А.В.Малышев

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

(Замечания к статье "Обобщенные суммы Клостермана и их оценки"*))

В статье, указанной в заглавии, рассматривались экспоненциальные суммы вида

$$K_\tau(u,v;q)=\sum_{x(\mathrm{mod}\,q)}{}' \left(\frac{x}{\tau}\right) e^{2\pi i\frac{ux+vx^{-1(\mathrm{mod}\,q)}}{q}} \qquad (1)$$

и более общие суммы

$$K_\tau(u,v;l,L;q)=\sum_{x\equiv l(\mathrm{mod}\,L)}{}' \left(\frac{x}{\tau}\right) e^{2\pi i\frac{ux+vx^{-1(\mathrm{mod}\,q)}}{q}}\,; \qquad (2)$$

---

*) Вестник ЛГУ, 1960, № 13, 59–75. В заглавие этой статьи, к сожалению, вкралась досадная опечатка.

здесь q - целое положительное число; τ - нечетное положительное число, все простые делители которого входят в q ; u и v - целые числа; L - целое положительное число, делящее q ; ℓ - целое число; суммирование в первой сумме ведется по всем вычетам x приведенной системы $(\mathrm{mod}\, q)$, во второй сумме - по тем из них, которые сравнимы с ℓ по модулю L . Запись $x^{-1(\mathrm{mod}\, q)}$ для числа x , взаимно простого с q , обозначает число x' , для которого $x'x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, q)$; для определенности далее считаем, что $0 < x^{-1\,(\mathrm{mod}\, q)} \leq q$

В цитированной статье (или - что то же - в главе П монографии [1]) на основе формул Салье и оценки А.Вейля были даны оценки сумм (1) и (2). Нам понадобится следующий вариант этих оценок (ср. также Эстерман [6]):

Лемма . Имеет место неравенство

$$\left|K_\tau(u,v;\ell,L;q)\right| \leq \sqrt{q}\,\min\left\{\tau\left(\frac{q}{\text{о.н.д}(u,q)}\right)\sqrt{\text{о.н.д}\,(u,q)},\right.$$
$$\left.\tau\left(\frac{q}{\text{о.н.д}\,(v,q)}\right)\sqrt{\text{о.н.д}\,(v,q)}\right\}, \qquad (3)$$

где $\tau(n)$ - количество всех делителей числа n .

Доказательство. По формуле [1] (П.72)*) нам достаточно

---

*) Так мы обозначаем формулу (22) главы П монографии [1] .

доказать оценку (3) для суммы $K_{\tau}(u, v; q)$. Формула [1] (П.7) показывает, что нам достаточно доказать неравенство

$$\left| K_{\tau}(u,v;q)\right| \leqslant \tau\left(\frac{q}{\text{о.н.д.}(u,q)}\right)\sqrt{q}\,\sqrt{\text{о.н.д.}(u,q)}. \qquad (4)$$

Согласно формуле [1] (П.16) неравенство (4) следует из оценок типа

$$\left| K_{p^s}(u,v;p^t)\right| \leqslant \tau\left(p^{t-t_1}\right) p^{\frac{t+t_1}{2}}, \qquad (5)$$

где p - простое число, о.н.д. $(u,p^t)=p^{t_1}$. Но оценка (5) непосредственно следует из формул замечаний 2 - 4 монографии [1] и неравенства [1] (П.63).

Лемма доказана.

Оценки (3) и им подобные имеют многочисленные приложения. В этой заметке мы остановимся на применении неравенства (3) к оценке коэффициентов, возникающих при разложении в ряд Фурье целых параболических модулярных форм данной размерности $-s$, где $s\geqslant 2$ - целое число.

Определение модулярных форм и их основные свойства см., например, Гуннинг [7] (а также Гекке [8] , [10] и Эйхлер [2], [4]). Для наших целей достаточно следующего характеристического свойства целых параболических модулярных форм, которое можно рассматривать как определение таких форм.

