И. Р. Каюмов, Спектр интегральных средних и модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, *Алгебра и анализ*, 2005, том 17, выпуск 3, 107–123

Алгебра и анализ
Том 17 (2005), №3

СПЕКТР ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ И МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

© И. Р. КАЮМОВ

Введение

Пусть Ω — односвязная область на плоскости, не совпадающая с ней, f — конформное отображение круга $D = \{|z| < 1\}$ на Ω. В современной теории граничного поведения конформных отображений важную роль играет спектр интегральных средних [6, 16, 18]

$$\beta_f(t) = \limsup_{r\to 1} \frac{\log \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^t d\theta}{\log \frac{1}{1-r}}.$$

Для хороших областей функция $\beta_f(t)$ кусочно-линейна по t. Наиболее нетривиально спектр интегральных средних ведет себя в том случае, когда Ω имеет фрактальную границу.

В данной работе мы вводим новую величину, которая тесно связана со спектром интегральных средних $\beta_f(t)$. Пусть f — локально-однолистная и аналитическая в круге $D = \{|z| < 1\}$ функция. Тогда $\log f'$ также является аналитической в круге D функцией и может быть разложена в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, равномерно сходящийся внутри D. Величину

$$\beta_f^*(t) = \limsup_{r\to 1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \log I_0(t|a_k|r^k)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 05–01–00523, 03–01–00015, а также фонда НИОКР АН РТ.

назовем $*$-спектром интегральных средних. Здесь

$$I_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\nu} \frac{1}{\nu!^2}$$

— модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Так как $\log I_0(x) \leqslant x^2/4$, то $\beta_f^*(t)$ будет являться конечной функцией от t, если

$$\limsup_{r\to 1} \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}}{\log \frac{1}{1-r}} < \infty.$$

Последнее соотношение выполняется для любой аналитической и однолистной в круге D функции f.

Модифицированная функция Бесселя I_0 при исследовании величины $\beta_f(t)$ была впервые использована Роде [18, с. 191; 19]. Им было показано, что если $\log f'(z) = a \sum z^{q^k}$, то $\beta_f(t) \geqslant \log I_0(at)/\log q$.

Ниже будет показана связь характеристик $\beta_f(t)$ и $\beta_f^*(t)$. Мы докажем, что $\beta_f^*(t)$ (как и $\beta_f(t)$) является непрерывной выпуклой функцией от t. Далее будет показано, что спектр $\beta_f(t)$ может быть получен из $\beta_f^*(t)$ путем „поворота" коэффициентов функции $\log f'(z)$. Также будет доказано, что если тейлоровские коэффициенты a_k разложения функции $\log f'(z)$ положительны, то $\beta_f(t) \geqslant \beta_f^*(t)$.

Кроме того, будет доказана известная гипотеза Бреннана $\beta_f(-2) \leqslant 1$ в предположении, что функция $\log f'(z)$ представима в виде лакунарного ряда Адамара с показателем $q \geqslant 15$.

Основные результаты

Хорошо известно [18, с. 176], что спектр интегральных средних $\beta_f(t)$ является выпуклой функцией. Таким же свойством обладает и $*$-спектр интегральных средних.

Теорема 1. *Предположим, что функция f аналитична и однолистна в круге D. Тогда $*$-спектр интегральных средних $\beta_f^*(t)$ является непрерывной выпуклой функцией от t на всей числовой прямой.*

Доказательство. Для $r \in (0,1)$ и $t \in (-\infty, \infty)$ обозначим

$$g(t,r) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \log I_0(t|a_k|r^k)}{|\log(1-r)|}.$$

Покажем, что $g(t,r)$ является выпуклой функцией по t при любом фиксированном $r \in (0,1)$. Для этого достаточно показать, что каждое слагаемое

$\log I_0(t|a_k|r^k)$ является выпуклой функцией от t. Проверим это. Хорошо известно [18, с. 191], что

