Представления для ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в окрестности особой точки $(1,1)$ и вблизи границы его области сходимости

В. Ф. ТАРАСОВ
Брянский государственный технический университет

УДК 517.588

Ключевые слова: гипергеометрические функции, функции Аппеля.

Аннотация

Даются точные аналитические представления для гипергеометрического ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в окрестности особой точки $(1,1)$ и вблизи границы $\Gamma = \partial D_2$ его области сходимости D_2: $|x|+|y|<1$. Показано, что функции Аппеля $F_2(1,1)$ и $F_3(1,1)$ обладают свойством зеркальной симметрии относительно центра $j_0 = -1/2$ при замене $j \mapsto -j-1$, $j \in \mathbb{Z}$, и взаимосвязаны.

Abstract

V. F. Tarasov, Representations for Appell's series $F_2(x,y)$ to the vicinity of the singular point $(1,1)$ and near the boundary of its domain of convergence, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 2, p. 669–689.

Exact analytical representations for Appell's series $F_2(x,y)$ to the vicinity of the singular point $(1,1)$ and the boundary of its domain of convergence are given. It is shown, that Appell's functions $F_2(1,1)$ and $F_3(1,1)$ have the property of mirror-like symmetry with respect to the center $j_0=-1/2$ under the change $j \mapsto -j-1$, $j \in \mathbb{Z}$, and they correlate between each other.

§ 1. Введение

Как известно [1, с. 234], все гипергеометрические ряды из списка Горна (за возможным исключением F_4, H_1, H_5 и $\mathcal{H}_1$) могут быть выражены через ряд Аппеля F_2 или его частные и предельные формы. Именно поэтому понятен постоянный интерес к изучению свойств (прежде всего) функции Аппеля F_2.

В статье рассмотрены некоторые новые свойства функции Аппеля F_2, исследование которых базируется на работах [2–16], где используются совершенно разные подходы для получения формул аналитического продолжения (например, интегральные преобразования типа Лапласа–Эрдейи, Меллина–Бернса, Эйлера, Похгаммера или представление F_2 через другие гипергеометрические функции от двух переменных). Эти свойства подразделяются на две части: поведение ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в окрестности особой точки $(1,1)$ и вблизи границы $\Gamma = \partial D_2$ его области сходимости D_2: $|x|+|y|<1$, т. е. на Γ_-: $|x|+|y|=1-\delta$, $\delta \to +0$.

Интерес к таким свойствам обусловлен тем, что с их помощью можно получить новые формулы приведения и соотношения для функции Аппеля F_2, которые находят применение в ряде задач математической физики [17–19]. Область сходимости всех двойных степенных рядов, которые даны ниже, исследуется по методу Горна [1, с. 221].

Все основные обозначения стандартны [1, 20, 21], например, символ Похгаммера и действия с ним:

$$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a), \quad (a)_0 = 1, \quad (a)_{-n} = (-1)^n/(1-a)_n,$$
$$(a-n)_m = (1-a)_n(a)_m/(1-a-m)_n, \quad (a)_{m+n} = (a)_m(a+m)_n,$$
$$(a)_{m-n} = (-1)^n(a)_m/(1-a-m)_n, \quad (a-n)_n = (-1)^n(1-a)_n;$$

символ $\Gamma\begin{bmatrix} a_1,\dots,a_n \\ b_1,\dots,b_m \end{bmatrix} = \Gamma(a_1)\dots\Gamma(a_n)/(\Gamma(b_1)\dots\Gamma(b_m))$ и т.д.

§ 2. Вспомогательные сведения

Здесь кратко изложена вспомогательная информация, необходимая для последующего изложения.

2.1. Функции П. Аппеля F_2 и F_3

1°. Согласно [20] функции Аппеля $F_2(x,y)$ и $F_3(x,y)$ определяются в виде двойных степенных рядов гипергеометрического типа:

$$F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} \beta,\beta' \\ \gamma,\gamma' \end{matrix} \,\middle|\, x,y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n(1)_m(1)_n} x^m y^n =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m(1)_m} x^m \, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha+m,\beta' \\ \gamma' \end{matrix} \,\middle|\, y\right), \tag{1}$$

$$F_3\left(\begin{matrix} - \\ \gamma \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha,\alpha';\beta,\beta' \\ -\ -\ -\ - \end{matrix} \,\middle|\, x,y\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}(1)_m(1)_n} x^m y^n =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m(1)_m} x^m \, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha',\beta' \\ \gamma+m \end{matrix} \,\middle|\, y\right), \tag{2}$$

где $\gamma,\gamma' \neq 0,-1,-2,\dots,$ ${}_2F_1$ — функция Гаусса.

Эти ряды абсолютно сходятся соответственно внутри областей D_2: $|x|+|y|<1$ и D_3: $|x|<1$, $|y|<1$.

Как видно, ряды (1) и (2) симметричны относительно замены

$$\begin{aligned} &(F_2) \quad x \leftrightarrow y, \quad \beta \leftrightarrow \beta', \quad \gamma \leftrightarrow \gamma'; \\ &(F_3) \quad x \leftrightarrow y, \quad \alpha \leftrightarrow \alpha', \quad \beta \leftrightarrow \beta'. \end{aligned} \tag{3}$$

2°. Функция Аппеля F_2 может быть также представлена в виде следующих интегралов:

интеграл Лапласа–Эрдейи [1, 22]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\alpha-1} {}_1F_1\left(\begin{matrix}\beta \\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\, x_1 t\right) {}_1F_1\left(\begin{matrix}\beta' \\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\, x_2 t\right) dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix}\beta, \beta' \\ \gamma, \gamma'\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right), \tag{4}$$

где $x = x_1/\lambda$, $y = x_2/\lambda$, $\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, ${}_1F_1$ — функция Куммера;

контурный интеграл Меллина–Бернса [10, 20]

$$F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix}\beta, \beta' \\ \gamma, \gamma'\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \Gamma\left[\begin{matrix}\gamma' \\ \alpha, \beta'\end{matrix}\right] \int_{-k-i\infty}^{-k+i\infty} \Gamma\left[\begin{matrix}\alpha+t, \beta'+t, -t \\ \gamma+t\end{matrix}\right] {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+t, \beta \\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\, x\right) (-y)^t \, dt, \tag{5}$$

где контур в t-плоскости параллелен мнимой оси, там, где необходимо, вычеты исключены так, чтобы полюсы выражения $\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta'+t)$ лежали на левой стороне контура, а полюсы $\Gamma(-t)$ — на его правой стороне.