Пусть s и N - натуральные числа. Функция $F(\tau)$ комплексного переменного τ, заданная в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} \tau > 0$, есть целая параболическая модулярная форма (Spitzenform) размерности $-s$ и ступени N, если для каждой унимодулярной целочисленной подстановки

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1,$$

имеется ряд

$$\mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} e^{2\pi i \frac{\nu\tau}{N}}, \tag{6}$$

сходящийся при $\operatorname{Im} \tau > 0$, для которого

$$F(\tau) = \frac{1}{(c\tau+d)^s} \mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right), \tag{7}$$

причем

$$\mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}}(\tau) = \mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(\tau), \text{ если } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod N. \tag{8}$$

В частности, при $a = d = 1$, $b = c = 0$ мы имеем ряд Фурье для целой параболической модулярной формы $F(\tau)$:

$$F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}} \qquad (\operatorname{Im}\tau > 0). \tag{9}$$

Задаче асимптотической (с ростом n) оценки коэффициентов c_n, важной, в частности, для аналитической арифметики квадратичных форм*), посвящены работы Гекке [9], Клостермана [11]. Эстермана [5], Салье [12] и Эйхлера [3].

Гекке [9] с помощью весьма простого рассуждения получил оценку

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2}}\right); \tag{10}$$

постоянные, входящие в O, здесь и далее зависят только от F.

Клостерман [11], используя свои исследования по суммам (1) и (2), получил оценку

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2} - \frac{1}{8} + \varepsilon}\right); \tag{11}$$

постоянная здесь зависит также и от произвольного $\varepsilon > 0$. Доказательство Клостермана было несколько упрощено и уточнено Эстерманом [5].

---

*) Об этом см., например, Гекке [9].

Салье [12] заметил, что метод Клостермана-Эстермана приводит к следующему общему результату:

Замечание. Если имеет место оценка

$$K_1(u, v; \ell, L; q) = O\left(q^{1-\beta+\varepsilon}\{\text{о.н.д.}(u, q)\}^{\beta}\right),$$

то

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2}-\frac{\beta}{2}+\varepsilon}\right).$$

Поэтому всякий прогресс в оценках сумм (1) при $\tau = 1$ влечет за собою уточнение оценок для коэффициентов Фурье c_n целых параболических модулярных форм. В частности, если использовать неулучшаемые (в смысле степени q) оценки (3), то мы получаем следующее предложение (сразу формулируем его с небольшим уточнением):

Теорема. Пусть

$$F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}} \qquad (\operatorname{Im}\tau > 0) \tag{14}$$

- целая параболическая форма размерности $-s$ и степени N. Тогда

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}} \ln^{\frac{3}{2}} n \, \sigma_{-\frac{1}{2}}(n)\right), \tag{I5}$$

где $\sigma_{-\frac{1}{2}}(n) = \sum_{m \backslash n} m^{-\frac{1}{2}}$; постоянные, входящие в O , зависят только от F.

С помощью метода Клостермана-Эстермана нельзя снизить степень n , входящую в правую часть оценки (I5). Однако есть основания предполагать, что

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \tag{I6}$$

(и это есть истинный в смысле степени n порядок c_n). В настоящее время оценка (I6) доказана лишь для $s=2$ Эйхлером [3] , которому понадобились для этого весьма тонкие соображения.

Для полноты изложения приведем доказательство теоремы (ср. Эстерман [5] , Салье [I2]).

<u>Доказательство теоремы</u>. I^0. Так как $F(\tau)$ представляется рядом (9), то для любого фиксированного комплексного числа τ_0 с положительной мнимой частью

$$c_n = \frac{1}{N}\int_{\tau_0}^{\tau_0+N} F(\tau) e^{-2\pi i \frac{n\tau}{N}} \, d\tau. \tag{I7}$$

Пусть $\eta = \frac{1}{n}$ и $\mathcal{M} = [\sqrt{n}]$ *). Полагаем $\tau_0 = \frac{1}{\mathcal{M}+1} + i\eta$. Тогда

$$c_n = \frac{e^{2\pi\frac{n\eta}{N}}}{N} \int\limits_{\frac{1}{\mathcal{M}+1}}^{\frac{1}{\mathcal{M}+1}+N} F(\vartheta + i\eta) e^{-2\pi i \frac{n\vartheta}{N}} d\vartheta \tag{18}$$