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Пусть t_1, t_2 — произвольные вещественные числа, а $\lambda \in [0,1]$. Тогда

$$\log I_0(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = \log\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right]$$
$$\leqslant \log\left[\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{t_1\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right)^{\lambda}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{t_2\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right)^{1-\lambda}\right]$$
$$= \lambda\log I_0(t_1) + (1-\lambda)\log I_0(t_2).$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера. Таким образом, доказана выпуклость функции $\log I_0(x)$, а вместе с нею и выпуклость функции $g(t,r)$ по t. Рассмотрим опять произвольные вещественные числа t_1, t_2 и $\lambda \in [0,1]$. Итак,

$$\beta_f^*(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = \limsup_{r\to 1} g(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, r)$$
$$\leqslant \limsup_{r\to 1}[\lambda g(t_1,r) + (1-\lambda)g(t_2,r)]$$
$$\leqslant \lambda\limsup_{r\to 1} g(t_1,r) + (1-\lambda)\limsup_{r\to 1} g(t_2,r) = \lambda\beta_f^*(t_1) + (1-\lambda)\beta_f^*(t_2).$$

Теорема 1 доказана. •

Если коэффициенты ряда Тейлора в разложении функции $\log f'(z)$ положительны, то *-спектр интегральных средних не превосходит спектр интегральных средних. А именно справедлива

Теорема 2. *Пусть* $t \geqslant 0$, $a_k \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \log f'(z)$. *Тогда*

$$\beta_f(t) \geqslant \beta_f^*(t).$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Индукционное предположение сформулируем так: существуют числа $\theta_1(r)$, $\theta_2(r), \ldots, \theta_n(r)$ такие, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[t\Re\sum_{k=1}^{n} a_k r^k e^{i(k\theta+\theta_k)}\right]\mathrm{d}\theta = \prod_{k=1}^{n} I_0(ta_k r^k). \qquad (1)$$

Справедливость этого утверждения при $n = 1$ очевидна. Предположим, что оно верно для некоторого натурального числа n. Рассмотрим непрерывную 2π-периодическую функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[t\Re\sum_{k=1}^{n} a_k r^k e^{i(k\theta+\theta_k)} + t\Re\left(a_{n+1}r^{n+1}e^{i((n+1)\theta+x)}\right)\right]d\theta.$$

Используя теорему Фубини, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = I_0(ta_{n+1}r^{n+1})\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\exp\left[t\Re\sum_{k=1}^{n} a_k r^k e^{i(k\theta+\theta_k)}\right]d\theta$$
$$= \prod_{k=1}^{n+1} I_0(ta_k r^k).$$

По теореме о среднем для непрерывных функций отсюда следует, что существует $\theta_{n+1}(r)$ такое, что

$$\varphi(\theta_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} I_0(tr^k a_k).$$

Последовательность чисел θ_k построена. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (1) и пользуясь сходимостью ряда в левой части, заключаем, что существует последовательность вещественных чисел $\{\theta_k\}$ такая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[t\Re\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{i(k\theta+\theta_k)}\right]d\theta = \prod_{k=1}^{\infty} I_0(ta_k r^k).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(re^{i\theta})|^t d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\exp\left[t\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\cos(k\theta)\right]\right|d\theta$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\exp\left[\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}\right]\right|^2 d\theta.$$

Поскольку тейлоровские коэффициенты функции $\exp(tz/2)$ положительны, в силу равенства Парсеваля справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\exp\left[\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^k e^{ik\theta}\right]\right|^2 d\theta \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\exp\left[\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{i\theta_k} r^k e^{ik\theta}\right]\right|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[t\Re\sum_{k=1}^{\infty}a_k r^k e^{i(k\theta+\theta_k)}\right]d\theta = \prod_{k=1}^{\infty} I_0(ta_k r^k).$$

Отсюда следует, что

$$\beta_f(t) = \limsup_{r\to 1}\frac{\log\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^t d\theta}{|\log(1-r)|} \geqslant \limsup_{r\to 1}\frac{\log\prod_{k=0}^{\infty} I_0(ta_k r^k)}{|\log(1-r)|} = \beta_f^*(t). \quad \bullet$$

Теорема 3. *Предположим, что функция f аналитична и однолистна в круге D. Тогда *-спектр интегральных средних может быть вычислен по формуле*

$$\beta_f^*(t) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\log I_0(t|a_k|),$$

где a_k — тейлоровские коэффициенты функции $\log f'(z)$.