Здесь функция Гаусса определяется в виде [10], [23, с. 93]

$$\Gamma\left[\begin{matrix}c-a, c-b, a, b \\ c\end{matrix}\right] {}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b \\ c\end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l-i\infty}^{-l+i\infty} \Gamma[a+s, b+s, c-a-b-s, -s](1-z)^s \, ds, \tag{6}$$

где $|1-z| < 1$, $|\arg(1-z)| < 2\pi$ и полюсы выражения $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ лежат слева, а полюсы выражения $\Gamma(c-a-b-s)\Gamma(-s)$ лежат справа на контуре в s-плоскости.

Подобные контурные интегралы вычисляются с помощью леммы Бернса [23, с. 91]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-m-i\infty}^{-m+i\infty} \Gamma[\alpha+u, \beta+u, \gamma-u, \delta-u] \, du = \Gamma\left[\begin{matrix}\alpha+\gamma, \alpha+\delta, \beta+\gamma, \beta+\delta \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta\end{matrix}\right], \tag{7}$$

где путь интегрирования искривлен так, что полюсы выражения $\Gamma(\gamma–u)\Gamma(\delta–u)$ лежат справа от него, а полюсы выражения $\Gamma(\alpha+u)\Gamma(\beta+u)$ — слева (предполагается, что параметры α, β, γ, δ таковы, что полюсы этих выражений не совпадают).

3°. Преобразования П. Аппеля для функций F_2 и F_3 [1, 20]:

$$F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix}\beta, \beta'\\ \gamma, \gamma'\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) = (1-x)^{-\alpha} F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix}\gamma-\beta, \beta'\\ \gamma, \gamma'\end{matrix} \,\middle|\, \frac{x}{x-1}, \frac{y}{1-x}\right) =$$
$$= (1-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix}\beta, \gamma'-\beta'\\ \gamma, \gamma'\end{matrix} \,\middle|\, \frac{x}{1-y}, \frac{y}{y-1}\right) =$$
$$= (1-x-y)^{-\alpha} F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix}\gamma-\beta, \gamma'-\beta'\\ \gamma, \gamma'\end{matrix} \,\middle|\, \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right); \tag{8}$$

$$F_3\left(\begin{matrix}-\\ \gamma\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha, \alpha'; \beta, \beta'\\ -\ -\ -\ -\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) = \sum (-x)^\lambda (-y)^\mu \, \Gamma \begin{bmatrix}\gamma, \rho-\lambda, \sigma-\mu\\ \rho, \sigma, \gamma-\lambda-\mu\end{bmatrix} \times$$
$$\times F_2\left(\lambda+\mu+1-\gamma \,\middle|\, \begin{matrix}\lambda, \mu\\ \lambda+1-\rho, \mu+1-\sigma\end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \tag{9}$$

здесь сумма состоит из четырех слагаемых, в которых (формальные) параметры $(\lambda, \mu, \rho, \sigma)$ заменяются соответственно на параметры $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$, $(\alpha, \beta', \beta, \alpha')$, $(\beta, \alpha', \alpha, \beta')$ и $(\beta, \beta', \alpha, \alpha')$.

4°. Для функции Аппеля F_2 имеют место:

формула приведения [1, с. 231]

$$F_2\left(\gamma \,\middle|\, \begin{matrix}\beta, \beta'\\ \gamma, \gamma\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) = {}_1F_0\left(\begin{matrix}\beta\\ -\end{matrix} \,\middle|\, x\right) {}_1F_0\left(\begin{matrix}\beta'\\ -\end{matrix} \,\middle|\, y\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta, \beta'\\ \gamma\end{matrix} \,\middle|\, \frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right) \tag{10}$$

и рекуррентные соотношения [15, с. 16]

$$F_2\left(c+j \,\middle|\, \begin{matrix}a, a'\\ c, c+p\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) =$$
$$= \frac{(c)_p}{y^p (c+j-p)_p} \sum_{m=0}^{p} (-1)^m C_p^m F_2\left(c+j-p \,\middle|\, \begin{matrix}a, a'-m\\ c, c\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right), \tag{11}$$

где $C_p^m = p!/(m!(p-m)!)$, $\operatorname{Re}(c+j-p) > 0$, $p \geqslant 1$;

$$y(c+\sigma-1) F_2\left(c+\sigma \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha, \beta\\ c, c\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) =$$
$$= \beta F_2\left(c+\sigma-1 \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha, \beta+1\\ c, c\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) + (c-2\beta) F_2\left(c+\sigma-1 \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha, \beta\\ c, c\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) +$$
$$+ (\beta-c) F_2\left(c+\sigma-1 \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha, \beta-1\\ c, c\end{matrix} \,\middle|\, x, y\right), \tag{12}$$

где $\sigma \geqslant 1$ целое, $\operatorname{Re}(c+\sigma-1) > 0$.

