Ю.А.Кошевник, Б.Я.Левит

ГРАНИЦЫ РИСКА В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ СИММЕТРИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассматривается модификация полученных в [I] непараметрических информационных неравенств с учетом имеющейся дополнительной информации об оцениваемом бесконечномерном параметре. Общие построения мотивируются, в частности, задачами оценивания функций распределения (ф.р.), инвариантных относительно различных групп преобразований в $\mathbb{R}^k$.

Введение

Как показано в [I] , асимптотические свойства оптимальных оценок ф.р. $F(\cdot)$ в $\mathbb{R}^k$ выражаются в терминах гауссовского процесса $W_F(\cdot)$ - многопараметрического аналога броуновского моста.

В работе получены формулы, описывающие предельные свойства оптимальных оценок при наличии дополнительной априорной информации в терминах соответствующей редукции процесса W_F .

I. Основные понятия и условия

Пусть $\mathcal{E}^{(n)} = (\mathfrak{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, \mathcal{P}^{(n)})$ - последовательность экспериментов, то есть совокупность мер $\mathcal{P}^{(n)} = \{\underline{P}_\theta^{(n)}\}$ на измеримых пространствах $(\mathfrak{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)})$, $n=1,2,\ldots$; θ - параметр, пробегающий топологическое пространство $(\Theta, \mathcal{T})$. Бесконечномерный аналог фишеровской матрицы информации о параметре θ вводится следующим образом [I] . Пусть для каждого $\theta \in \Theta$ задано линейное пространство $\mathcal{L}_\theta$ с определенной на нем симметричной неотрицательно определенной билинейной формой $I_\theta(\cdot,\cdot)$. Не ограничивая общности, будем считать, что пространство $\mathcal{L}_\theta$ полно по норме $\|\xi\|_\theta = [I_\theta(\xi,\xi)]^{1/2}$. Кроме того, предполагается, что для каждого $\theta \in \Theta$ и любого натурального m задан класс $\mathcal{K}_m(\theta)$ гладких m-мерных подсемейств Θ , содержащих θ , то есть класс наборов $\Gamma = (\mathcal{U}, \gamma, \gamma')$, где $\mathcal{U}$ - окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$, $\gamma: \mathcal{U} \longrightarrow \Theta$ - непрерывное отображение, такое что $\gamma(0) = \theta$, $\gamma': \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{L}_\theta$ - линейный оператор. Пространство $\mathcal{L}_\theta$ назовем касательным пространством к Θ в точке θ .

Связь между введенными объектами - семействами $\Gamma \in \mathcal{K}_m(\theta)$

и билинейной формой $I_\theta(\cdot\,,\cdot)$ – выражается следующим условием.

УСЛОВИЕ 1. Существует такая числовая последовательность $\varphi(n)$, $\varphi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, что для всех m, $\theta\in\Theta$, $h\in\mathbb{R}^m$ и для любого $\Gamma\in\mathcal{K}_m(\theta)$

$$\ln\frac{dP^{(n)}_{\gamma(h/\varphi(n))}}{dP^{(n)}_\theta}(X^{(n)})=h^*\Delta_n(X^{(n)})-\frac{\|\gamma'(h)\|^2_\theta}{2}+z_n(h),$$

где $dP^{(n)}_{\theta_1}/dP^{(n)}_\theta$ – производная абсолютно непрерывной компоненты меры $P^{(n)}_{\theta_1}$ по мере $P^{(n)}_\theta$, $\Delta_n(X^{(n)})$ – m-мерный вектор-столбец такой, что для любого $h\in\mathbb{R}^m$ величина $h^*\Delta_n(X^{(n)})$ ($*$ – знак транспонирования) асимптотически нормальна по мере $P^{(n)}_\theta$ с параметрами $(0,\|\gamma'(h)\|^2)$, а $z_n(h)$ стремится к нулю по вероятности $P^{(n)}_\theta$ при $n\to\infty$. Назовем билинейную форму I_θ информационной билинейной формой, или информацией о θ, содержащейся в Θ.

Пусть $\Phi:\Theta\to E$ – функция, определенная на параметрическом множестве Θ со значениями в банаховом пространстве E. Для построения нижних границ риска оценивания Φ используются следующие предположения [1].

УСЛОВИЕ 2 (дифференцируемость Φ вдоль семейств Γ).

Для любого натурального m и для произвольного $\Gamma=(U,\gamma,\gamma')\in\mathcal{K}_m(\theta)$

$$\Phi(\gamma(h))-\Phi(\theta)=\varphi_\theta(\gamma'(h))+\alpha_h\,,$$

где $\alpha_h/|h|$ слабо стремится к нулю при $h\to0$, а $\varphi_\theta:\mathcal{L}_\theta\to E$ – непрерывный линейный оператор.

Пусть $\varphi^*_\theta: E^*\to\mathcal{L}_\theta$ – оператор, сопряженный к φ_θ; положим $R_\theta(e^*_1,e^*_2)=I_\theta(\varphi^*_\theta(e^*_1),\varphi^*_\theta(e^*_2))$, $e^*_1,e^*_2\in E^*$ (здесь E^* – пространство всех непрерывных линейных функционалов на E).

УСЛОВИЕ 3. В пространстве E существует гауссовская мера с ковариационным функционалом R_θ.

Обозначим через η_θ гауссовский вектор в E с нулевым математическим ожиданием и ковариационным функционалом R_θ; пусть μ_θ – гауссовская мера на E, соответствующая η_θ. Предполагается, что пространство E удовлетворяет следующему условию.

