 = m_0$; $\prod \varphi$ — произведение

двух или трех полей в той же точке x пространства-времени; наконец, g_0 — «затравочные» константы связи. Левая часть написанных уравнений обуславливается лагранжианом L_0 для свободных, невзаимодействующих частиц (квадратичная форма), правая часть — лагранжианом взаимодействия L_{int} , который выбирается в виде суммы произведений полевых операторов в одной и той же точке (локальность взаимодействия). Коммутационные соотношения выражают коммутатор или антикоммутатор

$$[\varphi_\alpha(x_1); \varphi_\beta(x_2)]$$

для двух произвольных точек x_1, x_2 , лежащих на одной пространственно-подобной поверхности через трехмерные δ -функции. Впервые они были получены переходом к гамильтоновскому формализму и использованием общепринятых в обычной нерелятивистской квантовой механике перестановочных соотношений между «координатами» и «импульсами». Наличие δ -функций в перестановочных соотношениях указывает, что $\varphi(x)$ могут рассматриваться лишь как несобственные или обобщенные операторы. С другой стороны, в уравнения движения входит их произведение. Ввиду этого проблема математически корректного подхода к принятым уравнениям оказывается исключительно сложной. Не ясно, имеют ли они вообще какой-либо смысл и можно ли пытаться рассматривать их как логически непротиворечивую основу для теории поля с помощью введения подходящего определения понятия умножения обобщенных операторов. Если попытаться регуляризовать перестановочные соотношения (отказ от точечности частиц) или заменить локальные произведения

$$\prod \varphi(x)$$

нелокальными выражениями

$$\int K(x, x_1, x_2, \dots) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots dx_1 dx_2 \dots$$

(переход к нелокальному взаимодействию), то уравнения движения становятся несовместимыми с перестановочными соотношениями. Такое положение как раз и отражает трудности, связанные с нарушением закона причинности при отступлении от точной локальности, о которых мы уже говорили выше.

Заметим сейчас, что в квантовой теории поля основную роль играет оператор рассеяния, называемый обычно « S -матрицей». Этот оператор характеризует переход от начального состояния изучаемой динамической системы при $t = -\infty$, в котором имеются лишь бесконечно удаленные друг от друга и потому невзаимодействующие частицы, к конечному состоянию при $t = +\infty$, когда опять частицы оказываются бесконечно удалены.

Мы вообще можем не рассматривать уравнений движения для полевых операторных функций и иметь дело только с оператором S . Формально его можно выразить через лагранжиан взаимодействия с помощью известной формулы

$$S = T \left(\exp i \int L_{\text{int}}(x) dx \right).$$

Здесь в L_{int} зависимость полевых операторов $\varphi_x(x)$ от x взята такой же, как для свободных, не взаимодействующих полей. Следует подчеркнуть, что эта формула имеет лишь чисто символический, интуитивный характер и не может рассматриваться как математическое определение. T -экспонента здесь просто символическая запись ряда

$$\sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int T \{L_{\text{int}}(x_1) \dots L_{\text{int}}(x_n)\} dx_1 \dots dx_n,$$

в котором T -произведение

$$T \{L_{\text{int}}(x_1) \dots L_{\text{int}}(x_n)\}$$

«определяется» как произведение операторов $L(x_j)$, расположенных в порядке возрастания слева направо, соответствующих временных координат t_j . Иначе говоря, здесь мы имеем лишь формальную запись ряда теории возмущений «по степеням взаимодействия».

Отметим, что теория возмущений появилась уже в начале работ по созданию квантовой электродинамики. Это было тогда совершенно естественно, поскольку в электродинамике мы имеем действительно малый параметр — безразмерную константу связи, так называемую постоянную тонкой структуры $= 1/137$. Оказалось, однако, что только первое приближение теории возмущений приводило к результатам, находившимся в удовлетворительном согласии с экспериментом. Построение же высших приближений не только не давало уточнения первого приближения, но приводило к математически бессмысленным, расходящимся выражениям. Именно, в этих высших приближениях всегда содержались интегралы по пространству импульсов от функций, недостаточно быстро убывающих на бесконечности, и потому стали говорить об ультрафиолетовой катастрофе в теории возмущений.

Анализируя физические причины такого положения, исследователи пришли к пониманию того, что основная трудность коренится в самих представлениях о точечности частиц и локальности их взаимодействий. Ввиду того, что подобные представления очень легко критиковать как излишне идеализированные и нефизические, стало популярным мнение, что успех в разрешении этих трудностей должен прийти от новых физических идей, и начало появляться большое количество поисковых работ в таком направлении.

