

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Dmitriev, O. A. Sinkevich, К вопросу об эффективной проводимости неоднородной плазмы (нелинейные ионизационные волны), *TVT*, 1977, Volume 15, Issue 3, 486–495

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 19, 2025, 20:53:31



УДК 533.932

К ВОПРОСУ ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ (НЕЛИНЕЙНЫЕ ИОНИЗАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ)

А. С. Дмитриев, О. А. Синкевич

Приведены существующие точные и приближенные методы расчета эффективной проводимости неоднородных сред. Рассмотрена задача о вычислении эффективной проводимости низкотемпературной неравновесной замагниченной плазмы в приближении квазилинейных плоских волн. С помощью вводимого, для определения амплитуды стационарных периодических волн электронной концентрации, принципа «гиперустойчивости» удастся последовательно провести вычисление эффективной проводимости и получить так называемое «полуэмпирическое» соотношение с учетом параметров плазмы, степени ионизации и т. д. Указаны границы использования «полуэмпирического» соотношения. Проведены оценочные расчеты и показано, что обычно применяемое «полуэмпирическое» соотношение завышает эффективную проводимость при больших параметрах неустойчивости.

Введение. Задачи о вычислении эффективной проводимости неоднородных сред, представляющие интерес как в теоретическом, так и прикладном плане, возникают в различных областях физики (низкотемпературная плазма, полупроводники и т. д.). При этом не существует общих рецептов решения таких задач, а различные подходы приводят часто к отличающимся друг от друга результатам. Сложность вычисления эффективной проводимости при наличии внешнего магнитного поля вызвана наличием физической (присутствие магнитного поля) и геометрической (наличие неоднородностей) анизотропии. В данной работе мы остановимся на задаче об эффективной проводимости низкотемпературной неравновесной замагниченной плазмы, находящейся в неоднородном состоянии вследствие развития ионизационной неустойчивости. Сравним существующие методы расчета эффективной проводимости и, используя ранее развитый одним из авторов подход к построению нелинейных волн и вводимый авторами принцип «гиперустойчивости», построим замкнутую теорию, позволяющую рассчитать в рамках нелинейной теории плоских волн эффективную проводимость неоднородной плазмы. Преимущество такого подхода определяется тем, что в этом случае можно вывести соотношение (называемое часто «полуэмпирическим»), хорошо совпадающее с экспериментальными данными в широком диапазоне параметров плазмы, опираясь на минимальное число предположений и не оставляя свободных параметров. Кроме того, из этого подхода видны границы использования полуэмпирического соотношения.

При развитии ионизационной неустойчивости эффективные (в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю) параметры могут существенно отличаться от средних по объему. Эффективная проводимость, например, определяется соотношением [1]

$$\sigma_{эф} = \langle j \rangle^2 / \langle E \cdot j \rangle.$$

[2]

$$\sigma_{\text{эф}} = \langle \sigma \rangle \frac{\Omega_{\text{эф}}}{\langle \Omega \rangle}$$

Точное решение модельной задачи. Модель — хаотические неоднородности одинаковых объемов (изотропная турбулентность). Наличие эффективного параметра Холла $\Omega_{\text{эф}}$ требует знания квадрата амплитуды флуктуаций, который в рамках данной теории не может быть определен. Сильные магнитные поля

[3]

$$\sigma_{\text{эф}} = \frac{2l_1}{l_2} \frac{\Omega}{\Omega} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{|\sigma_1 - \sigma_2|}$$

Модель — проводящая полоса с прямоугольными ячейками, в которых попеременно меняются σ (σ_1 и σ_2), причем $\Omega_1 = \Omega_2$ (отсутствие кулоновских столкновений). l_1 и l_2 — соответственно продольный и поперечный размеры ячейки. Сильные магнитные поля

[4]

$$\sigma_{\text{эф}} = \sigma_1 \left[1 + 2\lambda \frac{\Delta (m' + n')}{m'(1 + \Delta) n'(1 - \Delta)} \right]^{-1}$$

$$\Delta = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

Модель — проводящая среда с эллиптическим включением, большая ось которого параллельна вектору средней плотности тока. σ_1 и σ_2 — проводимости соответственно среды и включения ($\sigma_1 < \sigma_2$); λ — концентрация «эллиптической» фазы; m' и n' — большая и малая оси эллипса

[5]

$$\sigma_{\text{эф}} = \sigma_1 \left[1 + 2\lambda \frac{\Delta + tg^2 \pi \varepsilon'}{1 + tg^2 \pi \varepsilon'} \right]^{-1}$$

$$\sigma_{\text{эф}} = \sigma_1 (1 + 2\lambda)^{-1}$$

$$\Delta = (\sigma_1 - \sigma_2) / (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\varepsilon' = \arctg \Omega_1$$

Модель — набор эллиптических включений, оси которых не совпадают, вообще говоря, с направлением вектора средней плотности тока.