УСЛОВИЕ 4 (существование счетного нормирующего множества).

Существует последовательность $\{\mathcal{E}_i ;\ i=1,2,\dots\}$ элементов E^* таких, для любого $\theta\in\Theta$ μ_θ -почти всюду на E

$$\|e\| = \sup_i |\mathcal{E}_i(e)| .$$

Заметим, что условие 4 заведомо выполнено, когда E или E^* сепарабельно, но может выполняться и в других случаях. В дальнейшем последовательность функционалов $\{\mathcal{E}_i\}$ считается фиксированной, а $\mathfrak{B}$ обозначает порожденную ими σ-алгебру в E .

УСЛОВИЕ 5 (обширность множества Θ в точке θ).

Существует последовательность $\Gamma^{(m)} = (\mathcal{U}^{(m)}, \gamma^{(m)}, \gamma'^{(m)})$ $(m=1,2,\dots)$ такая, что

а) $\Gamma^{(m)} \in \mathcal{K}_m(\theta)$;

б) $\gamma'(h) = h_1 \xi_1^{(m)} + \dots + h_m \xi_m^{(m)}$, $\xi_i^{(m)} \in \mathcal{L}_\theta$, $i=1,\dots,m$

в) $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} I_\theta(\xi_i^{(m)} - \varphi_\theta^*(\mathcal{E}_i), \xi_i^{(m)} - \varphi_\theta^*(\mathcal{E}_i)) = 0$.

Пусть L - класс функций потерь на E вида $\ell(e) = \lambda(\|e\|)$, где λ - произвольная неотрицательная неубывающая функция. Назовем оценкой величины $\Phi(\theta)$ такую последовательность отображений $T_n : \mathcal{X}^{(n)} \longrightarrow E$, что T_n является $(\mathcal{A}^{(n)}, \mathfrak{B})$ - измеримым при каждом n . Положим $\mathcal{R}_n(\theta, T_n, \ell) =$ $E_\theta \ell(\varphi(n)(T_n(X^{(n)}) - \Phi(\theta)))$, $\mathcal{R}_n(V, T_n, \ell) =$ $= \sup\limits_{\theta\in V} \mathcal{R}_n(\theta, T_n, \ell)$, где V - окрестность в Θ . Отметим, что условие $\mathfrak{B}$ - измеримости T_n обеспечивает существование $\mathcal{R}_n(\theta, T_n, \ell)$.

Нижние границы для $\mathcal{R}_n(\theta, T_n, \ell)$ были указаны в работе [I] . В дальнейшем нас интересуют аналогичные границы риска при наличии дополнительной априорной информации вида $\theta \in \Theta_1$, где Θ_1 - заданное подсемейство Θ .

2. Переход к подсемейству Θ_1 .

Пусть теперь Θ_1 - подсемейство Θ, $\mathcal{K}_m^1(\theta)$ - класс таких гладких m -мерных подсемейств $\Gamma = (\mathcal{U}, \gamma, \gamma') \in \mathcal{K}_m(\theta)$, что $\gamma(\mathcal{U}) \subset \Theta_1$. Пусть $\mathcal{L}_\theta^1$ - минимальное подпространство пространства $\mathcal{L}_\theta$, содержащее производные $\xi = \gamma'(1)$ одномерных гладких семейств $\Gamma = (\mathcal{U}, \gamma, \gamma') \in \mathcal{K}_1^1(\theta)$.

Обозначим Π_θ – ортогональный проектор из $\mathcal{L}_\theta$ на $\mathcal{L}_\theta^1$.

Заметим, что в задачах условного оценивания (см.например, [4]) подсемейство Θ_1 часто определяется следующим образом: $\Theta_1 = \{ \theta \in \Theta ;\ \Psi(\theta) = 0 \}$, где Ψ – дифференцируемая в смысле условия 2 функция. Связь между пространствами $\mathcal{L}_\theta$ и $\mathcal{L}_\theta^1$ в этом случае описывается в терминах производной ψ_θ функции Ψ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $\Theta_1 = \{ \theta \in \Theta : \Psi(\theta) = 0 \}$, где Ψ – дифференцируемое в смысле условия 2 отображение множества Θ в банахово пространство $\mathcal{D}$, $\psi_\theta : \mathcal{L}_\theta \longrightarrow \mathcal{D}$ – производная Ψ в точке θ , $\psi_\theta^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{L}_\theta$ – сопряженный оператор к ψ_θ . Тогда $\mathcal{L}_\theta^1$ ортогонально к подпространству $\psi_\theta^*(\mathcal{D}^*)$ (здесь $\psi_\theta^*(\mathcal{D}^*)$ – образ $\mathcal{D}^*$ при отображении ψ_θ^*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma \in \mathcal{K}_m^1(\theta)$, $\Gamma = (\mathcal{U}, \gamma, \gamma')$; всюду на множестве $\gamma(\mathcal{U})$ функция Ψ тождественно равна 0. Так как $\mathcal{K}_m^1(\theta) \subset \mathcal{K}_m(\theta)$, то

$$0 = \Psi(\gamma(h)) - \Psi(\theta) = \psi_\theta(\gamma'(h)) + \alpha_h ,$$

где $\alpha_h / |h| \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow 0$. Отсюда следует при $m = 1$, что для множества векторов $\xi = \gamma'(1)$, линейные комбинации которых плотны в $\mathcal{L}_\theta^1$, $\psi_\theta(\xi) = 0$. Значит, $I_\theta(\xi, \psi_\theta^*(d^*)) = 0$ для всех $d^* \in \mathcal{D}^*$ и $\xi \in \mathcal{L}_\theta^1$, что и требовалось доказать.