Промежуток интегрирования $\left[\frac{1}{\mathcal{M}+1}, \frac{1}{\mathcal{M}+1} + N\right]$ разобьем медиантами $\mathcal{M}$ -ряда Фарея и представим интеграл (18) в виде сумм интегралов по полученным интервалам Фарея:

$$c_n = \frac{e^{2\pi\frac{n\eta}{N}}}{N} \sum_{q=1}^{\mathcal{M}} \sum_{\substack{0<h\leq Nq \\ \text{о.н.д.}(h,q)=1}} e^{-2\pi i \frac{nh}{Nq}} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q_2)}}^{\frac{1}{q(q+q_1)}} F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right) e^{-2\pi i \frac{n\theta}{N}} d\theta, \tag{19}$$

---

*) Далее в п.п. 1^0–5^0 $\eta > 0$ можно предполагать произвольным вещественным, а $\mathcal{M} \geq 0$ – произвольным целым числом.

где

$$\left.\begin{aligned} q_1 &\equiv -h^{-1(\operatorname{mod} q)} \pmod q \quad (\mathcal{M}-q<q_1\leq \mathcal{M}),\\ q_2 &\equiv h^{-1(\operatorname{mod} q)} \pmod q \quad (\mathcal{M}-q<q_2\leq \mathcal{M})\end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

Обозначая

$$c_{n,q}=\sum_{\substack{0<h\leq Nq\\ \text{о.н.д.}(h,q)=1}} e^{-2\pi i\frac{nh}{Nq}} \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q_2)}}^{\frac{1}{q(q+q_1)}} F\left(\frac{h}{q}+\theta+i\eta\right)e^{-2\pi i\frac{n\theta}{N}}\,d\theta, \tag{21}$$

будем иметь

$$c_n=\frac{e^{2\pi i\frac{n\eta}{N}}}{N}\sum_{q=1}^{\mathcal{M}} c_{n,q}. \tag{22}$$

2[o]. Изучим функцию

$$g_{\mathcal{M},q}(\theta,h)=\left\{\begin{array}{l} 1, \text{ если } -\frac{1}{q(q+q_2)}\leq\theta<\frac{1}{q(q+q_1)}, \\ \\ 0, \text{ в противном случае,}\end{array}\right\}, \quad (23)$$

нужную нам для дальнейших преобразований (для перестановки суммирования и интегрирования в формуле (2I)).

Пусть

$$h_0=h_0(o,q,\mathcal{M})=\left[\frac{1}{q|\theta|}\right]-\mathcal{M}. \quad (24)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\gamma(m)$, заданную для всех целых m , имеющую период q :

$$\gamma(m+q)=\gamma(m), \quad (25)$$

и определенную для $0<m\leq q$ равенством:

$$\gamma(m)=\gamma_{h_0}(m)=\left\{\begin{array}{l} 1, \text{ если } 0<m\leq h_0, \\ 0, \text{ если } h_0<m\leq q. \end{array}\right\} \quad (26)$$

Тогда

$$\gamma(m)=\sum_{k=1}^{q} a_k e^{2\pi i\frac{km}{q}}, \quad (27)$$

где

$$a_k = \frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{q} \gamma(\ell)\, e^{-2\pi i \frac{k\ell}{q}} = \frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{h_0} e^{-2\pi i \frac{k\ell}{q}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{h_0}{q}, & \text{если} \quad k = q; \\[2ex] \dfrac{1}{q}\cdot \dfrac{1 - e^{-2\pi i \frac{k h_0}{q}}}{e^{2\pi i \frac{k}{q}} - 1}, & \text{если} \quad 1 \leq k < q. \end{array} \right\} . \tag{28}$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{q} |a_k| \leq 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{2}{q\left|e^{2\pi i \frac{k}{q}} - 1\right|} = 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{q \sin \frac{\pi k}{q}} \leq 1$$

$$+ \frac{2}{q}\sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{1}{\sin \frac{\pi k}{q}} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{1}{k} < \ln(4q). \tag{29}$$