Приведена асимптотика для сильных магнитных полей. Обозначения те же

[6]

$$\sigma_{\text{эф}} = \langle \sigma \rangle \left[1 + \Omega^2 \frac{\langle \tilde{\sigma}^2 \rangle}{\langle \sigma \rangle} \right]^{-1}$$

Подход, основанный на приближении случайных фаз. Необходимо заранее знать спектр турбулентности (величину $\tilde{\sigma}^2$, где $\tilde{\sigma}$ — флуктуация проводимости). Справедливо лишь при $\Omega^2 \times \langle \tilde{\sigma}^2 \rangle / \langle \sigma \rangle^2 \ll 1$

[7]

$$\text{a) } \sigma_{\text{эф}} = \langle \sigma \rangle \left[1 + \Omega^2 x_0^2 \cos^2 \varphi + \frac{\Omega^2 y_0^2 \sin^2 \varphi}{1 + \Omega^2 x_0^2} \right]^{-1}$$

$$\text{б) } \sigma_{\text{эф}}^{[7]} = \frac{\langle \sigma \rangle}{\Omega} \left[x_0 \cos^2 \varphi + \frac{y_0^2}{x_0} \sin^2 \varphi \right]^{-1}$$

Приближенное решение для сильно анизотропного спектра (неоднородности вытянуты вдоль одной из осей). Справедливо для весьма широкого класса анизотропных моделей. Выражение а) — для узкого спектра флуктуаций (строго для δ -образного); б) — для плавной функции распределения неоднородностей. Здесь φ — угол наклона слоев к среднему току; x_0 , y_0 — функции, приведенные в работе [7]

[8]

$$\sigma_{\text{эф}} = \langle \sigma \rangle \frac{\sigma_n^2 + (\sigma_n^2 + \Omega_+^2)^{1/2}}{\sigma_n^2 + (\sigma_n^2 + \langle \Omega \rangle^2)^{1/2}}$$

$$\sigma_n = \partial \ln \sigma / \partial \ln n$$

Приближение квазилинейных плоских волн с учетом малости их амплитуд. Вследствие некорректного выбора системы координат [9] занижены диссипативные потери. Умеренные магнитные поля. Ω_+ — критический параметр Холла; n — концентрация электронов

[10]

$$\sigma_{\text{эф}} = \langle \sigma \rangle \frac{(\sigma_n^2 + \Omega_+^2)^{1/2}}{(\sigma_n^2 + \langle \Omega \rangle^2)^{1/2}}$$

Приближение квазилинейных плоских волн. Малые амплитуды флуктуаций. Умеренные магнитные поля

[11]

$$\sigma_{\text{эф}} = \langle \sigma \rangle \frac{A}{\langle \Omega \rangle}$$

Носит название «полуэмпирического» соотношения. Может быть формально получено из двух записанных выше соотношений. Коэффициент A часто полагают равным Ω_+ . Справедливость такой возможности обсуждается в [11]. Умеренные магнитные поля