Последние две формулы связаны с элементарными соотношениями для смежных функций Куммера [1, 15]

$${}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\ c\end{matrix} \,\middle|\, z\right) = {}_1F_1\left(\begin{matrix}a+1\\ c\end{matrix} \,\middle|\, z\right) - \frac{z}{c}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix}a+1\\ c+1\end{matrix} \,\middle|\, z\right),$$

$$\frac{z^p}{(c+1-p)_p}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a+1\\c+1\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\sum_{m=0}^{p}(-1)^m C_p^m\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a+1-m\\c+1-p\end{matrix}\,\middle|\,z\right);$$

$$a\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a+1\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=(c-a)\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a-1\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)+(z+2a-c)\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right).$$

2.2. Функции П. Олссона F_P и F_{PR}

Согласно [5, с. 190] первая функция Олссона $F_P(x,y)$ определяется в виде интеграла Лапласа

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}b_1\\c_1\end{matrix}\middle|xt\right)\Psi\left(\begin{matrix}b_2\\c_2\end{matrix}\middle|yt\right)dt=\Gamma\left[\begin{matrix}a,a-c_2+1\\a+b_2-c_2+1\end{matrix}\right]F_P(a,b_1,b_2,c_1,c_2;x,y),$$

где $\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}(a-c_2+1)>0$, $c_1,c_2\neq 0,-1,-2,\ldots,$

$$\Psi\left(\begin{matrix}b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=\Gamma\left[\begin{matrix}1-c\\b-c+1\end{matrix}\right]{}_1F_1\left(\begin{matrix}b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)+\Gamma\left[\begin{matrix}c-1\\b\end{matrix}\right]z^{1-c}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}b-c+1\\2-c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)$$

есть функция Трикоми [1, с. 245], $c\notin\mathbb{Z}$.

Функция F_P представляется также в виде гипергеометрического ряда [5, с. 188]

$$\begin{aligned}&F_P(a,b_1,b_2,c_1,c_2;x,y)=\\&\quad=y^{-a}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(a-c_2+1)_{m+n}(b_1)_m}{(a+b_2-c_2+1)_{m+n}(c_1)_m(1)_m(1)_n}\left(\frac{x}{y}\right)^m\left(\frac{y-1}{y}\right)^n=\\&\quad=y^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(a-c_2+1)_m(b_1)_m}{(a+b_2-c_2+1)_m(c_1)_m(1)_m}\left(\frac{x}{y}\right)^m\times\\&\quad\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+m,a-c_2+1+m\\a+b_2-c_2+1+m\end{matrix}\,\middle|\,\frac{y-1}{y}\right),\end{aligned}\tag{13}$$

который абсолютно сходится в области $D_P\colon\ \left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y-1}{y}\right|<1$.

Вторая функция Олссона F_{PR} определяется в виде ряда [6, с. 465]

$$\begin{aligned}&F_{PR}(a,b_1,b_2,c_1,c_2;x,y)=\\&\quad=x^{-b_1}y^{-b_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(b_1)_m(b_2)_n(b_2-c_2+1)_n}{(a+b_2-c_2+1)_n(1)_m(1)_n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^m\left(\frac{y-1}{y}\right)^n\times\\&\quad\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b_1+m,a-c_2+1\\c_1,a+b_2-c_2+1+n\end{matrix}\,\middle|\,1-0\right),\end{aligned}\tag{14}$$

где $\operatorname{Re}(c_1-b_1+b_2-a+n-m)>0$ и область сходимости $D_{PR}\colon\ \left|\frac{x-1}{x}\right|<1$, $\left|\frac{y-1}{y}\right|<1$.

Замечание. Здесь функция Клаузена ${}_3F_2(1)$ в общем случае не суммируема, как функция Гаусса ${}_2F_1(1)$, кроме специальных случаев, когда ее параметры удовлетворяют, например, условиям Заальшютца, Диксона, Ватсона, Уиппла, Дуггола и т.д. [1, с. 188]. Именно поэтому, как отмечает Ю. Люк [24, с. 190], ряды вида (1.14) «не принадлежат к гипергеометрическому типу».

2.3. Функции В. Гаргаро и Д. Онли Q_1 и Q_2

Согласно [11, 12] эти функции определяются в виде гипергеометрических рядов

$$Q_1(a,b,c,d,e;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}(c)_m}{(d)_{m+n}(e)_m(1)_m(1)_n} x^m y^n, \tag{15}$$

$$Q_2(a,b,c,d,e;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m(b)_m(c)_{m-n}}{(d)_{m-n}(e)_{m-n}(1)_m(1)_n} x^m y^n, \tag{16}$$

которые абсолютно сходятся соответственно в областях $D_{Q_1}\colon\ |x|+|y|<1$ и $D_{Q_2}\colon\ \left|\left|\frac{1}{x}\right|-|y|\right|>1$.

2.4. Преобразования для функций Гаусса и Куммера

Согласно [1] имеют место формулы:

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right) &= {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,c-b\\c\end{matrix}\,\middle|\,1\right)(-z)^{-a}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,1+a-c\\1+a-b\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z}\right)+\\ &+{}_2F_1\left(\begin{matrix}b,c-a\\c\end{matrix}\,\middle|\,1\right)(-z)^{-b}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}b,1+b-c\\1+b-a\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{z}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

где $|z|>1$, $|\arg(-z)|<\pi$, $a-b\notin\mathbb{Z}$;

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\,1\right) = \Gamma\begin{bmatrix}c,c-a-b\\c-a,c-b\end{bmatrix}, \tag{18}$$

где $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$, $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$;

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}-a,b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right) = (1-z)^a\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-a,c-b\\c\end{matrix}\,\middle|\,\frac{z}{z-1}\right); \tag{19}$$

$${}_1F_1\left(\begin{matrix}b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right) = \Gamma\begin{bmatrix}c\\c-b\end{bmatrix}e^{i\pi b\varepsilon}\Psi\left(\begin{matrix}b\\c\end{matrix}\,\middle|\,z\right)+\Gamma\begin{bmatrix}c\\b\end{bmatrix}e^{i\pi(b-c)\varepsilon}e^z\Psi\left(\begin{matrix}c-b\\c\end{matrix}\,\middle|\,-z\right), \tag{20}$$

где Ψ — функция Трикоми, $\varepsilon=\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}z)$, $c\notin\mathbb{Z}$.