В настоящее время интересно подчеркнуть, что первый успех пришел здесь не от новых физических идей, а от чисто формального подхода, известного теперь под именем ренормализационной, или вычитательной, процедуры. Скажем сейчас несколько слов по поводу этой процедуры. Обозначим через m_0 и α_0 массу и безразмерный заряд электрона (постоянную тонкой структуры), входящие в лагранжиан. Тогда полная масса и заряд электрона, наблюдаемые в эксперименте, представляются разложением:

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + \dots,$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$$

Таким образом, m_0, α_0 можно интерпретировать как «затравочные значения» или значения, соответствующие «голой частице», члены же $m_1 + m_2 + \dots,$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ как полевые добавки к массе и заряду, обусловленные взаимодействием электронно-позитронного и электромагнитного полей. Заметим, кстати, что все $m_1, m_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ содержат расходящиеся интегралы.

Пусть теперь мы хотим иметь дело только с реальной массой и зарядом и соответственно хотим так перестроить разложения теории возмущений, чтобы в первом и в любом следующем приближении масса и заряд точно равнялись m, α . Для этой цели стоит лишь положить в исходном лагранжиане системы

$$m_0 = m - m_1 - m_2 - \dots,$$

$$\alpha_0 = \alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots$$

и надлежащим образом последовательно определять $m_1, m_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$. Исследуемые физические величины, например, элементы матрицы рассеяния, представятся тогда в виде рядов со степенями α .

Было обнаружено замечательное свойство таких разложений — в их членах уже нет ультрафиолетовых расходимостей. Они как бы взаимно вычитаются, именно расходимости, обусловленные членами лагранжиана, пропорциональными α , последовательно компенсируются с расходимостями, происходящими от членов лагранжиана, содержащих m_1, α_1 и т. д. Этот неожиданный факт был сначала замечен во втором приближении при расчете ряда конкретных эффектов, а затем был установлен и в общем случае. Мы умеем теперь формулировать теорию возмущений, в которой любое фиксированное приближение свободно от расходимостей. Конечно, это представляет лишь весьма частичный успех, однако, он имеет большое практическое значение для квантовой электродинамики, поскольку им был открыт путь к расчету радиационных поправок для важных физических величин до любого порядка по степеням α . Прделанные многочисленные расчеты (в частности, расчеты лэмбовского сдвига, смещения уровней, аномального магнитного момента электрона и т. д.) находятся в блестящем согласии с экспериментом и в ряде случаев полученная степень точности пока выше достигнутой в экспериментах.

Ренормализационная процедура в рамках теории возмущений была формально расширена и на случай учета сильных взаимодействий. Но здесь положение совершенно другое, чем в электродинамике. Обобщение ренормализационной техники для теории сильных взаимодействий имеет характер скорее чисто формального достижения, без *непосредственных* практических выходов, поскольку здесь мы не имеем малого параметра и сама идея подхода, основанного на теории возмущений, представляется неэффективной.

Тем не менее следует признать, что разработка общей схемы теории возмущений внесла важный вклад в наше, так сказать, «общее образование» и получила большое эвристическое значение. В связи с этой теорией были построены весьма полезные понятия и методы. Возьмем, например, введение функций Грина и диаграммную технику. Диаграммная техника сейчас широко используется даже и для качественного исследования. Не только теоретики, но и экспериментаторы прибегают к фейнмановским диаграммам при дискуссии экспериментальной ситуации.

Отметим также, что при рассмотрении общей схемы теории возмущений удалось вскрыть математическую природу успеха ренормализационной процедуры в устранении расходимостей из отдельных членов. По этому поводу заметим, что в n -й член теории возмущений входит T -произведение:

$$T \{L_{\text{int}}(x_1) \dots L_{\text{int}}(x_n)\}.$$

Раскрывая его на сумму произведения коэффициентных функций и простых операторных функций, мы заметим, что коэффициентные функции имеют вид

$$iD(x_j - x_j),$$

где D — функция Грина для соответствующих свободных полей. Они являются обобщенными функциями весьма специального типа.

Кроме того, между коэффициентными функциями имеется ряд алгебраических соотношений, выражающих свойства унитарности и причинности.

Если в рассматриваемое произведение подставить фурье-представления для функций D и формально выполнить интеграцию по импульсным переменным, мы сейчас же получим обычные ультрафиолетовые расходимости.

Можно, однако, определить произведение обобщенных функций D изучаемого типа вполне корректно. Для этого можно исходить из того факта, что это произведение вполне определено как функционал на подпространстве соответствующего пространства C_∞ функций $f(x_1, \dots, x_n)$, у которого $f(x_1, \dots, x_n)$ и достаточное количество их частных производных обращаются в нуль при совпадении любой пары аргументов x_1, \dots, x_n .