Теперь докажем, что

$$g = g_{\mathcal{M},q}(\theta, h) = \sum_{k=1}^{q} b_k \, e^{2\pi i \frac{k h^{-1} (\mathrm{mod}\, q)}{q}} , \tag{30}$$

где

$$b_k = b_k(\theta; \mathcal{M}, q) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{- в случае } |\theta| > \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+1)} ; \\ 1 \text{ при } k = q \text{ и } 0 \text{ при } 1 \leq k < q - & \\ & \text{- в случае } |\theta| \leq \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+q)} ; \\ a_k e^{-2\pi i \frac{k\mathcal{M}}{q}} & \text{- в случае } -\dfrac{1}{q(\mathcal{M}+1)} \leq \theta < -\dfrac{1}{q(\mathcal{M}+q)} ; \\ a_q \text{ при } k = q \text{ и } a_{q-k} e^{2\pi i \frac{k\mathcal{M}}{q}} \text{ при } 1 \leq k < q - & \\ & \text{- в случае } \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+q)} < \theta \leq \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+1)} \end{array} \right\} . \tag{31}$$

Действительно, по определению $\mathcal{M}$-ряда Фарея

$$\frac{1}{q(\mathcal{M}+q)} \leq \frac{1}{q(q+q_1)} \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}, \quad \frac{1}{q(\mathcal{M}+q)} \leq \frac{1}{q(q+q_2)} \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)} . \tag{32}$$

Поэтому

$$g=\begin{cases} 0, \text{ если } & |\theta| > \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+1)}, \\ 1, \text{ если } & |\theta| \leqslant \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+q)}. \end{cases}$$

Отсюда мы выводим справедливость формулы (31) в первых двух случаях.

Если $\dfrac{1}{q(\mathcal{M}+1)} < |\theta| \leqslant \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+q)}$, то по определению $\gamma(m)$ и формулам (20)

$$g=\begin{cases} \gamma\left(h^{-1(\mathrm{mod}\,q)}-\mathcal{M}\right), \text{ если } & -\dfrac{1}{q(\mathcal{M}+1)} \leqslant \theta < -\dfrac{1}{q(\mathcal{M}+q)}, \\ \gamma\left(-h^{-1(\mathrm{mod}\,q)}-\mathcal{M}\right), \text{ если } & \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+q)} < \theta \leqslant \dfrac{1}{q(\mathcal{M}+1)} \end{cases}$$

Отсюда мы выводим справедливость формулы (31) в остальных двух случаях.

Формулы (31) и неравенство (29) нам дают:

$$\sum_{k=1}^{q} |b_k| < \ln(4q). \tag{33}$$

3^0. Продолжаем изучение $c_{n,q}$. Формулу (21) с учетом определения $g_{\mathcal{M},q}(\theta,h)$ и неравенств (32) мы можем переписать так:

$$c_{n,q}=\sum_{\substack{0<h\le Nq\\ \text{o.н.g.}(h,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}}^{\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}} g_{\mathcal{M},q}(\theta,h)\,e^{-2\pi i\frac{nh}{Nq}}F\left(\frac{h}{q}+\theta+i\eta\right)e^{-2\pi i\frac{n\theta}{N}}\,d\theta=$$

$$=\int_{-\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}}^{\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}}\left\{e^{-2\pi i\frac{n\theta}{N}}\sum_{\substack{0<h\le Nq\\ \text{o.н.g.}(h,q)=1}} g_{\mathcal{M},q}(\theta,h)\,e^{-2\pi i\frac{nh}{Nq}}F\left(\frac{h}{q}+\theta+i\eta\right)\right\}d\theta=$$

$$=\int_{-\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}}^{\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}} e^{-2\pi i\frac{n\theta}{N}}\,d_{n,q}(\theta)\,d\theta\,, \tag{34}$$

где обозначено:

$$d_{n,q}(\theta)=\sum_{\substack{0<h\le Nq\\ \text{o.н.g.}(h,q)=1}} g_{\mathcal{M},q}(\theta,h)\,e^{-2\pi i\frac{nh}{Nq}}\;F\left(\frac{h}{q}+\theta+i\eta\right)\,. \tag{35}$$