Литература, Формула	Предпосылки при выводе и пределы применимости
<p>[11]</p> $\sigma_{\text{эф}} = \langle \sigma \rangle \frac{B}{\sqrt{\langle \Omega \rangle}}$	<p>«Полуэмпирическое» соотношение, справедливо при $\Omega_0 > 10$. О коэффициенте B нет практически никаких данных [11]. Замена $\langle \sigma \rangle$ на σ_0 и $\langle \Omega \rangle$ на Ω_0 превышает турбулентную проводимость на порядок и выше. Необходим поэтому правильный выбор величины B. Здесь и далее индекс нуль относится к однородному состоянию</p>
<p>[12, 13]</p> $\sigma_{\text{эф}} = \sigma_0 \left[\frac{\Omega}{\sqrt{2} \Omega_0} \right]^{1/2}$	<p>Приближенное выражение для модели разряда с двумя ортогональными семействами неоднородностей, расположенных под углом $\pm \pi/4$ (ромбовидная «шахматная доска» к вектору средней плотности тока. Соотношение справедливо при $\Omega_0 \gtrsim 5\Omega_+$</p>
<p>[14]</p> $\sigma_{\text{эф}} = \sigma_0 \frac{(\sigma_0 \tau_0 - f)^2 + (\Omega_0 f)^2}{\Omega_0 [\Omega_0 + f(\Omega_0^2 - 1)]}$ $\sigma_{\text{эф}} \cong \frac{\sigma_0}{\Omega_0} \left(\frac{\pi \langle \tilde{n}^2 \rangle}{4} + \frac{4}{\pi \langle \tilde{n}^2 \rangle} \right)$ $f = \langle \tilde{n}^2 \rangle \left[-\frac{1}{2\Omega_0} + \frac{\Omega_0^2 - 1}{2\Omega_0^2} \operatorname{tg}^{-1} \Omega_0 \right]$	<p>Приближение изотропной турбулентности. Кулоновскими столкновениями пренебрегается. Выражение применимо при больших значениях параметра Холла. Приведена асимптотика этого выражения. Здесь τ — время передачи импульса от электронов к тяжелым частицам; \tilde{n} — флуктуация концентрации электронов</p>
<p>[15]</p> <p>а) $\sigma_{\text{эф}} = \sigma_0 \times$ $\times \left\{ \frac{1 + (SI)^2 - (2SI/\Omega) + (SI/\Omega)^2}{[1 - (1/\Omega)SI + \Omega SI](1 + S)^{1/2}} \right\}^{2,3}$</p> <p>б) $\sigma_{\text{эф}} = \sigma_0 \left\{ \frac{1 - S + (S^2/4) \Omega^2}{M} \right\}^{2,3}$ $M = [1 - S/2 + (S/2) \Omega^2](1 + S)^{1/2}$</p>	<p>Приближение изотропной турбулентности. Пренебрегается кулоновскими столкновениями. Формула а) справедлива для трехмерных неоднородностей, формула б) — для двумерных. S — среднеквадратичное отклонение коэффициента электропроводности; I — параметр эффективной электропроводности [6]. При больших Ω величина $I \approx \pi/4$</p>
<p>[16]</p> $\sigma_{\text{эф}} \approx \sigma_0 (\Delta/\Omega)^{4,5}$ $\sigma_{\text{эф}} \approx \sigma_0 \Delta/\Omega$	<p>Приближение произвольно заданного спектра турбулентности. Выражение справедливо при $\Omega \Delta^2 \gg 1$. Верхняя формула — для трехмерных неоднородностей, нижняя — для двумерных (совпадает с модельным результатом [2]). Амплитуда флуктуаций $\sqrt{\Delta}$, где $\Delta = \left\langle \left(\frac{\tilde{n}}{n} \right)^2 \right\rangle$, в рамках теории [16] не определена</p>

Здесь \mathbf{j} — вектор плотности тока; \mathbf{E}^* — электрическое поле в системе координат, движущейся со скоростью потока плазмы; обозначение $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по объему в каждый момент времени.

Существуют несколько подходов к расчету $\sigma_{\text{эф}}$. Условно методы расчета можно разделить на три группы: точно решаемые модельные задачи, приближения с заданным спектром турбулентности и приближенные расчеты в рамках квазилинейной теории плоских волн. Рассмотрим различные методы расчета $\sigma_{\text{эф}}$, сведя их в таблицу.

Сравнение большинства приведенных выше выражений для $\sigma_{\text{эф}}$ с экспериментом в неравновесной замагниченной плазме и между собой приведено в [9]. Отмечается, что при умеренных магнитных полях все эти формулы дают близкие результаты. Для сильных магнитных полей нужны уточнения. Как отмечается в [17], важно получить достаточно точное выражение полуэмпирического характера с учетом параметров газа, степени ионизации, величины присадки и изменения фона. До сих пор попытки получить полуэмпирическое соотношение из строгого рассмотрения предпринято не было. Последовательный учет свойств плазмы

при вычислении эффективной проводимости был предпринят Сольбе в работе [10], где спектр флуктуаций представлялся в виде квазилинейных плоских волн. Как указано в [9], этот подход дает результаты, близкие к другим подходам. Однако теория Сольбе страдает некоторыми неочевидными предпосылками и содержит ряд неточностей. Укажем некоторые из них. В [10] предполагается существование периодического решения для флуктуаций, но доказательство существования такого решения, а также метод его построения отсутствуют. Поэтому усреднение, которое производится в работе [10], содержит неизвестную длину волны. Следует отметить, что периодического решения может вообще не существовать (жесткий режим возникновения турбулентности [18]). Вместо того чтобы искать нелинейное периодическое решение, по которому производится усреднение в исходной системе, Сольбе предполагает, что в конечном состоянии существуют две однородные «фазы». Используя критерий устойчивости однородных фаз по линейному приближению, он находит выражение этих фаз в явном виде.