2.5. Обычные интегралы типа Эйлера для функций ${}_1F_1$, ${}_2F_1$ и ${}_3F_2$

Согласно [21, с. 32] имеют место формулы:

$$ {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \Gamma\begin{bmatrix} c \\ a, c-a \end{bmatrix} \int\limits_0^1 e^{zt} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} dt, \tag{21} $$

где $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, a > 0$;

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \Gamma\begin{bmatrix} c \\ b, c-b \end{bmatrix} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt, \tag{22} $$

где $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$;

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix} \middle| z\right) = \Gamma\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1, b_1-a_1 \end{bmatrix} \int\limits_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{b_1-a_1-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a_2, a_3 \\ b_2 \end{matrix} \middle| zt\right) dt, \tag{23} $$

где $\mathrm{Re}\, b_1 > \mathrm{Re}\, a_1 > 0$.

§ 3. Некоторые известные представления для аналитического продолжения ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в окрестности особой точки $(1,1)$

Рассмотрим здесь кратко, придерживаясь хронологии, четыре совершенно разных подхода к получению представлений ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в $O(C_0)$ — окрестности особой точки $C_0(1,1)$ (в виде открытого круга с радиусом $\delta \to +0$).

3.1. Формула П. Олссона (1965)

По-видимому, П. Олссон впервые рассмотрел вопрос об аналитическом продолжении ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в $O(C_0)$ [2–9], исходя из интегрального преобразования Лапласа–Эрдейи (4), где одна из функций Куммера представляется в виде (20). Тогда следует представление [5, с. 191]

$$ \begin{aligned} F_2\left(a \middle| \begin{matrix} b_1, b_2 \\ c_1, c_2 \end{matrix} \middle| x, y\right) &= \Gamma\begin{bmatrix} c_2, a-c_2+1 \\ c_2-b_2, a+b_2-c_2+1 \end{bmatrix} e^{i\pi b_2 \varepsilon} F_p(a, b_1, b_2, c_1, c_2; x, y) + \\ &+ \Gamma\begin{bmatrix} c_2, a-c_2+1 \\ b_2, a-b_2+1 \end{bmatrix} e^{i\pi(b_2-c_2)\varepsilon}(1-x-y)^{-a} \times \\ &\times F_p\left(a, c_1-b_1, c_2-b_2, c_1, c_2; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right), \end{aligned} \tag{24} $$

где F_p — функция Олссона, определенная в (13), $\varepsilon = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, y)$.

Как видно из (24), чтобы получить аналитическое продолжение ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в $O(C_0)$, необходимо найти его для двух функций Олссона. Согласно [6] в этом случае имеет место представление

$$F_p(a,b_1,b_2,c_1,c_2;x,y) = F_{PR}(a,b_1,b_2,c_1,c_2;x,y) + C_p \cdot u(x,y), \tag{25}$$

где F_{PR} — функция Олссона, определенная в (14),

$$\begin{gathered} C_p = \Gamma\begin{bmatrix} c_1, a+b_2-c_2+1, a+b_1-c_1-b_2 \\ a, b_1, a-c_2+1 \end{bmatrix}, \\ u(x,y) = x^{b_1-c_1} y^{-b_2} (1-x)^{c_1-b_1+b_2-a} \times \\ \times F_3\left(\begin{matrix} - \\ c_1-b_1+b_2-a+1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} c_1-b_1, b_2; 1-b_1, b_2-c_2+1 \\ - \quad - \quad - \quad - \end{matrix} \,\middle|\, \frac{x-1}{x}, \frac{1-x}{y} \right); \end{gathered} \tag{26}$$

здесь для функции Аппеля F_3 область D: $\left|\frac{x-1}{x}\right| < 1$, $\left|\frac{1-x}{y}\right| < 1$, а все аргументы гамма-функций в коэффициенте C_p должны быть такими, чтобы все $\Gamma(\cdot)$ имели смысл.

3.2. Формула Г. Хейне (1969)

Вторая формула аналитического продолжения ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в $O(C_0)$ была получена Г. Хейне [10] с использованием интегрального преобразования Меллина–Бернса (5). С учетом формул (6) и (7) выводится представление

$$\begin{aligned} &F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} \beta, \beta' \\ \gamma, \gamma' \end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) = \\ &= \Gamma\begin{bmatrix} \gamma, \gamma', \gamma-\beta-\gamma'+\beta', \gamma'-\beta'-\alpha+\beta \\ \beta', \gamma-\beta, \gamma'-\beta'+\beta, \gamma-\alpha \end{bmatrix} e^{i\pi(\alpha+\beta'-\gamma')\varepsilon} \times \\ &\times \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\alpha+1-\gamma)_n}{(\gamma'-\beta'+\beta)_m(\alpha+1-\gamma'+\beta'-\beta)_n(1)_m(1)_n}(1-x)^m(1-y)^n \times \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} \alpha+1-\gamma+\beta-\beta'+m, \gamma'-\beta'-\alpha+\beta-n, \gamma'-\beta' \\ \gamma'-\beta'+\beta+m, 1-\gamma+\beta+\gamma'-\beta' \end{matrix} \,\middle|\, 1-0 \right) + \\ &+ \Gamma\begin{bmatrix} \gamma, \gamma', \alpha-\gamma'+\beta'-\beta \\ \alpha, \beta', \gamma-\beta \end{bmatrix} e^{i\pi(\alpha+\beta'-\gamma')\varepsilon} (y-1)^{\gamma'-\beta'-\alpha+\beta} \times \\ &\times \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\gamma'-\beta'+\beta+m)_n(\beta)_m(1-\gamma+\beta+\gamma'-\beta')_n}{(1+\gamma'-\beta'-\alpha+\beta)_n(1)_m(1)_n}(1-x)^m(1-y)^n \times \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, \alpha+1-\gamma+\beta-\beta'+m, \gamma'-\beta' \\ \gamma'-\beta'+\beta+m, 1-\gamma+\beta+\gamma'-\beta' \end{matrix} \,\middle|\, 1-0 \right) + \\ &+ \text{ два аналогичных слагаемых с учетом свойства (3)} \\ &\quad \text{(и замены } m \leftrightarrow n\text{) для } F_2(x,y); \end{aligned} \tag{27}$$