4^0. Теперь изучаем $d_{n,q}(\theta)$. Запишем:

$$d_{n,q}(\theta)=\sum_{\substack{0<\ell\leq N\\ \text{о.н.д.}(\ell,q,N)=1}} d_{n,q}^{(\ell)}(\theta), \tag{36}$$

где

$$d^{(\ell)}=d_{n,q}^{(\ell)}(\theta)=\sum_{\substack{0<h\leq qN\\ \text{о.н.д.}(n,q)=1\\ h\equiv\ell\,(\mathrm{mod}\,N)}} g_{\mu,q}(\theta,h)e^{-2\pi i\frac{nh}{Nq}}F\left(\frac{h}{q}+\theta+i\eta\right). \tag{37}$$

Пусть фиксированы N, q и ℓ. Обозначим:

$$\text{о.н.д.}(\ell,N)=\delta,\quad \ell=\delta\ell',\quad N=\delta N'$$

Тогда, так как $h\equiv\ell\ (\mathrm{mod}\ N)$ и о.н.д. $(h,q)=1$, то

$$\text{о.н.д.}(h,N)=\text{о.н.д.}(\ell,N)=\delta,\ \ h=\delta h',\ \text{о.н.д.}(\delta,q)=\text{о.н.д.}(\ell',N')=$$

$$=\text{о.н.д.}(h',N')=1,\quad h'\equiv\ell'\,(\mathrm{mod}\,N').$$

Теперь формулу (37) можно переписать так:

$$d^{(\ell)} = \sum_{\substack{0<h'\leq qN' \\ \text{о.н.д.}(h',qN')=1 \\ h'\equiv \ell' \pmod{N'}}} g\,\mathcal{M}_{,q}(\theta,h)\, e^{-2\pi i \frac{nh'}{N'q}}\, F\left(\frac{h}{q}+\theta+i\eta\right). \qquad (38)$$

5^0. Пусть

$$\frac{h}{q}+\theta+i\eta=\tau, \quad \theta+i\eta=\omega, \quad \frac{h}{q}+\omega=\tau.$$

К функции $F(\tau)$ применим тождество (7), следующим образом подбирая целочисленную унимодулярную подстановку $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} & c=q, \\ & d=-h=-\delta h', \\ & a=-\delta\left(\delta^{-1(\bmod q)}\right)^2\cdot h'^{\,-1(\bmod qN')} \\ & b=\frac{ad-1}{c}=\frac{\delta^2\left(\delta^{-1(\bmod q)}\right)^2 h'\cdot h'^{\,-1(\bmod qN')}-1}{q} \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Так как $ad-1 \equiv \delta^2 (\delta^{-1 \,(\mathrm{mod}\, q)})^2 h' \cdot h'^{\,-1\,(\mathrm{mod}\, q)} - 1 \equiv$ $\equiv \pmod q$, то b – целое число. По построению b целочисленная подстановка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ унимодулярна: $ad-bc=1$.

Подстановка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ определяется числами N, q и h. Однако заметим, что если $h_1 \equiv h \equiv \ell \pmod N$ и числам N, q, h_1 отвечает по формулам (39) подстановка $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, то

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod N,$$

так что класс $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod N$, задаваемый формулами (39), определяется числами N, q и классом вычетов $\ell \pmod N$. Действительно:

$$c_1 = c = q,$$

$$d_1 \equiv d \equiv -\ell \pmod N,$$

$$a_1 \equiv a \equiv -\left(\delta^{-1\,(\mathrm{mod}\, q)}\right)^2 \delta\, \ell'^{\,-1\,(\mathrm{mod}\, N')} \pmod N,$$

$$b_1 \equiv b \equiv \frac{\delta^2 \left(\delta^{-1\,(\mathrm{mod}\, q)}\right)^2 - 1}{q} \pmod N.$$