Однако поскольку окончательный результат зависит от гипотез существования «фаз» и соотношения их «объемов» (сами эти гипотезы неочевидны), а состояние устойчивости соответствует критическому ($\text{Re } \omega = 0$) случаю по линейному приближению (для окончательного суждения об устойчивости в этом случае нужен учет нелинейных членов), подход Сольбе к определению конечного состояния нельзя считать корректным. И, наконец, при сравнении своей теории с экспериментом Сольбе подбирает значение критического параметра Холла Ω_+ . В последовательной же теории Ω_+ должно находиться из самой теории (хотя бы из линейного случая). Ниже будет показано, что можно построить решение аналогичной задачи, используя значительно меньше допущений.

Нелинейные плоские волны электронной концентрации. Рассматривается неравновесная ($T_e > T_a$) безграничная плазма, помещенная в постоянное и однородное внешнее магнитное поле. Система уравнений, которой будем пользоваться, приведена в [18, 19].

Вследствие развития ионизационной неустойчивости изменение однородного состояния плазмы происходит в основном в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Поэтому задачу будем рассматривать в плоской постановке.

Считается, что электронная концентрация в любой точке и в любой момент времени может быть представлена в виде крупномасштабного фона n_Φ и мелкомасштабных волн \tilde{n} — флуктуаций (вообще говоря, не малых). Тогда из исходной системы можно получить уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial n_\Phi}{\partial t} + U_e \nabla n_\Phi + \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + U_e \nabla \tilde{n} = \nabla (\Lambda \nabla n_\Phi) + \nabla (\Lambda \nabla \tilde{n}) + F(n_\Phi, \tilde{n}), \quad (1)$$

$$U_e = -\frac{j_0}{en} \frac{kT_e(n)}{I} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \ln n}{\partial \ln T_e} \right)^{-1} \right]$$

где U_e — токовая скорость электронов; λ_e — электронная теплопроводность ($\Lambda = \lambda_e (\partial T_e / \partial n)$, $F = (j^2 / \sigma) - 3/2 \delta k T_e n v_e$ * (см. Приложение).

Как показывает эксперимент, неоднородности располагаются в плазме (при $\Omega > \Omega_+$) в основном вдоль некоторой оси, под определенным углом к вектору средней плотности тока. Выбирая одну из координатных осей вдоль неоднородностей, а другую поперек, получаем

$$\frac{\partial n_\Phi}{\partial t} + U_e \frac{\partial n_\Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + U_e \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Lambda \frac{\partial n_\Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Lambda \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \eta} \right) + F, \quad (2)$$

* Указанный подход может быть обобщен на случай, когда учет излучения является существенным.

где η — координата поперек неоднородностей. Считаем, что фон не меняется в пространстве и во времени. В этом приближении находим нелинейное уравнение для флуктуаций, в которое входит неизвестный фон

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + U_e \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Lambda \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \eta} \right) + F(n_\Phi, \tilde{n}). \quad (3)$$

Согласно [20], можно привести уравнение (3) к виду

$$\frac{d}{ds} \left(\Lambda \frac{d\tilde{n}}{ds} \right) + [W - U_e(n_\Phi, \tilde{n})] \frac{d\tilde{n}}{ds} + F(n_\Phi, \tilde{n}) = 0, \quad (4)$$

где $s = \eta - Wt$, W — скорость распространения волн (метод нахождения ее указан в работе [20]).

Как отмечалось в [19, 20], функция F в области развития неустойчивости имеет три точки равновесия. Уравнение (4), согласно [20], описывает при определенных условиях периодические волны электронной концентрации, а следовательно, электрического поля и электрического тока. Аппроксимируя F полиномом, например, третьей степени, можно построить аналитическое решение уравнения (4). Точное решение (4) при аппроксимации полиномом третьей степени выражается через эллиптические функции Якоби действительного аргумента $\text{sn}[K(\mu), s]$, $\text{cn}[K(\mu), s]$, $\text{dn}[K(\mu), s]$; где μ — модуль эллиптической функции, $K(\mu)$ — эллиптический интеграл первого рода. Если функцию F нельзя точно аппроксимировать полиномом третьей степени, то решение можно получить, взяв за основное приближение решение в виде эллиптических функций, а затем методом Крылова — Боголюбова [21] учесть поправки к решению.

Указанная процедура построения периодического решения позволяет установить существование периодических волн электронной концентрации и найти период волн Π_s . Зная Π_s , можно последовательно провести усреднение в исходной системе.

Без ограничения общности (но с весьма существенными вычислительными упрощениями) выберем из общего периодического решения, разложенного в ряд Фурье (по 2π -периодическим функциям), одну гармонику. Будем считать, что данная гармоника представляет профиль волны электронной концентрации. Для вычисления эффективной электропроводности (см. ниже) потребуется спектр неоднородностей. Этим спектром и будет выбранная гармоника. До сих пор, однако, остаются неизвестными амплитуда флуктуаций и средний фон.