Затем используется техника расширения линейных функционалов с соблюдением упоминавшихся алгебраических соотношений.

Таким образом, рассматриваемое произведение обобщенных функций строго определяется как функционал уже на всем C_∞ .

Оказывается, что эта процедура полностью эквивалентна ренормализации.

Можно сказать, что для ликвидации ультрафиолетовых расходимостей в отдельных членах теории возмущений достаточно лишь правильно определить T -произведения:

$$T \{L_{\text{int}}(x_1) \dots L_{\text{int}}(x_n)\}.$$

Мы говорили уже о том, что в теории сильных взаимодействий нет малого параметра и потому нельзя непосредственно использовать теорию возмущений.

Следует, однако, подчеркнуть, что и в теориях, где имеется малый параметр, скажем, в квантовой электродинамике, положение весьма усложняется при переходе к достаточно высоким энергиям.

Так, например, n -й член разложения одночастичной функции Грина пропорционален не просто α^n , а произведению $\alpha^n \left| \ln \frac{k^2}{m^2} \right|$, где k^2 — релятивистский квадрат 4-импульса и потому при $k \rightarrow \infty$ у нас не будет более малого параметра.

Ясно поэтому, что проблема сходимости рядов теории возмущений представляет совершенно исключительные трудности.

Ликвидировав расходимость в отдельных членах этих рядов, мы не имеем никакой, даже самой предварительной, интуитивной идеи о суммировании всего ряда.

Таким образом, вопрос о том, существует ли вообще даже квантовая электродинамика как теория, свободная от внутренних противоречий, остается открытым.

При рассмотрении проблемы приближенных решений может возникнуть вопрос, почему такое большое значение приписывается малому параметру. Ведь принципиально возможны и иные способы получения приближенных решений, не зависящие от малого параметра. Но дело в том, что до сих пор ренормализационную процедуру удалось сформулировать только применительно к теории возмущений, и мы не знаем, как устранить расходимости, появляющиеся в других подходах.

Иначе говоря, мы умеем корректно определять T -произведения только из конечного числа множителей и не можем пока подойти к определению трансцендентных T -операций.

В такой ситуации были предложены различные направления исследований, вызвавшие весьма большое количество работ.

Так изучался ряд упрощенных моделей для квантовой теории поля.

Развивались различные методы суммирования «главнейших» диаграмм. К сожалению, понятие «главнейших» диаграмм носит еще в сильной степени чисто субъективный характер. Большое внимание уделялось применению континуального интегрирования.

Дело в том, что оказалось возможным выразить квантовополевые функции Грина с помощью функциональных квадратур от функций Грина для свободных, невзаимодействующих частиц во внешнем классическом поле.

Такие функции являются обычными функциями Грина для линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Внешнее поле рассматривается как их «функциональный аргумент».

Исследование этих обычных функций Грина не представляет принципиальных трудностей. Глубокие, принципиальные трудности появляются, когда мы переходим к выполнению интеграции по функциональным аргументам — внешним классическим полям.

Эта интеграция должна проводиться по мере, имеющей некоторое сходство с мерой Винера, используемой в теории случайных функций.

Существенно важное отличие состоит в том, что под знаком экспоненты стоит не вещественное, как у Винера, а комплексное выражение.

Несмотря на большое число появившихся работ, исследования в этом направлении еще не вышли из самой начальной стадии более или менее чисто формального подхода.

До сих пор не ясно, как будет с расходимостями. Можно ли вообще придать определенный математический смысл данной функциональной квадратуре?

Не удастся исследовать на этой основе и качественные свойства. Так, например, спектральные представления, легко устанавливающиеся из

других рассуждений, не удастся получить, исходя из функциональных квадратур.

Большое значение, как теоретическое, так и практическое, получили направления исследований, связанные с дисперсионными соотношениями.

По существу, дисперсионное соотношение представляет собой формулу Коши для функции комплексного переменного, регулярной во всей комплексной плоскости (без существенных особенностей на бесконечности), за исключением линий разреза, лежащих на вещественной оси.

Такая формула Коши называется дисперсионным соотношением, когда она взята для функции, представляющей матричный элемент оператора рассеяния.

В настоящее время основное внимание уделяется процессам, при которых в начале и в конце имеются две частицы.

Для таких процессов соответствующая амплитуда рассеяния выражается через функции, зависящие от двух переменных; за одну из них можно принять энергию в некоторой системе отсчета, а за другую — передачу импульса.

Рассмотрим дисперсионное соотношение по энергетической переменной для процесса рассеяния двух частиц.