здесь $\varepsilon = \pm 1$ соответствует совпадению знаков $\operatorname{Im} x \gtrless 0$ и $\operatorname{Im} y \gtrless 0$.

Заметим, что двойные степенные ряды в (27) не являются гипергеометрическими (в обычном смысле по Горну [1]), т. к. их члены содержат функцию Клаузена ${}_3F_2(1)$, которая не суммируема в общем случае (как было указано выше).

3.3. Формула В. Гаргаро и Д. Онли (1971)

Третья формула аналитического продолжения ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в $O(C_0)$ была получена В. Гаргаро и Д. Онли [11, 12] с использованием интегрального преобразования Лапласа–Эрдейи (4), где одна из функций Куммера представляется в виде эйлеровского интеграла (21). С учетом формул (22) и (23) выводится представление [12, с. 1043]

$$\begin{aligned}
&F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) = \\
&\quad = \Gamma\begin{bmatrix} b_2, a_2-\alpha \\ a_2, b_2-\alpha \end{bmatrix} (-y)^{-\alpha} Q_1\left(\alpha, 1-b_2+\alpha, a_1, 1-a_2+\alpha, b_1; \frac{1}{y}, \frac{-x}{y}\right) + \\
&\quad + \Gamma\begin{bmatrix} b_1, b_2, \alpha-a_2, a_1+a_2-\alpha \\ \alpha, a_1, b_2-a_2, b_1+a_2-\alpha \end{bmatrix} \times \\
&\quad \times Q_2\left(a_2, 1-b_2+a_2, a_1+a_2-\alpha, 1-\alpha+a_2, b_1+a_2-\alpha; \frac{-x}{y}, \frac{1}{x}\right) + \\
&\quad + \Gamma\begin{bmatrix} b_1, b_2, \alpha-a_1-a_2 \\ \alpha, b_1-a_1, b_2-a_2 \end{bmatrix} (-x)^{-a_1}(-y)^{-a_2} \times \\
&\quad \times F_3\left(\begin{matrix} - \\ 1+a_1+a_2-\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, a_2; 1-b_1+a_1, 1-b_2+a_2 \\ -\ \ - \qquad - \qquad\quad - \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),
\end{aligned} \tag{28}$$

где Q_1 и Q_2 — функции Гаргаро и Онли, определенные в (15) и (16).

3.4. Формула К. Сада и Л. Райта (1976)

Четвертая формула аналитического продолжения ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в $O(C_0)$ была получена К. Садом и Л. Райтом [13], которые исходили из интегрального преобразования Лапласа–Эрдейи (4). С учетом формул (8) и (9) выводится представление

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma[b_1, b_2, \alpha-a_1-a_2]} F_2\left(1+a_1+a_2-\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{matrix} \,\middle|\, x, y\right) = \\
&\quad = A \cdot F_3\left(\begin{matrix} - \\ \alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, a_2; 1+a_1-b_1, 1+a_2-b_2 \\ -\ \ - \qquad - \qquad\quad - \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) + \\
&\quad + B \cdot F_3\left(\begin{matrix} - \\ b_2-2a_2+\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, b_2-a_2; 1+a_1-b_1, 1-a_2 \\ -\quad - \qquad - \qquad\quad - \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1-y}{x}, \frac{y-1}{y}\right) +
\end{aligned}$$

$$+ C \cdot F_3\left(\begin{matrix} - \\ b_1 - 2a_1 + \alpha \end{matrix}\,\middle|\, \begin{matrix} a_2, b_1 - a_1; 1 + a_2 - b_2, 1 - a_1 \\ - \quad - \quad - \quad - \end{matrix}\,\middle|\, \frac{1-x}{y}, \frac{x-1}{x}\right) +$$
$$+ D \cdot F_3\left(\begin{matrix} - \\ b_1 + b_2 - 2a_1 - 2a_2 + \alpha \end{matrix}\,\middle|\, \begin{matrix} b_1 - a_1, b_2 - a_2; 1 - a_1, 1 - a_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \end{matrix}\,\middle|\, \frac{x+y-1}{x}, \frac{x+y-1}{y}\right), \tag{29}$$

где

$A = x^{-a_1} y^{-a_2} / \Gamma[b_1 - a_1, b_2 - a_2, \alpha]$,

$B = x^{-a_1} (-y)^{a_2 - b_2} (1-y)^{\alpha - 2a_2 + b_2 - 1} / \Gamma[b_1 - a_1, a_2, b_2 - 2a_2 + \alpha]$,

$C = (-x)^{a_1 - b_1} y^{-a_2} (1-x)^{\alpha - 2a_1 + b_1 - 1} / \Gamma[b_2 - a_2, a_1, b_1 - 2a_1 + \alpha]$,

$D = (-x)^{a_1 - b_1} (-y)^{a_2 - b_2} (1-x-y)^{\alpha + b_1 + b_2 - 2a_1 - 2a_2} / \Gamma[a_1, a_2, b_1 + b_2 - 2a_1 - 2a_2 + \alpha]$.