Для определения амплитуды флуктуаций и среднего фона имеется лишь одно условие, вытекающее из стационарности фона. Это условие, записанное в виде $dn_\Phi/dt = 0$, приводит к требованию, чтобы среднее значение функции F обращалось в нуль

$$\langle F \rangle = \left\langle F + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Lambda(n_\Phi, \tilde{n}) \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \eta} \right] + U_e(n_\Phi, \tilde{n}) \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \eta} \right\rangle = 0. \quad (5)$$

Здесь усреднение производится по периоду Π_s . Исходя из этого условия, можно найти связь между квадратом амплитуды флуктуаций α^2 и средним фоном n_Φ ($n_\Phi = (n_c - n_0)/n_0$, где n_c — неизвестная константа — сдвиг однородного n_0 (при $\Omega = 0$) фона

$$\alpha^2 = \frac{2\Psi_{11}n_\Phi}{\Psi_{01} + \Psi_{12}\epsilon + 3n_\Phi(\Psi_{03} + \Psi_{13}\epsilon)} \epsilon. \quad (6)$$

Уравнение (6) связывает между собой две неизвестные величины α^2 и n_Φ . Для их определения необходимы дополнительные соображения. Это вытекает из того факта, что в безграничной среде неизвестна связь меж-

ду амплитудой и параметрами системы в установившемся режиме*. Единственным прямым методом получения α^2 является решение задачи с начальными условиями. Как показывает ряд экспериментов по ионизационной неустойчивости (например, [22]), в закритической области ($\Omega > \Omega_+$) возникают установившиеся волны конечной амплитуды (в частности, периодические). При этом, видимо, вид установившейся волны не зависит от характера начального возмущения.

Можно предположить для задач подобного рода существование некоторого дополнительного условия, позволяющего определить установившийся режим (дополнительную связь между α^2 и n_ϕ), который не зависит от вида начального возмущения. Это условие сводится, по-видимому, к некоторому экстремальному принципу, в котором, варьируя амплитуду волны, можно определить конечное устойчивое состояние. В качестве указанного принципа в данном случае предлагается принцип «гиперустойчивости». Он заключается в следующем. Решая уравнение (5) относительно n_c , находим стационарные состояния системы. Таких состояний может быть несколько n_{c_j} ($j=1, 2, 3, \dots$). Из этих состояний выбираем такие, которые являются устойчивыми, т. е. обеспечивают

$$\left. \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial n_\phi} = \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial n_c} \right|_{n_c = n_{c_j}} < 0. \quad (7)$$

Производная $\partial \langle F \rangle / \partial n_c$ зависит от амплитуды волны как от параметра. Потребуем дополнительно, чтобы $\partial \langle F \rangle / \partial n_c$ была экстремальной

$$\left. \frac{\partial^2 \langle F \rangle}{\partial \alpha \partial n_c} \right|_{n_c = n_{c_j}} = 0. \quad (8)$$

Далее, чтобы избежать громоздких выкладок, оставим лишь члены, содержащие ε в первой степени. Используя уравнения (5), (7), находим

$$n_\phi = -\Psi_{02} / 3(\Psi_{03} + \Psi_{13}\varepsilon), \quad (9)$$

$$\alpha^2 \cong^2 / 3(\Psi_{11} / \Psi_{13})\varepsilon. \quad (10)$$

Выражение для n_ϕ пропорционально коэффициенту Ψ_{02} , стоящему перед квадратичным членом для флуктуаций. Следовательно, смещение фона происходит за счет квадратичных эффектов и в линейном приближении отсутствует.

Вычисление эффективной проводимости. Перейдем к вычислению эффективной проводимости. Приближение, в котором производится вычисление проводимости, аналогично приближению квазилинейных плоских волн [10]. Как показано в работе [9], такое приближение весьма хорошо согласуется с другими методиками. Поскольку известен спектр неоднородностей, вычисление можно провести до конца.

Воспользуемся выражением, предложенным в [10] и являющимся достаточно общим

$$\sigma_{\phi\phi} = \langle \sigma \rangle \left[1 + \frac{\left\langle \frac{1 + \Omega^2}{\sigma} \right\rangle \langle \sigma \rangle - (1 + \langle \Omega \rangle^2)}{1 + \langle \kappa \rangle^2} \right]^{-1} \quad (11)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по периоду флуктуаций, $\langle \kappa \rangle$ — среднее значение тангенса угла наклона между осью η и средней плотностью тока. Будем считать, что $\langle \kappa \rangle$ — постоянная величина, определяемая из условий, приведенных в [19, 20].

* Связь между α^2 и n_ϕ неизвестна для периодических волн, но, как показано в [19, 20], уравнение (4) допускает, наряду с периодическими решениями, решения типа уединенных волн. Для уединенных волн — солитонов — такая связь известна.