С его помощью, переходя к вещественной оси, мы сейчас же можем выразить вещественную часть амплитуды рассеяния через ее мнимую часть.

Здесь надо заметить, что через мнимую часть этой амплитуды выражается полное эффективное сечение для рассматриваемого процесса, через модуль амплитуды выражается дифференциальное эффективное сечение для рассеяния на заданный угол.

Таким образом, вещественная и мнимая части амплитуды могут быть экспериментально найдены, во всяком случае, в физической области значений энергии.

Так как в теории сильных взаимодействий получение даже приближенных количественных результатов весьма нетривиально, точные равенства, вытекающие из дисперсионных соотношений, привлекли к себе большой интерес.

В тех случаях, когда линии разреза включают только физически допустимые энергии, эти соотношения можно проверять на эксперименте. Такое положение имеет место, например, для рассеяния на нулевой угол пионов на нуклонах.

Чтобы иметь возможность пользоваться дисперсионными соотношениями, необходимо было прежде всего установить соответствующие свойства аналитичности у рассматриваемых элементов матрицы рассеяния.

В связи с этим возник вопрос, какие формулировки квантовой теории поля можно использовать для такой цели.

Дело в том, что в квантовой теории поля, хотя и существует много подходов, но все они пока не поддаются настоящей математической формулировке, а ведь вопрос стоит об установлении вполне конкретного математического факта — об установлении свойств аналитичности.

С другой стороны, уже из первых предварительных соображений по обоснованию дисперсионных соотношений стало ясно, что они зависят лишь от очень общих принципов и для них несущественны конкретные особенности изучаемой динамической системы.

Естественно поэтому, что в такой ситуации возник интерес к построению аксиоматического подхода.

Здесь внимание было привлечено к дистилляции экстракта из квантовой теории поля, экстракта, который поддается формулировке в виде ряда общих аксиом, выражающих ее наиболее основные представления.

В настоящее время построено несколько таких аксиоматических систем. Во всех их стремятся математически сформулировать весьма глубокие, и, по-видимому, необходимые требования, а именно:

1. Инвариантность по отношению к некоторой фундаментальной группе, включающей, разумеется, группу Лоренца.

2. Так называемое спектральное условие. Предполагается, что существует полная система состояний динамической системы с положительными энергиями; единственным состоянием с нулевой энергией является вакуумное состояние.

3. Унитарность оператора рассеяния.

4. Условие локальности и микрокаузальности. Это последнее условие требует явного введения пространства-времени, что может быть произведено различным путем. Остановимся здесь на одном из них.

Вводим классические внешние поля («произвольные» функции пространства-времени) совместно с соответствующими квантовыми полями и рассматриваем S -оператор как функционал от этих классических полей:

$$S = S(\varphi).$$

Тогда динамические величины смогут быть выражены через вариационные производные:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_{x_1} \dots \delta \varphi_{x_s}} S^+.$$

Налагается условие, что их средние являются обобщенными функциями медленного роста.

Условие микрокаузальности представляется в виде

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_y} \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi_x} S^+ \right) = 0 \quad \text{для } y \ll x.$$

Основываясь на этих условиях, мы можем установить надлежащие свойства аналитичности функций двух комплексных переменных, функций, входящих в амплитуду рассеяния двух частиц.

Область аналитичности здесь получается довольно ограниченной, но вполне достаточной для установления дисперсионных соотношений в ряде физически важных ситуаций. Дисперсионные соотношения получили большое применение в самых разнообразных вопросах, в частности, для приближенного расчета различных процессов соударения частиц.

Мне хотелось бы, однако, подчеркнуть, что наиболее интересная ситуация возникла бы в том случае, в котором дисперсионные соотношения, доступные экспериментальной проверке, были бы опровергнуты в результате такой проверки.

Действительно, это означало бы, что эксперимент вступил в противоречие с самыми основными представлениями квантовой теории поля, поскольку рассматриваемые соотношения являются их прямым следствием.

Такое же положение мы имеем и с так называемыми асимптотическими соотношениями между эффективными сечениями, которые устанавливаются, исходя из свойств аналитичности амплитуды рассеяния с помощью теоремы Фрагмена — Линделёфа.

В своем докладе я не имел возможности осветить новое, чрезвычайно быстро развивающееся и многообещающее направление, в котором для исследования свойств элементарных частиц и резонансов применяются группы SU_3 и SU_6 .

Такой групповой подход уже дал много важных результатов. Пока он носит еще, в сущности, чисто кинематический характер. Было бы весьма интересно построить теперь соответствующие динамические модели и на них выяснить природу установленных групповых закономерностей.