Для семейства Θ_1 , фигурирующего в предложении I, мы предполагаем выполненным условие обширности, аналогичное условию 5.

УСЛОВИЕ 5$'$ (обширность Θ_1 в точке θ).

Существует последовательность $\Gamma^{(m)} = (\mathcal{U}^{(m)}, \gamma^{(m)}, \gamma'^{(m)})$ $m = 1, 2, \dots ,$ такая, что

а) $\Gamma^{(m)} \subset \mathcal{K}_m^1(\theta)$;

б) $\gamma'^{(m)}(h) = h_1 \xi_1^{(m)} + \dots + h_m \xi_m^{(m)}$, $\xi_i^{(m)} \in \mathcal{L}_\theta^1$, $i = 1, \dots, m$;

в) $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m} I_\theta(\xi_i^{(m)}-\Pi_\theta\varphi_\theta^*(\varepsilon_i),\ \xi_i^{(m)}-\Pi_\theta\varphi_\theta^*(\varepsilon_i)) = 0$.

Условие обширности множества Θ (Θ_1) означает, что подпространства $\mathcal{L}_\theta$, порождаемые векторами $\varphi_\theta^*(\varepsilon_i)(\Pi_\theta\varphi_\theta^*(\varepsilon_i))$, $1\leqslant i\leqslant m$, могут быть приближены касательными пространствами вида $\gamma'^{(m)}(\mathbb{R}^m)$ к гладким семействам $\Gamma = (\mathcal{U},\gamma,\gamma')\in\mathcal{K}_m(\theta)$ $(\mathcal{K}_m^1(\theta))$.

Обозначим η_θ^1 – гауссовский вектор в E с нулевым математическим ожиданием и ковариационным функционалом $R_\theta^1(e_1^*,e_2^*) = I_\theta(\Pi_\theta\varphi_\theta^*(e_1),\ \Pi_\theta\varphi_\theta^*(e_2))$; существование гауссовской меры с таким ковариационным функционалом следует из [2, § 6] и условия 3 пункта I.

Следующая теорема, уточняющая теорему I из [I] применительно к редуцированному пространству Θ_1 , является основной для рассмотрения ряда задач оценивания, возникающих при различных дополнительных ограничениях на множество Θ .

ТЕОРЕМА I. Пусть $\ell\in L$, V – окрестность в Θ_1 и T_n – произвольная оценка $\Phi(\theta)$. Тогда при выполнении условий I–4,5$'$

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathcal{R}_n(V,T_n,\ell) \geqslant \sup_{\theta\in V} E\,\ell(\eta_\theta^1) . \tag{I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сперва, что оператор $(\varphi_\theta^1)^*$, сопряженный к производной $\varphi_\theta^1 : \mathcal{L}_\theta^1 \longrightarrow E$ функции Φ , рассматриваемой на множестве Θ_1 ,имеет вид:

$$(\varphi_\theta^1)^*(e^*) = \Pi_\theta\,\varphi_\theta^*(e^*) . \tag{2}$$

Действительно, поскольку φ_θ^1 есть сужение φ_θ на $\mathcal{L}_\theta^1$, то для любых $\xi\in\mathcal{L}_\theta$ и $e^*\in E^*$

$$I_\theta((\varphi_\theta^1)^*(e^*),\xi) = I_\theta((\varphi_\theta^1)^*(e^*),\ \Pi_\theta\xi) =$$

$$= I_\theta(\varphi_\theta^*(e^*),\Pi_\theta\xi) = I_\theta(\Pi_\theta\,\varphi_\theta^*(e^*),\ \xi)$$

и формула (2) доказана.

В силу (2) в случае редуцированного пространства Θ_1 вместо величины η_θ мы должны рассмотреть гауссовский вектор η'_θ. Утверждение теоремы I теперь непосредственно вытекает из теоремы I [I].

Во многих задачах оценивания пространство $\mathcal{L}_\theta$ естественным образом отождествляется с пространством квадратично интегрируемых функций, заданных на подходящем множестве $\mathcal{Y}$, а информационная билинейная форма имеет вид

$$I_\theta(\xi,\eta)=\int_{\mathcal{Y}}\xi(y)\eta(y)\,\pi_\theta(dy).$$

Предположим также, что E - множество функций, заданных на некотором пространстве с мерой $(Z,\mathfrak{z},Q)$ и норма в E есть

$$\|f\|_p=\Big\{\int_Z|f(z)|^p Q(dz)\Big\}^{1/p},$$

где $1\leqslant p\leqslant\infty$, а оператор φ_θ в условии 2 задается равенством

$$\varphi_\theta(\xi)(z)=\int_{\mathcal{Y}}\chi(z,y)\,\xi(y)\,\pi_\theta(dy),$$

в котором $\chi(z,\cdot)\in\mathcal{L}_\theta$. Рассматриваемые ниже задачи оценивания относятся именно к такому случаю. При указанных предположениях для выполнения условия 3 необходимо и достаточно, чтобы

I) величина $\int\chi(z_1,y)\chi(z_2,y)\pi_\theta(dy)$ была измерима по совокупности переменных z_1, z_2;

2) $\int\Big[\chi(z,y)^2\pi_\theta(dy)\Big]^{p/2}Q(dz)<\infty$.

При этом предельный гауссовский процесс $\eta_\theta(z)$ имеет ковариационную функцию

$$E\eta_\theta(z_1)\eta_\theta(z_2)=\int\chi(z_1,y)\chi(z_2,y)\pi_\theta(dy). \qquad (3)$$

Отметим, что условие 4 в рассматриваемой ситуации выполняется автоматически.