Проводя усреднение и соответствующие преобразования, получаем следующее выражение:

$$\sigma_{эф} = \langle \sigma \rangle \left[1 + \frac{\gamma \alpha^2}{1 + \langle \chi \rangle^2} \right]^{-1}. \quad (12)$$

При получении формулы (12) учтено, что соответствующие величины Ω , σ , σ^{-1} представлены в виде полиномов по концентрации. Величина γ

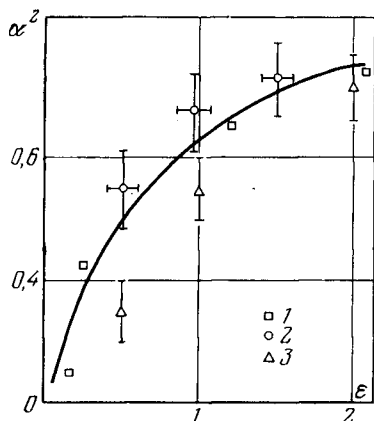


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость амплитуды волны от параметра надкритичности. Кривая — расчет по модели нелинейных плоских волн (Ar+0,02% Cs), точки — эксперимент: 1 — [23] (Ar+Na); 2 — [24] (Ar+Na); 3 — [24] (Ar+K)

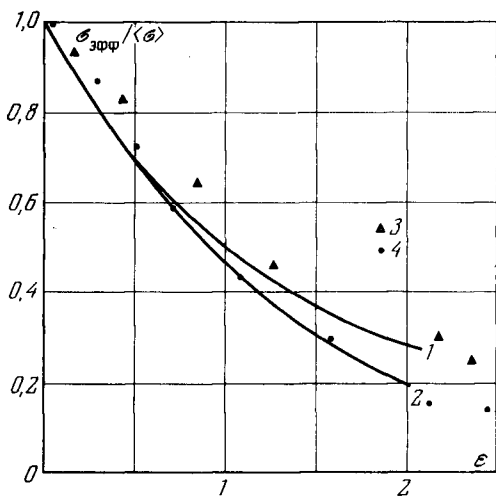


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость эффективной проводимости от параметра надкритичности: 1 — расчет по формуле $\sigma_{эф}/\langle \sigma \rangle = \Omega_+/\Omega$; 2 — по формуле $\frac{\sigma_{эф}}{\langle \sigma \rangle} = \frac{\Omega_+}{\Omega} \left[1 - \frac{1-\chi}{(1+\epsilon)^2} \epsilon \right]$ (расчет произведен для плазмы Ar+0,02% Cs при 1500 К и 1 атм); 3, 4 — эксперимент: 3 — [23], 4 — [24]

равна

$$\gamma \cong \frac{1}{2} (\tau_1^2 + 2\tau_1 a_1 + a_2). \quad (13)$$

Подстановка α^2 в (12) дает

$$\sigma_{эф} = \langle \sigma \rangle (1 + \chi \epsilon)^{-1}, \quad (14)$$

где

$$\chi \cong \frac{2}{3} \frac{\gamma}{1 + \langle \chi \rangle^2} \frac{\Psi_{11}}{\Psi_{03}}.$$

Или, вспоминая, что $\epsilon = (\Omega - \Omega_+)/\Omega_+$, для случая $\chi \sim 1$ имеем

$$\sigma_{эф} = \langle \sigma \rangle \left[\frac{\Omega_+}{\Omega} - \frac{1-\chi}{(1+\epsilon)^2} \epsilon \right]. \quad (15)$$

Явное выражение для χ имеет вид

$$\chi \cong \frac{1}{3} \frac{\tau_1^2 + 2\tau_1 a_1 + a_2}{1 + \langle \chi \rangle^2} \times \frac{\Omega_+ \tau_1 \sin 2\theta_0}{\sin^2 \theta_0 a_1 \sigma_1^2 - \Omega_+ \sin 2\theta_0 \tau_1 a_1 + \Omega_+ \cos \theta_0 \sigma_1 \tau_1 - (\partial^3 F_- / \partial n^3)},$$

где F_- — энергия, передаваемая электронами при столкновении с тяжелыми частицами.