Поэтому функция $\mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(\tau)$ определяется (при фиксированных N и q) числом $\ell \pmod N$. Поэтому далее обозначаем:

$$\mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(\tau) = \mathcal{M}_\ell(\tau), \quad a_\nu^{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = a_\nu^{(\ell)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Замечая, что

$$c\tau + d = c\left(-\frac{d}{c} + \omega\right) + d = c\omega = q\omega,$$

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\tau + d)} = -\frac{\delta\left(\delta^{-1 \pmod q}\right)^2 h'^{-1 \pmod{qN'}}}{q} - \frac{1}{q^2\omega},$$

и применяя формулу (7), получаем:

$$F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right) = \frac{1}{(q\omega)^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(\ell)} e^{-2\pi i \frac{\nu\left(\delta^{-1 \pmod q}\right)^2 h'^{-1 \pmod{qN'}}}{qN'} - \frac{2\pi i \nu}{q^2 \omega N}}. \quad (40)$$

Подставим выражение (40) в формулу (38) для $d^{(\ell)}$. Тогда, учитывая (30), получим:

$$d^{(\ell)} = \frac{1}{(q\omega)^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(\ell)} e^{-\frac{2\pi i \nu}{q^{2\omega N}}} \sigma_\nu^{(\ell)}(N, \mathcal{M}, q; \theta, h), \tag{41}$$

где

$$\sigma_\nu^{(\ell)} = \sigma_\nu^{(\ell)}(N, \mathcal{M}, q; \theta, h) = \sum_{\substack{0 < h' \leq qN' \\ \text{о.н.д.}(h', qN') = 1 \\ h' \equiv \ell' \pmod{N'}}} g_{\mathcal{M}, q}(\theta, h) e^{-2\pi i \frac{nh' + \nu \left(\delta^{-1 \pmod q}\right)^2 h'^{-1 \pmod{qN'}}}{qN'}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} b_k K_1\left(-n, -\nu\left(\delta^{-1 \pmod q}\right)^2 + kN'\delta^{-1 \pmod q}; \ell', N'; qN'\right). \tag{42}$$

6^0. Равенство (42) и оценки (3) и (33) нам дают неравенство

$$\left|\sigma_\nu^{(\ell)}\right| < \ln(4q)\, \tau\left(\frac{qN'}{\text{о.н.д.}(n, qN')}\right) \sqrt{qN'} \sqrt{\text{о.н.д.}(n, qN')} <$$

$$< A_1 \ln n \cdot \tau\left(\frac{q}{\text{о.н.д.}(n, q)}\right) \cdot \sqrt{q} \cdot \sqrt{\text{о.н.д.}(n, q)},$$

где A_1 (равно как в дальнейшем $A_2, A_3, \dots$) - постоянная, зависящая только от F.

Поэтому

$$|d^{(\ell)}| < A_1 \ln n \cdot \tau\left(\frac{q}{\text{о.н.д.}(n,q)}\right)\sqrt{q}\sqrt{\text{о.н.д.}(n,q)} \times \frac{1}{|q\omega|^s}\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu^{(\ell)}|e^{-\frac{2\pi\nu}{n|q\omega|^2 N}}. \qquad (44)$$

Пусть теперь $|\theta| \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}$. Тогда

$$\frac{2\pi}{n|q\omega|^2 N} = \frac{2\pi}{n\left(q^2\theta^2 + \frac{q^2}{n^2}\right)N} \geq \frac{2\pi}{n\left(\frac{1}{(\mathcal{M}+1)^2} + \frac{q^2}{n^2}\right)N} \geq \frac{2\pi}{n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)N} = \frac{\pi}{N},$$

а потому

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu^{(\ell)}|e^{-\frac{2\pi(\nu-1)}{n|q\omega|^2 N}} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu^{(\ell)}|e^{-\pi(\nu-1)N} < A_2,$$