Эта формула по существу является «обращением» преобразования Аппеля (9).

§ 4. Зеркальная симметрия функций Аппеля F_2 и Клаузена ${}_3F_2$ с единичным значением аргументов

Исходя из (4), рассмотрим интеграл

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-z} z^{c+j-1}\, {}_1F_1^2\left(\begin{matrix} -a \\ c \end{matrix}\,\middle|\, z\right) dz = \Gamma(c+j) F_2\left(c+j\,\middle|\, \begin{matrix} -a, -a \\ c, c \end{matrix}\,\middle|\, 1, 1\right), \tag{30}$$

где $\mathrm{Re}(c+j) > 0$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 0$ целое.

Заменим здесь одну из функций Куммера ее выражением через контурный интеграл Похгаммера [1, с. 259]

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} -a \\ c \end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \frac{i}{2\pi} \frac{(1)_a}{(c)_a} \oint_L e^{zt} (-t)^{-a-1} (1-t)^{c+a-1} dt, \tag{31}$$

где интегрирование идет вдоль контура L, который начинается в точке $t = 1$, обходит начало координат в положительном направлении и возвращается в исходную точку. При этом предполагается, что все особые точки подынтегральной функции, кроме $t = 0$, лежат вне контура L. Все степени в (31) понимаются в смысле главного значения.

Поскольку интеграл (30), с учетом (31), сходится абсолютно и равномерно (при указанных условиях), то можно изменить в нем порядок интегрирования. Используя затем преобразование Лапласа для функции Гаусса

$$\int_0^\infty e^{-zk} z^{q-1}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\,\middle|\, \omega z\right) dz = \frac{\Gamma(q)}{k^q}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, q \\ \beta \end{matrix}\,\middle|\, \frac{\omega}{k}\right),$$

где $\operatorname{Re} q > 0$, $k > 0$, $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$, получаем

$$I_2 = \frac{i}{2\pi}\frac{(1)_a}{(c)_a}\Gamma(c+j)\oint\limits_L (-t)^{-a-1}(1-t)^{a-j-1}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-a, c+j\\ c\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{1-t}\right)dt.$$

Если в последнем интеграле сначала над функцией Гаусса совершить преобразование Эйлера (19) и затем представить ее в виде ряда, то имеем

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\frac{(1)_a}{(c)_a}\Gamma(c+j)\sum_{n=0}^{a}\frac{(-a)_n(-j)_n}{(c)_n(1)_n}\oint\limits_L (1-t)^{-j-1}t^{-n-1}dt.$$

Полагая здесь $\gamma = -n - j$, последний интеграл находим из (31) при $z \to 0$:

$$\oint\limits_L (1-t)^{\gamma+n-1}t^{-n-1}dt = 2\pi i\frac{(\gamma)_n}{(1)_n}(-1)^n \lim_{z\to 0}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\,z\right) = 2\pi i\frac{(1+j)_n}{(1)_n}.$$

Таким образом, интеграл типа (30) сводится к интегральному представлению функции Клаузена с единичным аргументом через контурный интеграл Похгаммера

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\frac{(1)_a}{(c)_a}\Gamma(c+j)\oint\limits_L (1-t)^{-j-1}t^{-1}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-a, -j\\ c\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{t}\right)dt =$$
$$= \frac{(1)_a}{(c)_a}\Gamma(c+j){}_3F_2\left(\begin{matrix}-a, -j, j+1\\ c, 1\end{matrix}\,\middle|\,1\right). \quad (32)$$

Сравнивая (30) и (32), получаем утверждение [15, 16].

Теорема 1. *Функции Аппеля $F_2(1, 1)$ и Клаузена ${}_3F_2(1)$ обладают свойством зеркальной симметрии относительно центра $j_0 = -1/2$ при замене $j \mapsto -j-1$, $j \in \mathbb{Z}$:*

$$F_2\left(c+j\,\middle|\,\begin{matrix}-a, -a\\ c, c\end{matrix}\,\middle|\,1, 1\right) = F_2\left(c-j-1\,\middle|\,\begin{matrix}-a, -a\\ c, c\end{matrix}\,\middle|\,1, 1\right) =$$
$$= \frac{(1)_a}{(c)_a}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-a, -j, j+1\\ c, 1\end{matrix}\,\middle|\,1\right), \quad (33)$$

где $\operatorname{Re}(c+j) > 0$, $\operatorname{Re}(c-j-1) > 0$.

Следствие 1. *В точке центра симметрии $j_0 = -1/2$ имеет место формула приведения*

$$F_2\left(c-\frac{1}{2}\,\middle|\,\begin{matrix}-a, -a\\ c, c\end{matrix}\,\middle|\,1, 1\right) = \frac{(1)_a}{(c)_a}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\\ c, 1\end{matrix}\,\middle|\,1\right),$$

где $\operatorname{Re}(c-\frac{1}{2}) > 0$, $0 < {}_3F_2(1) \leqslant 1$ (*по теореме Лейбница*).

§ 5. Представления для функций Аппеля $F_2(1,1)$ и $F_3(1,1)$ и их взаимосвязь

Покажем теперь, что предельное значение функции Аппеля $F_2(x,y)$ в особой точке $(1,1)$ может быть получено, если исходить из представлений ряда Аппеля $F_2(x,y)$ в окрестности $O(C_0)$, которые даются формулами П. Олссона, Г. Хейне, В. Гаргаро–Д. Онли и К. Сада–Л. Райта из § 3. Все эти формулы при определенном наборе их параметров (имеющих физический смысл) точно совпадают (в пределе $x \to 1 \mp 0$, $y \to 1 \pm 0$) с формулой (33) [15, 16].