Рассмотрим, как изменяется ковариационная функция процесса $\eta_\theta(z)$ при наличии дополнительной информации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Π_θ – оператор ортогонального проектирования $\mathcal{L}_\theta$ на $\mathcal{L}^1_\theta$, $\chi^1(z,\cdot) = \Pi_\theta \chi(z,\cdot)$. Тогда ковариационная функция процесса η^1_θ имеет вид (3) с заменой $\chi(z,y)$ на $\chi^1(z,y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\varphi_\theta(\xi)(z) = \int \chi(z,y)\xi(y)\pi_\theta(dy), z\in Z$, то, учитывая условия I)–2) и применяя теорему Фубини, находим $\varphi^*_\theta(e^*)(y) = \int \chi(z,y)\, e^*(z)\, Q(dz), y\in Y$ (здесь $e^*\in E^*$ отождествлено с элементом $L^{p/(p-1)}(Q)$, где $L^p(Q) = L^p(Z, \mathfrak{z}, Q)$. Поэтому нетрудно убедиться, что оператор $(\varphi^1_\theta)^*$, сопряженный к сужению φ_θ на $\mathcal{L}^1_\theta$, в силу (2) имеет вид

$$(\varphi^1_\theta)^*(e^*)(y) = \Pi_\theta \int \chi(z,y)\, e^*(z)\, Q(dz) =$$

$$= \int \chi^1(z,y)\, e^*(z)\, Q(dz).$$

Отсюда и из определения ковариационного оператора следует требуемое утверждение.

3. Оценка функций распределения в $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим последовательность экспериментов $\mathcal{E}^{(n)} = (\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, \mathcal{P}^{(n)})$, порождаемую независимой выборкой $X_1, \dots, X_n$, $X_i \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^k$. Здесь $\mathcal{X}^{(n)} = \mathcal{X}^n$, $\mathcal{A}^{(n)} = \otimes^n \mathcal{A}$, $\mathcal{P}^{(n)} = \{\otimes^n F\}$, где $\mathcal{A}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств $\mathcal{X}$, а F принадлежит некоторому семейству $\mathcal{F}$ вероятностных мер в $\mathbb{R}^k$, выполняющему роль параметрического множества Θ. Функция, которую мы хотим оценить, – это отображение Φ, ставящее в соответствие мере F функцию распределения $F(\cdot)$, рассматриваемую как элемент подходящего нормированного пространства E функций на $\mathbb{R}^k$. В качестве E будем рассматривать для определенности пространства $L^p(\mu) = L^p(\mathbb{R}^k, \mathcal{A}, \mu)$, где μ – произвольная конечная мера на $(\mathbb{R}^k, \mathcal{A})$ $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Для описания предельного гауссовского процесса (случайного поля), в терминах которого формулируются асимптотические свойства оптимальных оценок, можно воспользоваться теоремой I, подобно тому, как это сделано в [I]. Действительно, пусть параметрическое множество $\mathcal{F}$ состоит из всех вероятностных мер с непрерывными функциями распределения. В качестве $\mathcal{K}_m(\mathbb{F})$ рассмотрим семейства $\Gamma = (\mathcal{U}, \gamma, \gamma')$ распределений вида

$$
\begin{aligned}
& d\mathbb{F}_h = (1 + h_1 \xi_1 + \ldots + h_m \xi_m)\, d\mathbb{F}, \\
& h \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \qquad \gamma(h) = \mathbb{F}(h), \\
& \gamma'(h) = h_1 \xi_1 + \ldots + h_m \xi_m ,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где ξ_i - центрированные по мере $\mathbb{F}$ ограниченные функции. При этом касательно пространство $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ к $\mathcal{F}$ в точке $\mathbb{F}$ совпадает с ортогональным дополнением $\mathring{\mathbb{L}}^2(\mathbb{F})$ к единице в $\mathbb{L}^2(\mathbb{F})$ (ср. [4]) и выполнены условия I - 5 из пункта I. Производная $\varphi_{\mathbb{F}}$ функции Φ в точке $\mathbb{F}$ - это линейный оператор из $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ в $\mathbb{E}$, определяемый формулой

$$
\varphi_{\mathbb{F}}(\xi)(x) = \int \chi(x,y)\, \xi(y)\, d\mathbb{F}(y),
$$

где $\chi(x,y) = \chi_x(y) - \mathbb{F}(x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{F}}$,

$$
\chi_x(y) = \begin{cases} 1, & y_j < x_j, \quad j = 1, \ldots, k, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}
$$

Следовательно, процесс $W_{\mathbb{F}}(\cdot)$, в терминах которого выражаются свойства оптимальных оценок (величина $\eta_\theta(\cdot)$ в (3)) имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию

$$
\mathbb{E}\, W_{\mathbb{F}}(x)\, W_{\mathbb{F}}(x') = \mathbb{F}(x \wedge x') - \mathbb{F}(x)\,\mathbb{F}(x'),
$$

где для векторов $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_k)$ величина $x \wedge x'$ определяется так

$$
(x \wedge x')_j = \min(x_j, x'_j), \quad j = 1, \ldots, k .
$$

Если известно, что $\mathbb{F} \subset \mathcal{F}_1$, где $\mathcal{F}_1$ подмножество $\mathcal{F}$ и $\Pi_{\mathbb{F}}$ - ортогональный проектор из $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ на касательное пространство $\mathcal{L}^1_{\mathbb{F}}$ к $\mathcal{F}_1$ в точке $\mathbb{F}$, то согласно предложению 2, роль η^1_θ в теореме I играет гауссовский процесс $w_{\mathbb{F}}(x)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией *)