Доказательство. В [1] показано, что коэффициенты a_k разложения Тейлора логарифма производной однолистной функции f удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2 r^{2k} \leqslant \frac{36}{(1-r^2)^2}.$$

Полагая в этом неравенстве $r^2 = 1 - 1/n$, заключаем, что

$$\sum_{k=n}^{2n}|a_k|^2 \leqslant 144, \quad n \geqslant 2. \tag{2}$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{2^l}|a_k|^2 = \sum_{j=0}^{l-1}\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1}|a_k|^2,$$

из (2) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \leqslant 288\log_2 n, \quad n \geqslant 2. \tag{3}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $r = 1 - \varepsilon/n$. Рассмотрим теперь разность

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \log I_0(t|a_k|)}{\log n} - \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \log I_0(t|a_k|r^k)}{|\log(1-r)|} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \log I_0(t|a_k|)}{\log n} - \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \log I_0(t|a_k|r^k)}{\log n - \log \varepsilon}.$$

Чтобы оценить главную часть этой разницы, оценим предварительно следующую величину:

$$\sum_{k=1}^{n} \log I_0(t|a_k|) - \sum_{k=0}^{\infty} \log I_0(t|a_k|r^k).$$

Покажем, что

$$|\log I_0(x) - \log I_0(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x^2 - y^2|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что функция $u(x) = \exp(-x^2/4) I_0(x)$ убывает на $\mathbb{R}$. Дифференцируя функцию u, имеем

$$\begin{aligned} e^{x^2/4} u'(x) &= I_0'(x) - \frac{x}{2} I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k x^{2k-1}}{4^k k!^2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{4^k k!^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{4^k k!(k+1)!} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{4^k k!^2} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \log I_0(t|a_k|) - \sum_{k=0}^{\infty} \log I_0(t|a_k|r^k) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n} (\log I_0(t|a_k|) - \log I_0(t|a_k|r^k)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \log I_0(t|a_k|r^k) \\ &\quad \leqslant \frac{t^2}{4} \sum_{k=1}^{n} (|a_k|^2 - |a_k|^2 r^{2k}) + \frac{t^2}{4} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \\ &\quad \leqslant \frac{t^2}{4} (1 - r^{2n}) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \frac{t^2}{4} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}. \end{aligned}$$

Подставляя $r = 1 - \varepsilon/n$ в последнее выражение, заключаем, что асимптотически оно эквивалентно выражению

$$\frac{t^2}{4}(1 - e^{-2\varepsilon}) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \frac{t^2}{4} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 e^{-2\varepsilon k/n}. \tag{4}$$

В силу соотношения (3)

$$\frac{t^2}{4}(1-e^{-2\varepsilon})\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \leqslant 72t^2(1-e^{-2\varepsilon})\log_2 n.$$

Оценим теперь второй ряд в (4). Мы имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^2 e^{-2\varepsilon k/n} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=2^j(n+1)}^{2^{j+1}(n+1)-1}|a_k|^2 e^{-2\varepsilon k/n}$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} e^{-2\varepsilon j}\sum_{k=2^j(n+1)}^{2^{j+1}(n+1)-1}|a_k|^2 \leqslant \frac{144}{1-e^{-2\varepsilon}}.$$