Соотношение (15) интересно тем, что учет лишь первого члена правой части (или когда $\chi \sim 1$) дает известную формулу, часто называемую «полуэмпирическим» соотношением

$$\sigma_{эф} = \langle \sigma \rangle \Omega_+ / \Omega. \quad (16)$$

Следовательно, в формуле (15) стоит поправка к (16), учитывающая состав плазмы, степень ионизации, величину присадки и т. д. В этом

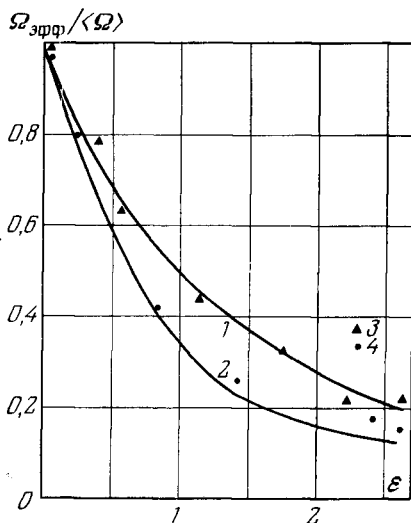


Рис. 3. Зависимость эффективного параметра Холла от параметра надкритичности: 1 — расчет по формуле $\Omega_{эфф} / \langle \Omega \rangle = \Omega_+ / \Omega$; 2 — по модели нелинейных плоских волн; 3 — эксперимент [23]; 4 — [24]

смысле выражение (15) является более общим, чем (16). Если коэффициент при ϵ мал и $\chi \sim 1$, формула (16) справедлива в широком интервале изменения ϵ . Видимо, для ряда экспериментов $\chi \sim 1$. Поэтому формула (16) дает весьма точный результат при вычислении эффективной проводимости даже при больших значениях ϵ .

Заключение. Оценочные расчеты α^2 и $\sigma_{эф}$ по формулам (10) и (15) дали результаты, показанные на рис. 1 и 2 соответственно. На рис. 1 виден рост амплитуды флуктуаций с повышением параметра надкритичности. α^2 при $\epsilon \rightarrow \infty$ достигает максимума. На рис. 2 дано сравнение эффективных проводимостей, полученных по формулам (15) и (16). Все оценки проводились для плазмы аргона ($p=1$ атм) с присадкой цезия (объемная доля цезия — 0,02%) в интервале температур от 2000 до 4500 К. Магнитные поля указаны на рисунках через параметр Холла. Критическое значение параметра Холла бралось из линейной теории, что является более последовательной операцией, чем метод подбора Ω_+ , использованный в [10]. Рис. 2 показывает, что при достаточно больших параметрах надкритичности формула (16) дает завышенный результат по сравнению с формулой (15).

Таким образом, в настоящей работе предложено более точное выражение для вычисления эффективной проводимости, базирующееся на методе плоских волн конечной амплитуды, причем вывод его свободен от недостатков, присущих работе [10]. Кроме того, данный подход также позволяет рассчитать эффективный параметр Холла $\Omega_{эф} = \langle E_{\perp} \rangle / \langle E_{\parallel} \rangle$, зависимость которого от параметра надкритичности представлена на рис. 3. На всех указанных рисунках нанесены экспериментальные результаты, взятые из [22–24]. В другом режиме потери устойчивости, когда возникает ионизационная турбулентность, необходимо учесть взаимодействие волн и определить спектр турбулентности.

Допустим, что разность между джоулевым нагревом и столкновительным членом может быть представлена в виде следующего степенного разложения:

$$F = F_+ - F_- = \sum_{k \geq 0} F_k n^k = F_0 + F_1 n + F_2 n^2 + \dots \quad (\text{П.1})$$

В свою очередь, коэффициенты разложения F_j зависят от двух параметров: параметра надкритичности ϵ и характерного угла наклона фронта плоской волны к вектору средней плотности тока $-\theta$. Можно показать, что коэффициенты F_j содержат ϵ лишь в первой и второй степени. Следовательно, имеем

$$F_j = \Psi_{0j} + \Psi_{1j}\epsilon + \Psi_{2j}\epsilon^2. \quad (\text{П.2})$$

Тогда можно записать

$$F = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2 \\ k \geq 0}} \Psi_{ik} n^k \epsilon^i. \quad (\text{П.3})$$

В силу единственности разложения функции в ряд Тейлора, формула (П.3) представляет собой такое разложение по степеням n вблизи нуля, с коэффициентами, зависящими от параметров ϵ и θ (отметим, что величина начального состояния в таком разложении принята за нуль). В начальном состоянии ($n=0$ при $\Omega=0$) имеем

$$F_+(0) = F_-(0), \quad (\text{П.4})$$

откуда

$$F_0 = \Psi_{00} = 0. \quad (\text{П.5})$$

Кроме того, поскольку в начальном состоянии магнитного поля нет, получаем

$$\Psi_{01} = 0. \quad (\text{П.6})$$

Окончательно получаем

$$F \approx (\Psi_{11} + \Psi_{21}\epsilon)\epsilon n + (\Psi_{02} + \Psi_{12}\epsilon + \Psi_{22}\epsilon^2)n^2 + (\Psi_{03} + \Psi_{13}\epsilon + \Psi_{23}\epsilon^2)n^3, \quad (\text{П.7})$$

где учтено, что $\partial F / \partial n = 0$ при $\Omega = \Omega_+$. В выражении (П.7) оставлены члены третьего порядка включительно. Последнее связано с тем, что при такой аппроксимации F достигается приемлемая точность.