*) Некоторые частные случаи формулы (5) отмечались и ранее, см., например, [7] .

$$\mathsf{E}\, w_{\mathbb{F}}(x)\, w_{\mathbb{F}}(x') = \int (\Pi_{\mathbb{F}} \gamma_x(y))(\Pi_{\mathbb{F}} \gamma_{x'}(y))\, d\mathbb{F}(y), \qquad (5)$$

где $\Pi_{\mathbb{F}} \gamma_x(\cdot) = \Pi_{\mathbb{F}} \gamma(x,\cdot)$ – проекция $\gamma_x(\cdot)$ на $\mathcal{L}^1_{\mathbb{F}}$. Нетрудно видеть, что процесс $w_{\mathbb{F}}(x)$ может быть получен редукцией процесса $W_{\mathbb{F}}$ осуществляемой с помощью $\Pi_{\mathbb{F}}$, определяемой следующим образом: $w_{\mathbb{F}}(x) = \int \Pi_{\mathbb{F}} \gamma_x(y)\, d W_{\mathbb{F}}(y)$. Достаточно заметить для этого, что $\Pi_{\mathbb{F}} \gamma_x(\cdot) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$ и воспользоваться стандартной формулой из теории стохастических интегралов:

$$\mathsf{E} \int f(y)\, dW_{\mathbb{F}}(y) \int g(y)\, dW_{\mathbb{F}}(y) = \int (f(y) - \bar f)(g(y) - \bar g)\, d\mathbb{F}(y),$$

где $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{F})$, $\bar f = \int f(y)\, d\mathbb{F}(y)$, $\bar g = \int g(y)\, d\mathbb{F}(y)$.

В рассматриваемых ниже примерах оценивания неизвестной функции распределения $\mathbb{F}$ подмножество $\mathcal{F}_1$ выделяется различными условиями симметрии.

4. Оценка функции распределения с известным центром симметрии

Пусть $\mathcal{G}$ – конечная или компактная группа движений $\mathbb{R}^k$, оставляющая неподвижной точку 0. Семейство $\mathcal{F}_1$ допустимых распределений состоит по определению из всех таких мер $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$, что для всякого измеримого множества A и любого преобразования $g \in \mathcal{G}$ имеет место равенство $\mathbb{F}\{g(A)\} = \mathbb{F}\{A\}$. Пусть Δ – инвариантная мера Хаара на группе $\mathcal{G}$, нормированная условием $\Delta(\mathcal{G}) = 1$. Для того, чтобы воспользоваться теоремой I, достаточно, согласно (5), установить вид проектора из $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \hat{\mathbb{L}}^2(\mathbb{F})$ на $\mathcal{L}^1_{\mathbb{F}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. I) Пространство $\mathcal{L}^1_{\mathbb{F}}$ совпадает с множеством $\mathcal{G}$-инвариантных функций $S_{\mathcal{G}} = \{\varphi \in \hat{\mathbb{L}}_2(\mathbb{F}):$ для каждого $g \in \mathcal{G}$ $\mathbb{F}$ - почти наверное $\varphi(g(x)) = \varphi(x)\}$.

2) Проектор $\Pi = \Pi_{\mathbb{F}}$ из $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}$ на $\mathcal{L}^1_{\mathbb{F}}$ имеет вид

$$(\Pi\varphi)(x) = \int_{\mathcal{G}} \varphi(g(x))\, \Delta(dg).$$

Для доказательства предложения нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА I. Пусть H – гильбертово пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в H, $\mathcal{G}$ – компактная или конечная группа унитарных операторов в H , Δ - нормированная инвариантная мера Хаара на $\mathcal{G}$; пусть $H_1 = \{\xi \in H : g\xi = \xi$ для всех $g \in \mathcal{G}\}$. Тогда оператор Π , осуществляющий ортогональную проекцию H на H_1 , имеет вид

$$\Pi\xi = \int g\xi\,\Delta(dg)\,. \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $\Pi\xi$ определено формулой (6). Заметим, что для любого $g_1 \in \mathcal{G}$

$$g_1(\Pi\xi) = g_1\Big(\int_{\mathcal{G}} g\xi\,\Delta(dg)\Big) = \int_{\mathcal{G}} g_1 g\xi\,\Delta(dg) = \int_{\mathcal{G}} g\xi\,\Delta(dg)\,,$$

так как мера Δ инвариантна; поэтому $g_1(\Pi\xi) = \Pi\xi$ для всех $g_1 \in \mathcal{G}$, то есть $\Pi\xi \in H_1$. Если $\xi \in H_1$, то $\Pi\xi = \int \xi\,\Delta(dg) = \xi$, так как мера Δ нормирована. Наконец, $\Pi^2\xi = \Pi(\Pi\xi) = \Pi\xi$, поскольку $\Pi\xi \in H_1$ и $\Pi^*\xi = \Pi\xi$, так как для любых $\xi,\ \eta \in H$ имеет место следующая цепочка равенств:

$$< \Pi^*\xi, \eta > = < \xi, \Pi\eta > = < \xi, \int_{\mathcal{G}} g\eta\,\Delta(dg) > =$$

$$= \int_{\mathcal{G}} < \xi, g\eta > \Delta(dg) = \int_{\mathcal{G}} < g^*\xi, \eta > \Delta(dg) =$$