В последнем неравенстве мы использовали соотношение (2). Таким образом,

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\log I_0(t|a_k|)}{\log n} - \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\log I_0(t|a_k|r^k)}{\log n}\right|$$
$$\leqslant \frac{72t^2(1-e^{-2\varepsilon})\log_2 n + 144(1-e^{-2\varepsilon})^{-1}}{\log n}.$$

Переходя к верхнему пределу при $r \to 1$ $(n \to \infty)$, получаем, что

$$\left|\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\log I_0(t|a_k|) - \beta_f^*(t)\right| \leqslant A(1-e^{-2\varepsilon}),$$

где A — величина, не зависящая от n. Доказательство теоремы 3 завершаем предельным переходом при $\varepsilon \to 0$. •

Аналогичным свойством аппроксимации абелевых средних частичными суммами обладает также спектр интегральных средних при дополнительном условии на тейлоровские коэффициенты a_k разложения $\log f'(z)$.

Лемма 1. *Пусть* $\log f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. *Если коэффициенты* a_k *удовлетворяют соотношению*

$$\sup_n \sum_{k=n}^{2n}|a_k| < +\infty, \tag{5}$$

то спектр интегральных средних может быть вычислен по формуле

$$\beta_f(t) = \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{n}a_k e^{ik\theta}\right\}d\theta.$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $r = 1 - \varepsilon/n$. Рассмотрим разность

$$\frac{1}{\log n}\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{n}a_ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta$$
$$-\frac{1}{|\log(1-r)|}\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta.$$

Мы имеем

$$\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{n}a_ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta$$
$$=\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{n}a_ke^{ik\theta}(1-r^k)-t\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kr^ke^{ik\theta}+t\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta$$
$$\leqslant |t|\sum_{k=1}^{n}|a_k|(1-r^k)+|t|\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k+\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta.$$

Аналогично показывается, что

$$\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{n}a_ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta$$
$$\geqslant -|t|\sum_{k=1}^{n}|a_k|(1-r^k)-|t|\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k+\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\log n}\left|\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{n}a_ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta-\log\int_0^{2\pi}\exp\Re\left\{t\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^ke^{ik\theta}\right\}\mathrm{d}\theta\right|$$
$$\leqslant\frac{|t|}{\log n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|(1-r^k)+\frac{|t|}{\log n}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k.$$

Далее, доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 3. В самом деле условие (5) является аналогом неравенства (2). Аналогом неравенства (3) является неравенство

$$\sup_n \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| < +\infty,$$

которое непосредственно следует из (5). •

Теорема 4. *Пусть* $\log f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. *Если коэффициенты* a_k *удовлетворяют соотношению* (5), *то найдется последовательность вещественных чисел* $\{\theta_k\}$ *такая, что*

$$\beta_f^*(t) = \beta_g(t),$$

где $\log g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta_k} z^k$.

Эта теорема утверждает, что при выполнении условия (5) можно „повернуть" коэффициенты логарифма производной так, что спектр интегральных средних полученной функции совпадет со *-спектром интегральных средних.

Доказательство. При доказательстве теоремы 2 было показано, что существуют числа $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ такие, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[t\Re \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i(k\theta+\theta_k)}\right] d\theta = \prod_{k=1}^{n} I_0(t|a_k|).$$

Доказательство теперь завершается применением теоремы 3, леммы 1 и предельным переходом при $n \to \infty$.

Обозначим [18, с. 186]

$$\sigma_f^2 = \limsup_{r\to 1} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}}{\log \frac{1}{1-r}}$$

асимптотическую дисперсию конформного отображения f. •

Теорема 5. *Для любой аналитической и однолистной в круге* D *функции* f *и любого* t *имеет место неравенство*

$$\beta_f^*(t) \leqslant \sigma_f^2 \frac{t^2}{4}. \tag{6}$$

Если $a_k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *то знак неравенства в* (6) *превращается в знак равенства.*

Доказательство. Неравенство легко следует из уже доказанного выше соотношения $\log I_0(x) \leqslant x^2/4$.