Нам будет необходима следующая вспомогательная

Лемма 1. *Для функции Клаузена ${}_3F_2(1)$ справедливы соотношения:*

$$
{}_3F_2\left(\begin{matrix}-a,-j,j+1\\ c,1\end{matrix}\,\middle|\,1\right) = (-1)^j\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}c+a,-j,j+1\\ c,1\end{matrix}\,\middle|\,1\right) = \frac{(-j)_a}{(1)_a}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-a,c+j,j+1\\ c,j+1-a\end{matrix}\,\middle|\,1\right), \quad (34)
$$

где $c, j+1-a \neq 0,-1,-2,\ldots$.

Доказательство. Первое (второе) соотношение справа в (34) легко проверяется разложением в ряд функции Клаузена ${}_3F_2(1)$ по параметру $j \geqslant 0$ $(a \geqslant 0)$ и приравниванием их коэффициентов при $1/(c)_k$, где $k=\overline{0,j}$ $(k=\overline{0,a})$, соответствующим коэффициентам разложения в ряд функции Клаузена ${}_3F_2(1)$ слева.

Предельные значения для функции Аппеля $F_2(1,1)$, исходя из указанных выше в § 3 формул аналитического продолжения, будем рассматривать в окрестности «двухлучевая звезда» $U = O(C_0)\cap\Gamma$, где Γ: $x+y=2$, $x=1\mp\delta$, $0\leqslant\delta\leqslant 1$; тогда $\mathring{U} = U\setminus\{C_0\}$ — проколотая окрестность. В связи с этим введем обозначение

$$
\lim_{\delta\to+0} F_2\left(\alpha\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\mp\delta,\;1\pm\delta\right) = F_2\left(\alpha\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\mp 0,\;1\pm 0\right).
$$

5.1. Модификация формулы П. Олссона

Исходя из (24)–(26), получаем

$$
\begin{aligned}
F_2\left(a\,\middle|\,\begin{matrix}b_1,b_2\\ c_1,c_2\end{matrix}\,\middle|\,1-\delta,\;1+\delta\right) &= \\
&= {}_2F_1\left(\begin{matrix}b_2,2c_2-a-b_2-1\\ c_2\end{matrix}\,\middle|\,1\right)F_p(a,b_1,b_2,c_1,c_2;1-\delta,\;1+\delta) + \\
&+ {}_2F_1\left(\begin{matrix}c_2-b_2,c_2+b_2-a-1\\ c_2\end{matrix}\,\middle|\,1\right)(-1)^a F_p(a,c_1-b_1,c_2-b_2,c_1,c_2;1-\delta,\;1+\delta),
\end{aligned}
$$

где в (24) было принято $\varepsilon = 0$; выражение ${}_2F_1(1)$ дано в (18).

Учитывая (13), находим пределы:

$$\lim_{\delta\to+0} F_p(a,b_1,b_2,c_1,c_2;1-\delta,\,1+\delta) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b_1,1+a-c_2 \\ c_1,1+a+b_2-c_2\end{matrix}\,\middle|\, 1-0\right),$$

$$\lim_{\delta\to+0} F_p(a,c_1-b_1,c_2-b_2,c_1,c_2;1-\delta,\,1+\delta) =$$

$$= {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,c_1-b_1,1+a-c_2 \\ c_1,1+a-b_2\end{matrix}\,\middle|\, 1-0\right).$$

Отсюда следует

Теорема 2. *Имеет место представление*

$$\begin{aligned} &F_2\left(a\,\middle|\,\begin{matrix} b_1,b_2\\ c_1,c_2\end{matrix}\,\middle|\,1-0,1+0\right) = \\ &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} b_2,2c_2-a-b_2-1\\ c_2\end{matrix}\,\middle|\,1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b_1,1+a-c_2\\ c_1,1+a+b_2-c_2\end{matrix}\,\middle|\,1-0\right) + \\ &+ {}_2F_1\left(\begin{matrix} c_2-b_2,c_2+b_2-a-1\\ c_2\end{matrix}\,\middle|\,1\right)(-1)^a \times \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,c_1-b_1,1+a-c_2\\ c_1,1+a-b_2\end{matrix}\,\middle|\,1-0\right), \end{aligned} \tag{35}$$

где $\operatorname{Re} a>0$, $c_1,c_2,1+a-b_2,1+a+b_2-c_2\neq 0,-1,-2,\ldots$.

Если здесь сделать замену

$$a=c+j \text{ или } c-j-1,\quad b_1=b_2=-a,\quad c_1=c_2=c, \tag{36}$$

то следует формула приведения

$$F_2\left(c+j\,\middle|\,\begin{matrix}-a,-a\\ c,c\end{matrix}\,\middle|\,1,1\right) = \frac{(-j)_a}{(c)_a}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-a,c+j,j+1\\ c,j+1-a\end{matrix}\,\middle|\,1\right), \tag{37}$$

которая (если учесть лемму) сводится к формуле (33).

Заметим, что второе слагаемое в (35) с параметрами (36) обращается в нуль, т. к. ${}_2F_1(c+a,a-j-1;c;1)=0$ или ${}_2F_1(c+a,a+j;c;1)=0$ за счет $1/\Gamma(-a)=0$, $a\geqslant 0$ целое.