$$= \int_{\mathcal{G}} < g^{-1}\xi, \eta > \Delta(dg) = < \Pi\xi, \eta > ;$$

при этом мы воспользовались тем, что g - унитарный оператор, а мера Хаара Δ инвариантна при замене g на g^{-1} . Поэтому Π - самосопряженный проектор и, следовательно, осуществляет ортогональную проекцию. Так как $\Pi(H) \subset H_1$, а $\Pi(H_1) = H_1$ то Π - проектор на H_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Для доказательства заметим, что если $\Gamma = (\mathcal{U}, \gamma, \gamma')$ - одномерное гладкое семейство мер из $\mathcal{F}_1$ вида (4), то его производная $\gamma'(1) = \xi$ является $\mathcal{G}$ - инвариантной функцией. Значит, $\mathcal{L}_F^1$ принадлежит множеству всех $\mathcal{G}$ - инвариантных функций из $\mathcal{L}_F$. Далее, семейство $\mathcal{F}$ мер с непрерывными функциями распределения, очевидно, обширно, то есть для всякого набора функций $\eta_1, \ldots, \eta_m$ из $\mathcal{L}_F$ (и, в частности, для $\mathcal{G}$ - инвариантных функций) и для всякого $\varepsilon > 0$ существует семейство $\Gamma = (\mathcal{U}, \gamma, \gamma') \in \mathcal{K}_m(F)$

вида (4), такое что

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{I}_F(\eta_i-\xi_i,\ \eta_i-\xi_i)<\varepsilon\ . \tag{7}$$

Производя симметризацию по формуле $\tilde{F}_h(A)=\int_{\mathcal{G}} F_h(g(A))\,\Delta(dg)$ или, что то же самое в силу $\mathcal{G}$ -инвариантности F, заменяя $\xi_i(x)$ в (4) на $\int_{\mathcal{G}} \xi_i(g(x))\,\Delta(dg)$, с помощью (7) получаем обратное включение $S_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{L}_F^1$. Тем самым утверждение I) доказано. Заодно мы установили обширность семейства $\mathcal{F}_1$.

Определим теперь оператор $\check{g}:\mathcal{L}_F \longrightarrow \mathcal{L}_F$ формулой $(\check{g}\varphi)(x)=\varphi(g(x))$. Так как мера F является $\mathcal{G}$ - инвариантной, то $\check{g}$ - унитарный оператор и группа $\check{\mathcal{G}}=\{\check{g},\ g\subset\mathcal{G}\}$ изоморфна $\mathcal{G}$. В силу доказанной выше леммы, проектор из $\mathcal{L}_F$ на $\mathcal{L}_F^1$ имеет вид $(\Pi_F\varphi)(x)= =\int_{\mathcal{G}}\varphi(g(x))\,\Delta(dg)$.

Теорема I в применении к оцениванию функции распределения $F(\cdot)$ при условии, что мера F принадлежит $\mathcal{F}_1$ -семейству $\mathcal{G}$ - инвариантных мер, дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$w_F(x)=\int_{\mathbb{R}^k}\varphi(x,y)\,dW_F(y), \tag{8}$$

где

$$\varphi(x,y)=\int_{\mathcal{G}}\chi_x(g(y))\,\Delta(dg)\ . \tag{9}$$

Тогда для произвольной последовательности оценок $T_n= =T_n(\cdot;X_1,\dots,X_n)$ неизвестной функции распределения $F(\cdot)$, $F\in\mathcal{F}_1$ и для любой функции потерь $\ell(\cdot)=\lambda(\|\cdot\|_{p,\mu})\in L$ имеет место неравенство (I) с заменой η_F^1 на $w_F(\cdot)$ (здесь V - произвольная окрестность в $\mathcal{F}_1$ в топологии, относительно которой непрерывны семейства (4)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться в том, что процесс w_F имеет ковариационную функцию (5) с оператором Π_F, определенным в предложении 3, и, воспользовавшись предложением 2, применить теорему I.

Рассмотрим несколько применений предложения 3 к конкретным группам преобразований.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $k=1$ и группа $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1$ состоит из тождественного преобразования $g_0(x)=x$ и отражения $g_1(x)=-x$. Тогда формула (9) принимает вид: $\varphi(x,y) = (1/2)\left[\chi_x(y)+\chi_x(-y)\right]$ и для $w_F(\cdot)$ в (8) имеет место формула

$$w_F(x)=\frac{1}{2}\left[W_F(x)-W_F(-x)\right].$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $k\geqslant 1$ и группа $\mathcal{G}=\mathcal{G}_2$ состоит из всех 2^k отражений относительно координатных плоскостей. При этом преобразование g описывается набором $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$ чисел $\varepsilon_j=\pm 1$, так что для $x=(x_1,\ldots,x_k)$ $g(x)= (\varepsilon_1 x_1,\ldots,\varepsilon_k x_k)$. Тогда формула (9) имеет вид

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2^k}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)}\chi_x(\varepsilon_1 y_1,\ldots,\varepsilon_k y_k),$$

где суммирование ведется по всем наборам $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $k>1$ и группа $\mathcal{G}=\mathcal{G}_3$ состоит из всех вращений, оставляющих неподвижной точку 0. Тогда $\mathcal{L}_F^1$ состоит из функций вида $\varphi(x)=\varphi_1(|x|)$, постоянных на сферах с центром в точке 0, $|x|=(x_1^2+\ldots+x_k^2)^{1/2}$.

Проектор Π_F имеет вид

$$(\Pi_F\varphi)(x)=\int\limits_{S(0,|x|)}\varphi(y)\,U_x(dy),$$

где интеграл берется по сфере с центром в нуле и радиуса $|x|$, а $U_x(dy)$ – равномерное распределение на этой сфере.