Предположим теперь, что $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_k| < \varepsilon$ для всех $k \geqslant N$. Нетрудно видеть, что

$$\left|\log I_0(tx) - \frac{t^2x^2}{4}\right| \leqslant \left|\log\left(1 + \frac{t^2x^2}{4}\right) - \frac{t^2x^2}{4}\right| \leqslant t^4x^4.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\left|\log I_0(t|a_k|r^k) - \frac{t^2|a_k|^2r^{2k}}{4}\right| \leqslant t^4|a_k|^4r^{4k} \leqslant t^4\varepsilon^2|a_k|^2r^{2k}, \quad k \geqslant N.$$

Просуммируем последнее неравенство по k от N до бесконечности, затем поделим на $\log[1/(1-r)]$ и перейдем к пределу при $r \to 1$. В результате получим неравенство

$$\left|\beta_f^*(t) - \sigma_f^2\frac{t^2}{4}\right| \leqslant t^4\varepsilon^2\sigma_f^2.$$

Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ завершает доказательство. •

Поммеренке [17] показал, что если радиальные пределы $\lim\limits_{r\to1}\log f'(re^{i\theta})$ существуют почти всюду (по теореме Фату они будут существовать почти всюду, если граница области $f(D)$ является спрямляемой), то $\sigma_f^2 = 0$. Поэтому из теоремы 5 сразу следует, что если область $f(D)$ имеет спрямляемую границу, то $\beta_f^*(t) = 0$ для любого вещественного t. Таким образом, *-спектр интегральных средних может быть устроен нетривиально только для областей с фрактальными границами.

В случае, когда логарифм производной представим лакунарным рядом Адамара, *-спектр может быть оценен следующим образом.

Теорема 6. *Если функция f аналитична и однолистна в круге D и $\log f'(z) = \sum a_k z^{n_k}$, $\lim_{k\to\infty} n_{k+1}/n_k = q > 1$, то*

$$\frac{\log \mathrm{I}_0(a^-t)}{\log q} \leqslant \beta_f^*(t) \leqslant \frac{\log \mathrm{I}_0(a^+t)}{\log q},$$

где

$$a^- = \liminf_{k\to\infty}|a_k|, \quad a^+ = \limsup_{k\to\infty}|a_k|.$$

Доказательство. Докажем оценку сверху. Для простоты будем предполагать, что $|a_k| \leqslant a^+$, поскольку общий случай может быть сведен к данному путем элементарных операций анализа. Мы имеем

$$\beta_f^*(t) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k:n_k\leqslant n} \log I_0(|a_k|t) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k:n_k\leqslant n} \log I_0(a^+t)$$
$$= \log I_0(a^+t) \limsup_{n\to\infty} \frac{\max\{k : n_k \leqslant n\}}{\log n}.$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\{k : n_k \leqslant n\}}{\log n} = \frac{1}{\log q},$$

тем самым будет доказана оценка сверху. Для этого достаточно показать, что $(1/k)\log n_k \to \log q$ при $k\to\infty$. А это следует из того, что

$$\frac{\log n_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k} \log \frac{n_j}{n_{j-1}} + \frac{\log n_1}{k} \to \log q, \quad k\to\infty.$$

Здесь мы воспользовались тем, что из обычной сходимости ряда следует сходимость по Чезаро и условием $n_j/n_{j-1} \to q$, $j\to\infty$.

Нижняя оценка может быть доказана аналогичным способом. •

Отметим еще одну связь между $\beta_f(t)$ и $\beta_f^*(t)$. В работе [11] было доказано следующее утверждение.