ибо для каждого ℓ ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu^{(\ell)}|e^{-\pi(\nu-1)N}$ сходится, а количество $\ell \pmod N$ ограничено числом N. Далее, так как $x^{\frac{s}{2}}e^{-\frac{2\pi x}{N}} < A_3$ при $x > 0$, то

$$n^{-\frac{s}{2}} |q\omega|^{-s} e^{-\frac{2\pi}{n|q\omega|^2 N}} < A_3 .$$

Из двух последних оценок выводим:

$$\frac{1}{|q\omega|^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu^{(\ell)}| e^{-\frac{2\pi\nu}{n|q\omega|^2 N}} = \frac{e^{-\frac{2\pi}{n|q\omega|^2 N}}}{|q\omega|^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu^{(\ell)}| e^{-\frac{2\pi(\nu-1)}{n|q\omega|^2 N}} <$$

$$< A_3 n^{\frac{s}{2}} \cdot A_2 < A_4 n^{\frac{s}{2}} . \qquad (45)$$

Оценки (44) и (45) нам дают (при $|\theta| \leq \frac{1}{q(M+1)}$)

$$|d^{(\ell)}| < A_5 n^{\frac{s}{2}} \ln n . \tau \left(\frac{q}{\text{о.н.д.}(n,q)}\right) \sqrt{q} \sqrt{\text{о.н.д.}(n,q)} . \qquad (46)$$

Откуда по формуле (36) (при $|\theta| \leq \frac{1}{q(M+1)}$)

$$|d_{n,q}(\theta)| < A_6 n^{\frac{s}{2}} \ln n . \tau \left(\frac{q}{\text{о.н.д.}(n,q)}\right) \sqrt{q} \sqrt{\text{о.н.д.}(n,q)} . \qquad (47)$$

Из формул (34), (22) и оценки (47) выводим:

$$|S_n| < A_7 n^{\frac{s-1}{2}} \ln n \sum_{q=1}^{[\sqrt{n}]} \tau\left(\frac{q}{\text{о.н.д.}(n,q)}\right) \frac{\sqrt{\text{о.н.д.}(n,q)}}{\sqrt{q}} =$$

$$= A_7 n^{\frac{s-1}{2}} \ln n \sum_{\substack{t \backslash n \\ t \leq \sqrt{n}}} \sum_{\substack{q_1 \leq \frac{\sqrt{n}}{t} \\ \text{о.н.д.}(q_1, \frac{n}{t}) = 1}} \tau(q_1) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t q_1}} \leq$$

$$\leq A_7 n^{\frac{s-1}{2}} \ln n \sum_{t \backslash n} \sum_{q \leq \frac{\sqrt{n}}{t}} \frac{\tau(q_1)}{\sqrt{q_1}} \leq$$

$$\leq A_8 n^{\frac{s-1}{2}} \ln n \sum_{t \backslash n} \left(\frac{\sqrt{n}}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} n =$$

$$= A_8 n^{\frac{s}{2} - \frac{1}{4}} \ln^{\frac{3}{2}} n \; \sigma_{-\frac{1}{2}}(n).$$

Теорема доказана.

Литература

[I] Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Тр. Матем. инст. АН СССР, I962, 65 2I2.

[2] Eichler M., Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin, I952, 220.

[3] Eichler M., Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Arch. der math. W I954, 5, 355-366.

[4] Eichler M., Quadratische Formen und Modulfunktionen. Acta Arithm., I958, 4, 2I7-239.

[5] Estermann T., Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman. Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ., I929, 7, 82-9

[6] Estermann T., On Kloosterman's sum. Mathematika. I96I, 2, 83-86.

[7] Gunning R.G., Lectures on modular forms. Princeton, I962,I-86

[8] Hecke E., Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Math. Ann., I926, 9, 2I0-242; Math. Werke, I959, 428-460.

[9] Hecke E., Theorie der Eisensteinschen Reihen Höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abh. Math. Seminar Hambur. Univ., I927, 5, I99-224; Math. Werke, I959, 46I-486.

[IO] Hecke E., Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. Kgl. Danske Vidensk Selskeb, matn.-fys. Medd. I940, I3, N I2, I-I34; Math. Werke, I959, 789-9I8.

[II]. Kloostermann H.D., Asymptotische Formeln für die Fourier-
koeffizienten ganzen Modulformen. Abh. Math. Semina
Hamburg. Univ., I927, 5, 337-352.

[I2]. Salie H., Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer
Modulformen. Math. Z., I932, 36, 263-278.