5. Случай неизвестного центра

Пусть $\mathcal{F}_1$ – семейство мер на $\mathbb{R}^k$, инвариантных относительно группы $\mathcal{G}_2$, рассмотренной в следствии 2 п.4. В этом пункте мы рассматриваем задачу оценки ф.р. $F(\cdot)$, предполагая, что множество $\mathcal{F}_2$ допустимых мер удовлетворяет следующим условиям.

I) Ф.р. $F(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега ν на $\mathbb{R}^k$, $dF/d\nu(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^k$.

2) Существуют вектор $c\in\mathbb{R}^k$ и $\mathcal{G}_2$ – инвариантная плотность f° такие, что $f(x)=f^\circ(x-c)$.

3) $\int\limits_{\{f^0(x)=0\}} f^\circ(x+h)\nu(dx) = O(|h|^2), \quad h\to 0$.

4) Отображение $a: h \longmapsto \sqrt{f^0(x+h-c)/f^0(x-c)}$ дифференцируемо при $h=0$ как отображение окрестности нуля $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^k$ в $L^2(F)$ и его производная имеет вид

$$a'(h)(\cdot) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} h_j \zeta_j(\cdot),$$

где $\zeta_1,\dots,\zeta_k \in \hat{L}^2(F)$, $h=(h_1,\dots,h_k)\in\mathbb{R}^k$.

5) Матрица $\mathcal{I}=\|\beta_{ij}\|$, $\beta_{ij}=\int \zeta_i(x)\zeta_j(x)\,dF(x)$, невырожденная.

В рассматриваемом случае мы не можем воспользоваться семействами распределений вида (4), поскольку они, вообще говоря, выводят F_h за пределы $\mathcal{F}$. Будем рассматривать поэтому классы $\mathcal{K}^2_m(F)$ $(m=1,2,\dots)$ семейств $\Gamma=(\mathcal{U},\gamma,\gamma')$ распределений, имеющих плотность $f_h(=dF_h/d\nu)$ по мере Лебега вида

$$f_h(x)=f^0(x-c-p(h))\Big[1+\sum_{j=1}^{m} h_j\xi_j(x-c-p(h))\Big], \qquad (10)$$

где p – дифференцируемое отображение окрестности нуля из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^k$, а функции ξ_j центрированы относительно плотности f^0, $\mathcal{G}_2$ – инвариантны и ограничены вместе со своими производными. При этом условие 2 п.I очевидно выполнено. Под производной γ' семейства $\Gamma=(\mathcal{U},\gamma,\gamma')$ будем понимать удвоенную производную по h в $L^2(F)$ от $\sqrt{f_h(x)/f(x)}$ как отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\hat{L}^2(F)$. При этом выполняется условие I п.I (см. [5]), в котором билинейная форма $I_F(\cdot,\cdot)$ является обычным скалярным произведением в $L^2(F)$. Опишем проектор Π_F из $\hat{L}^2(F)$ на касательное пространство $\mathcal{L}^2_F$ к $\mathcal{F}_2$ в точке F. Заодно мы убедимся в выполнении условия 5. Условия 3 и 4 выполнены, как отмечалось выше, если функция распределения рассматривается как элемент пространства $L^p(\mathbb{R}^k, \mathcal{A},\mu)$, $1\le p\le\infty$, μ – конечная мера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $F\in\mathcal{F}_2$. Тогда

I) пространство $\mathcal{L}^2_F$ является прямой суммой подпространства S_F^1 функций вида $\psi(x)=\xi^\circ(x-c)$, где ξ° – произвольная $\mathcal{G}_2$ – инвариантная функция, $\int \xi^\circ f^\circ d\nu = 0$, и k -мерного подпространства S_F^2, натянутого на функции $\zeta_1(x),\dots,\zeta_k(x)$.

2) подпространства S_F^1 и S_F^2 ортогональны, и проектор из $L^2(F)$ на $\mathcal{L}_F^2$ имеет вид:

$$(\Pi_F\varphi)(x_1,\dots,x_k)=\frac{1}{2^k}\sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)}\varphi(c_1+\varepsilon_1(x_1-c_1),\dots,$$

$$c_k+\varepsilon_k(x_k-c_k))+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\zeta_j(x_1,\dots,x_k), \tag{II}$$

где коэффициенты $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ определяются из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{k}\beta_{ij}\lambda_j=\int\varphi(x)\zeta_i(x)dF(x),\quad i=1,\dots,k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что пространство $\mathcal{L}_F^2$ содержит подпространства S_F^1 и S_F^2, так как $\mathcal{F}_2$ содержит подсемейства мер, плотности которых имеют вид

$$f_h(x)=f^\circ(x-c)\Big[1+\sum_{j=1}^{m}h_j\,\xi_j^\circ(x-c)\Big]$$

и k -мерное подсемейство мер с плотностями $f_h(x)= =f^\circ(x-c-h)$. Поэтому $\mathcal{L}_F^2$ содержит и сумму подпространств $S_F^1+S_F^2$.

Ортогональность S_F^1 и S_F^2 следует из того, что функция $\zeta_j(x)$ меняет знак при отражении относительно гиперплоскости $x_j=c_j$ и инвариантна при отражениях относительно гиперплоскостей $x_i=c_i$, $i\neq j$.

Заметим, что отсюда вытекает также обширность (условие 5′) семейства $\mathcal{F}_2$. Обратное включение $\mathcal{L}_F^2\subset S_F^1\oplus S_F^2$ очевидно. Проектор на сумму взаимно ортогональных подпространств равен сумме соответствующих проекторов и поэтому имеет место формула (II). Тем самым предложение доказано.