Пусть q — *натуральное число, большее* 1. *Предположим, что* $\log f'(z) = \sum a_k z^{q^k}$. *Тогда*

$$\beta_f(t) = \beta_f^*(t) + O(t^q) \quad \text{при } t\to 0.$$

Пусть Ω — односвязная область на плоскости, не совпадающая со всей плоскостью, и φ — конформное отображение Ω на круг D. Бреннаном [5] была высказана гипотеза о том, что $\varphi' \in L_p(\Omega)$, $4/3 < p < 4$, т. е.

$$\int_\Omega |\varphi'|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty, \quad 4/3 < p < 4.$$

Если Ω — плоскость с разрезом по некоторому лучу, то при $p \notin (4/3, 4)$

$$\int_\Omega |\varphi'|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\infty.$$

Обозначим $f : D \to \Omega$ — конформное отображение единичного круга D на Ω. В [18] показано, что гипотеза Бреннана эквивалентна соотношению

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} \mathrm{d}\theta = O\Big(\frac{1}{1-r}\Big), \quad r\to 1-,$$

что равносильно неравенству

$$\beta_f(t) \leqslant |t| - 1, \quad t \leqslant -2, \tag{7}$$

где $\beta_f(t)$ — спектр интегральных средних.

Неравенство (7) было установлено Карлесоном и Макаровым [7] для достаточно больших $|t|$.

Бертильсон в своей диссертации [4] исследовал локальную версию гипотезы Бреннана для функций, близких к функции Кебе.

Из концепции интегральных средних [6, 7, 16] следует, что гипотезу Бреннана достаточно проверить для областей с фрактальными границами (эвристически этот факт можно объяснить тем, что если граница области достаточно хороша, то интегрирование по окружности уменьшает порядок роста производной на 1). Первый шаг в этом направлении был сделан Бараньски, Вольбергом и Здуник [3]. Они доказали эту гипотезу для всех односвязных областей притяжения бесконечности квадратичных полиномов.

Другой важный класс фракталов состоит из конформных отображений f, для которых $\log f'$ представим в виде лакунарного ряда Адамара, т. е.

$$\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}, \qquad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1.$$

Такие отображения оказались весьма полезны для получения нижних оценок спектра интегральных средних [8, 10, 12, 14; 18, с. 188; 19]. С другой стороны, нетрудно показать, что если существует абсолютная положительная постоянная C такая, что неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} d\theta \leqslant \frac{C}{1-r}$$

выполнено для всех функций из этого класса, то гипотеза Бреннана верна в общем случае.

Мы докажем эту гипотезу в предположении, что $q \geqslant 15$. Для этого нам понадобится несколько полезных лемм.

Лемма 2. *Пусть* $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ *и* $q \geqslant 15$. *Тогда*

$$\left| x\cos\theta - \log\left(I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta \right) \right| \leqslant \frac{C}{q!}\left(\frac{x}{2}\right)^q, \quad C = 370, \tag{8}$$

где $I_n(x)$ *— модифицированные функции Бесселя.*

Доказательство. Напомним известное соотношение

$$\exp(x\cos\theta) = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)\cos(n\theta),$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\Big|\exp(x\cos\theta) - I_0(x) - 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos(n\theta)\Big| \leqslant 2\sum_{n=q}^{\infty} I_n(x)\\
&\leqslant 2\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n \exp\Big(\frac{|x|^2}{4(n+1)}\Big)\\
&\leqslant \frac{2}{q!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^q \exp\Big(\frac{|x|^2}{4(q+1)}\Big)\Big/\Big(1-\frac{x}{2(q+1)}\Big).
\end{aligned}$$

В силу формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$\begin{aligned}
&\Big|x\cos\theta - \log\Big(I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta\Big)\Big|\\
&= \Big|\log\exp(x\cos\theta) - \log\Big(I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta\Big)\Big|\\
&\leqslant \frac{1}{\lambda\exp(x\cos\theta) + (1-\lambda)(I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x))}\\
&\times \Big|\exp(x\cos\theta) - I_0(x) - 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta\Big|,
\end{aligned}$$

где λ некоторое число из интервала $[0,1]$.