Выпишем явный вид коэффициентов разложения Ψ_{ij} для частного случая: задана средняя плотность тока на бесконечности, причем угол наклона средней плотности тока к фронту волны в начальном состоянии равен θ_0 . Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= -\Omega_+ \tau_1 \sin 2\theta_0; & \Psi_{12} &= \sin 2\theta_0 \Omega_+ (\sigma_1 \tau_1 - \tau_2), \\ \Psi_{02} &= 2 \sin \theta_0 (\sigma_1 \sin \theta_0 - \Omega_+ \tau_2 \cos \theta_0) - (\partial^2 F_- / \partial n^2)_{n=0}, \\ \Psi_{03} &= \sin^2 \theta_0 (2\sigma_1 \sigma_2 + a_1 \sigma_2 + \sigma_1 a_2 + \sigma_1^2 a_1) - \\ & - \Omega_+ \sin 2\theta_0 (a_1 \tau_2 + \tau_1 a_2 + \sigma_1 \tau_1 a_1) - \Omega_+ \cos \theta_0 (\sigma_1 \tau_1 + \\ & + 2\tau_1 \tau_2 - \tau_1 \sigma_2) + 2\Omega_+^2 \cos^2 \theta_0 \tau_1 \tau_2 - (\partial^3 F_- / \partial n^3)_{n=0}, \\ \Psi_{22} &= \Omega_+^2 \cos^2 \theta_0 \tau_1^2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Здесь τ_i , σ_i , a_i — коэффициенты следующих разложений:

$$\tau/\tau_0 = \sum_{i \geq 0} \tau_i n^i; \quad \sigma/\sigma_0 = \sum_{i \geq 0} \sigma_i n^i; \quad a_0/a_0 = \sum_{i \geq 0} a_i n^i. \quad (\text{П.9})$$

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
29 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Веденов. Теория турбулентной плазмы. ВИНТИ, 1965.
2. А. М. Дыхне. ЖЭТФ, 59, вып. 2, 641, 1970.
3. Ю. П. Емец. ПММ, 36, вып. 4, 617, 1972.
4. А. П. Григориади, Ю. П. Емец. ТВТ, 12, № 5, 903, 1974.
5. Ю. П. Емец, В. Ф. Резцов. Письма в ЖТФ, 1, вып. 1, 15, 1975.
6. S. Yoshikawa, D. Rose. Phys. Fluids, 5, № 9, 334, 1962.
7. А. А. Веденов, А. М. Дыхне. МГД-генераторы, 1. ВИНТИ, 1967.

8. *N. L. Hower, M. Mitchner.* 16th Symp. Eng. Asp. of MHD, Washington, 1975, p. 217.
 9. *Г. Бредерлоу, К. Вирге.* Ракетная техника и космонавтика, 12, № 1, 102, 1974.
 10. *A. Solbes.* ИПТЭЭ и ТЭ, 3 (80), 3, 1969.
 11. *V. Zampaglione.* 12th Symp. Eng. Asp. of MHD, Illinois, USA, 1972.
 12. *Е. П. Велихов, Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский.* 5th Int. Conf. of MHD, Munich, 2, p. 307, 1971.
 13. *P. Gay, V. Zampaglione.* 13th Symp. Eng. Asp. of MHD, Stanford, USA, 1973.
 14. *V. Zampaglione.* ИПТЭЭ и ТЭ, 3 (80), 9, 1969.
 15. *Р. Джиллин, Е. Зукоски.* Ракетная техника и космонавтика, 7, № 8, 36, 1969.
 16. *Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне.* ЖЭТФ, 63, вып. 1, 104, 1972.
 17. *В. Зампаглионе.* ТВТ, 10, № 6, 984, 1972.
 18. *О. А. Синкевич.* ПММ, 38, вып. 4, 656, 1974.
 19. *О. А. Синкевич.* ДАН СССР, 213, № 2, 315, 1973.
 20. *О. А. Синкевич.* ТВТ, 13, № 1, 53, 1975.
 21. *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. «Наука», 1975.
 22. *И. Я. Шипук, С. В. Пашкин.* ДАН СССР, 176, № 6, 1278, 1967.
 23. *М. М. Маликов.* Автореф. канд. дисс., М., 1971.
 24. *W. Riedmüller.* ИПТЭЭ и ТЭ, 3 (80), 15, 1969.
-