Применим теперь теорему I к семейству $\mathcal{F}_2$.
Обозначим

$$w_F(x) = \int (\Pi_F \chi_x)(y)\, dW_F(y), \qquad (12)$$

где Π_F определяется формулой (II).

ТЕОРЕМА 3. Пусть V – произвольная окрестность в $\mathcal{F}_2$ и $\ell \in L$. Тогда для любой последовательности оценок $T_n = T_n(\cdot; X_1, \dots, X_n)$ функции распределения $F(\cdot)$ ($F \in \mathcal{F}_2$) имеет место неравенство (I) с $\eta_F^1 = w_F$.

Рассмотрим применение указанной теоремы в одномерном случае.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть плотность $f = dF/dx$ имеет вид $f(x) = f^0(x-c)$, где f^0 – четная абсолютно непрерывная функция, $\zeta(x) = -f'(x)/f(x)$, $\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} [\zeta(x)]^2 f(x)\, dx$, $0 < \mathcal{I} < \infty$.

Тогда процесс w_F в формуле (I2) имеет вид:

$$w_F(x) = \frac{1}{2}\left[W_F(x) - W_F(2c - x) \right] -$$

$$-\mathcal{I}^{-1} f^0(x-c) \int \zeta(y)\, dW_F(y).$$

Здесь первое слагаемое получается в результате проектирования $f_x(\cdot)$ на S_F^1, а второе – на S_F^2; в данном случае S_F^2 – одномерное подпространство, порожденное функцией $\zeta(\cdot)$.

Другой результат, который может быть выведен из теоремы 3 – это границы риска для оценки центра. По-прежнему предполагаем, что $F \in \mathcal{F}_2$, но оцениваемой величиной $\Phi(F)$ является центр c распределения F (при этом сама плотность f^0 неизвестна). Для построения информационной границы достаточно найти производную Φ в точке F (как отображение из $\mathcal{L}_F^2$ в $\mathbb{R}^k$), ограничиваясь k-мерными подсемействами. Поскольку производная при $h=0$ семейства мер с плотностями вида $f_h(x) = f^0(x-c-h)\left[1 + \sum_{j=1}^{k} h_j \xi_j(x-c-h)\right]$, есть $2a'(h) = -\sum_{j=1}^{k} h_j \zeta_j(x) + \sum_{j=1}^{k} h_j \xi_j(x-c)$, то производная $\varphi_F : \mathcal{L}_F^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ функции Φ в точке F определяется формулой

$$\varphi_F(\xi) = -\mathcal{J}^{-1} \begin{pmatrix} \int \zeta_1 \, \xi \, dF \\ \vdots \\ \int \zeta_k \, \xi \, dF \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица $\mathcal{J}$ - та же, что в условии 5 в начале этого пункта. Применяя теорему I, получаем, что для любой последовательности оценок $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ со значениями в $\mathbb{R}^k$, для произвольной окрестности *) $V \subset \mathcal{F}_2$ и для всякой функции потерь вида $\ell(\cdot) = \lambda(\|\cdot\|) \in L$, где $\|\cdot\|$ - произвольная норма в $\mathbb{R}^k$, имеет место соотношение (I), в котором $\theta \equiv F$, η_θ^1 - k -мерный гауссовский вектор с нулевыммматематическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathcal{J}^{-1}$. Нетрудно видеть, что именно такое распределение имеет редукция W_F с помощью проектора Π_F на подпространство $S_F^2 \subset \mathcal{L}_F^2$.

Оценки функции распределения $F(\cdot)$ в предположении, что $F \in \mathcal{F}_1$ или $F \in \mathcal{F}_2$ указаны в работе [6]. Можно показать, что эти оценки являются локально асимптотически минимаксными, т.е. на них достигается равенство в (I). В докладе авторов [3] было указано применение общего метода построения бесконечномерных информационных неравенств к оценке характеристических функционалов от неизвестного распределения.

Литература

I. Левит Б.Я. Бесконечномерные информационные неравенства.- Теор.вероятн. и ее примен., 1978, т.23, № 2, с.388-394.

2. Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, т.CXI, Л., "Наука", 1976.

3. Кошевник Ю.А., Левит Б.Я. О нижних границах риска непараметрических оценок функции распределения. В кн.: УП Всесоюзн.конф.теор.кодирования, передачи информации, доклады, Ч.I. М.-Вильнюс, 1978, 80-84.

---

*) В любой топологии, относительно которой непрерывны семейства распределений (I0).

4. К о ш е в н и к Ю.А., Л е в и т Б.Я. О непараметрическом аналоге информационной матрицы. – Теор.вероятн. и ее примен., 1976, т.21, № 4, с.759-774.
5. И б р а г и м о в И.А., Х а с ь м и н с к и й Р.З. Локальная асимптотическая нормальность для неодинаково распределенных наблюдений. – Теор.вероятн. и ее примен., 1975, т.20, № 2, с.251-266.
6. К о ш е в н и к Ю.А. Об асимптотическом распределении непараметрических оценок функции распределения при условии симметрии. В кн.: Статистические методы. Межвузовский сборник. Изд.Пермского ГУ, Пермь, 1978, с.39-57.
7. Д м и т р и е в Ю.Г. О свойствах оценок функций распределения и функционалов при дополнительной априорной информации. В кн.: Матем.статист.и ее прилож., № 4. Изд.Томского ГУ, Томск, 1976, с.63-76.