Ясно, что (8) будет выполнено, если

$$\frac{2\exp\Big(\frac{|x|^2}{4(q+1)}\Big)}{\Big[\lambda\exp(x\cos\theta) + (1-\lambda)(I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta)\Big]\Big(1-\frac{x}{2(q+1)}\Big)} \leqslant 370$$

для $x = 3\pi/2$, $q = 15$. Верность последнего неравенства легко проверяется численно. •

Лемма 3. *Пусть $\{\theta_k\}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^{\infty} \left[I_0(t|a_k|r^{n_k}) + 2\sum_{s=1}^{q-1} I_s(t|a_k|r^{n_k}) \cos(sn_k\theta + s\theta_k) \right] \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi \prod_{k=0}^{\infty} I_0(t|a_k|r^{n_k}),$$

и, следовательно, значения этого интеграла не зависят от последовательности $\{\theta_k\}$.

Доказательство. Раскроем скобки в интеграле и проинтегрируем каждое слагаемое в отдельности. Так как $\cos\alpha\cos\beta = 2^{-1}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$, то

$$\prod_{j=0}^{m} \cos(s_j n_{p_j}\theta + s_j\theta_{p_j}) = \frac{1}{2^m}\sum \cos\left[\theta\sum_{j=0}^{m}(\pm s_j n_{p_j}) + \delta\right]. \tag{9}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{n_{p_j}\}$ возрастает. Интеграл по θ от (9), очевидно, равен нулю, поскольку

$$\sum_{j=0}^{m-1} s_j n_{p_j} \leqslant (q-1)\sum_{j=0}^{m-1} n_{p_j} < n_{p_m}.$$

Лемма доказана. •

Теорема 7. *Предположим, что функция f аналитична, однолистна в круге D и*

$$\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}, \qquad n_{k+1}/n_k \geqslant q > 1.$$

Если $q \geqslant 15$, то

$$\beta_f(-2) \leqslant 1.$$

Доказательство. Для начала установим следующее неравенство:

$$\beta_f(-2) \leqslant \beta_f(2) + \frac{2Ca^q}{q!\log q}, \tag{10}$$

где константа C такая же, как и в (8), $a = 3\pi/4$.

Рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^{-2}\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left[2|a_k|r^{n_k}\cos(n_k\theta + \theta_k)\right]\mathrm{d}\theta. \tag{11}$$

В силу леммы 2 интеграл (11) не превосходит

$$\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{k=0}^{\infty}\Big[I_0(2|a_k|r^{n_k})+2\sum_{s=1}^{q-1}I_s(2|a_k|r^{n_k})\cos(sn_k\theta+s\theta_k)\Big]\exp\Big(\frac{C}{q!}|a_k|^q r^{qn_k}\Big)d\theta.$$

Известно [18, с. 189], что

$$\sum_{k=0}^{\infty}r^{n_k}\leqslant\frac{\log\frac{1}{1-r}}{\log q}+O(1),\quad r\to 1.$$

Используя это соотношение и лемму 3, получаем

$$\beta_f(-2)\leqslant\limsup_{r\to 1}\log\prod_{k=0}^{\infty}I_0(2|a_k|r^{n_k})/\log\frac{1}{1-r}+\frac{Ca^q}{q!\log q}.$$

По той же причине

$$\beta_f(2)\geqslant\limsup_{r\to 1}\log\prod_{k=0}^{\infty}I_0(2|a_k|r^{n_k})/\log\frac{1}{1-r}-\frac{Ca^q}{q!\log q}.$$

Эти неравенства и лемма 3 влекут (10).

Для завершения доказательства мы используем результат полученный в работе Карлесона и Джонса [6]. Они показали, что если функция f аналитична, однолистна в круге D и $|f'(z)|\leqslant\mathrm{const}(1-|z|)^{\gamma-1}$, то

$$\beta_f(2)\leqslant 1-\frac{\gamma^3}{8\pi}. \tag{12}$$

В работе [13] показано, что если функция f аналитична, однолистна в круге D и $\log f'(z)$ является лакунарным рядом Адамара с коэффициентом лакунарности большим 2, то коэффициенты логарифма производной в асимптотике по модулю не превосходят $3\pi/4$.

Поэтому $\gamma\leqslant 1-3\pi/(4\log q)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\beta_f(-2)&\leqslant\beta_f(2)+\frac{2C}{q!\log q}\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^q\\&\leqslant 1-\frac{1}{8\pi}\Big(1-\frac{3\pi}{4\log q}\Big)^3+\frac{2C}{q!\log q}\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^q.\end{aligned}$$

Прямые вычисления показывают, что последнее выражение не превосходит 1 при $q\geqslant 15$. •

Интересно отметить, что неравенство (12) может быть улучшено. Именно Джонс и Макаров [9] доказали, что неравенство

$$\beta_f(2-\varepsilon)\leqslant 1-\varepsilon+A\varepsilon^2$$

выполнено для всех ограниченных однолистных функций, где $A > 0$ — некоторая абсолютная константа. Отсюда следует неравенство

$$\beta_f(2) \leqslant 1 - \frac{\gamma^2}{4A},$$

которое асимптотически сильнее неравенства (12). К сожалению, мы не можем воспользоваться этой оценкой, поскольку на данный момент константа A не оценена сверху конкретным числом.

Список литературы

[1] Anderson J. M., Clunie J., Pommerenke Ch., *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math. **270** (1974), 12–37.

[2] Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р., *Оценки в классе Блоха и их обобщения*, Докл. РАН **349** (1996), №5, 583–585.

[3] Barański K., Volberg A., Zdunik A., *Brennan's conjecture and the Mandelbrot set*, Internat. Math. Res. Notices **1998**, no. 12, 589–600.

[4] Bertilsson D., *On Brennan's conjecture in conformal mapping*, Doctoral Thesis, Royal Inst. of Tech., Stockholm, 1999.

[5] Brennan J. E., *The integrability of the derivative in conformal mapping*, J. London Math. Soc. (2) **18** (1978), 261–272.

[6] Carleson L., Jones P., *On coefficient problems for univalent functions and conformal dimension*, Duke Math. J. **66** (1992), no. 2, 169–206.

[7] Carleson L., Makarov N. G., *Some results connected with Brennan's conjecture*, Ark. Mat. **32** (1994), 33–62.

[8] Gnuschke-Hauschild D., Pommerenke Ch., *On Bloch functions and gap series*, J. Reine Angew. Math. **367** (1986), 172–186.

[9] Jones P. W., Makarov N. G., *Density properties of harmonic measure*, Ann. of Math. (2) **142** (1995), 427–455.

[10] Kayumov I. R., *Lower estimates for the integral means spectrum*, Complex Variables Theory Appl. **44** (2001), 165–171.

[11] Kayumov I. R., *The integral means spectrum for lacunary series*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **26** (2001), 447–453.

[12] Kayumov I. R., *Lower estimate for the integral means spectrum for $p = -1$*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 4, 1005–1007.

[13] Каюмов И. Р., *Теорема искажения для однолистных лакунарных рядов*, Сиб. мат. ж. **44** (2003), №6, 1273–1279.

[14] Makarov N. G., *A note on integral means of the derivative in conformal mapping*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 233–235.

[15] Makarov N. G., *Conformal mapping and Hausdorff measures*, Ark. Mat. **25** (1987), 41–89.

[16] Makarov N. G., *Fine structure of harmonic measure*, Алгебра и анализ **10** (1998), №2, 1–62.

[17] Pommerenke Ch., *On Bloch functions*, J. London Math. Soc. (2) **2** (1970), 689–695.

[18] Pommerenke Ch., *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 299, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[19] Rohde S., *Hausdorffmas und Randverhalten analytischer Functionen*, Thesis, Technische Univ., Berlin, 1989.

Казанский
государственный университет
Россия
E-mail: ikayumov@ksu.ru

Поступило 15 июня 2004 г.