5.2. Модификация формулы Г. Хейне

Исходя из (27) с $\varepsilon=0$, получаем

$$\begin{aligned} &F_2\left(\alpha\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1-\delta,\,1+\delta\right) = \Gamma\left[\begin{matrix}\gamma,\gamma',\gamma-\beta-\gamma'+\beta',\gamma'-\beta'-\alpha+\beta\\ \beta',\gamma-\beta,\gamma'-\beta'+\beta,\gamma-\alpha\end{matrix}\right]\times \\ &\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\alpha+1-\gamma)_n\delta^m(-\delta)^n}{(\gamma'-\beta'+\beta)_m(\alpha+1-\gamma'+\beta'-\beta)_n(1)_m(1)_n}\times \\ &\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha+1-\gamma+\beta-\beta'+m,\gamma'-\beta'-\alpha+\beta-n,\gamma'-\beta'\\ \gamma'-\beta'+\beta+m,1-\gamma+\beta+\gamma'-\beta'\end{matrix}\,\middle|\,1-0\right)+ \end{aligned}$$

$$+\,\Gamma\left[\begin{matrix}\gamma,\gamma',\alpha-\gamma'+\beta'-\beta\\ \alpha,\beta',\gamma-\beta\end{matrix}\right]\delta^{\gamma'-\beta'-\alpha+\beta}\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\gamma'-\beta'+\beta+m)_n(\beta)_m(1-\gamma+\beta+\gamma'-\beta')_n}{(1+\gamma'-\beta'-\alpha+\beta)_n(1)_m(1)_n}\delta^m(-\delta)^n\times$$

$$\times\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}-n,\gamma'-\beta',1+\alpha-\gamma+\beta-\beta'+m\\ \gamma'-\beta'+\beta+m,1-\gamma+\beta+\gamma'-\beta'\end{matrix}\right|1-0\right),\qquad(38)$$

где $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}(\gamma'-\beta'-\alpha+\beta)>0$ (остальные параметры прежние).

Как видно из (38), при $\delta\to+0$ второе слагаемое обращается в нуль, а в первом слагаемом в двойной сумме остается только один член ($m=n=0$).

Отсюда следует

Теорема 3. *Имеет место представление*

$$F_2\left(\alpha\left|\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma'\end{matrix}\right|1-0,\,1+0\right)=\Gamma\left[\begin{matrix}\gamma,\gamma',\gamma-\beta-\gamma'+\beta',\gamma'-\beta'-\alpha+\beta\\ \beta',\gamma-\beta,\gamma'-\beta'+\beta,\gamma-\alpha\end{matrix}\right]\times$$

$$\times\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}\alpha+1-\gamma+\beta-\beta',\gamma'-\beta'-\alpha+\beta,\gamma'-\beta'\\ \gamma'-\beta'+\beta,1-\gamma+\beta+\gamma'-\beta'\end{matrix}\right|1-0\right),$$

где $\gamma'-\beta'+\beta,1-\gamma+\beta+\gamma'-\beta'\neq0,-1,-2,\ldots.$

Если здесь сделать замену $\alpha=c+j$ *или* $c-j-1$, $\beta=\beta'=-a$, $\gamma=\gamma'=c$, *то следует формула приведения*

$$F_2\left(c+j\left|\begin{matrix}-a,-a\\ c,c\end{matrix}\right|1,1\right)=\frac{(1)_a}{(c)_a}(-1)^j\,{}_3F_2\left(\left.\begin{matrix}c+a,-j,j+1\\ c,1\end{matrix}\right|1\right),$$

которая (если учесть лемму) сводится к формуле (33).

5.3. Модификация формулы В. Гаргаро и Д. Онли

Исходя из (28), получаем

$$F_2\left(\alpha\left|\begin{matrix}a_1,a_2\\ b_1,b_2\end{matrix}\right|1-\delta,\,1+\delta\right)={}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\alpha,b_2-a_2\\ b_2\end{matrix}\right|1\right)(-1-\delta)^{-\alpha}\times$$

$$\times\,Q_1\left(\alpha,1-b_2+\alpha,a_1,1-a_2+\alpha,b_1;\frac{1}{1+\delta},\frac{\delta-1}{1+\delta}\right)+$$

$$+\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\alpha-a_2,b_1-a_1\\ b_1\end{matrix}\right|1\right){}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}b_2-\alpha,a_2\\ b_2\end{matrix}\right|1\right)\times$$

$$\times\,Q_2\left(a_2,1-b_2+a_2,a_1+a_2-\alpha,1-\alpha+a_2,b_1+a_2-\alpha;\frac{\delta-1}{1+\delta},\frac{1}{1-\delta}\right)+$$

$$+\,\frac{(\alpha)_{-a_1-a_2}}{(b_1)_{-a_1}(b_2)_{-a_2}}(\delta-1)^{-a_1}(-1-\delta)^{-a_2}\times$$

$$\times\,F_3\left(\begin{matrix}-\\ 1+a_1+a_2-\alpha\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_1,a_2;1-b_1+a_1,1-b_2+a_2\\ -\;\;-\qquad\;-\qquad\;-\end{matrix}\right|\frac{1}{1-\delta},\frac{1}{1+\delta}\right),\qquad(39)$$

где $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $b_1, b_2, 1+a_1+a_2-\alpha \neq 0, -1, -2\ldots$ (остальные условия прежние).

Если здесь сделать замену

$$\alpha = c + j \text{ или } c - j - 1, \quad a_1 = a_2 = -a, \quad b_1 = b_2 = c,$$

то первые два слагаемых в (39) обращаются в нуль, т. к. ${}_2F_1(\alpha, c+a; c; 1) = 0$ и ${}_2F_1(\alpha + a, c + a; c; 1) = 0$ за счет $1/\Gamma(-a) = 0$, $a \geqslant 0$ целое.

Отсюда следует

Теорема 4. *Имеет место представление*

$$F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} -a, -a \\ c, c \end{matrix} \,\middle|\, 1-0,\, 1+0\right) =$$
$$= \frac{(\alpha)_{2a}}{(c)_a^2} F_3\left(\begin{matrix} - \\ 1-2a-\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -a, -a; 1-a-c, 1-a-c \\ - \quad - \quad - \quad - \end{matrix} \,\middle|\, 1+0,\, 1-0\right),$$

где $\alpha = c + j$ *или* $c - j - 1$, $j \in \mathbb{Z}$, $c, 1-2a-\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$.

5.4. Модификация формулы К. Сада и Л. Райта

Исходя из (28), получаем

$$F_2\left(1+a_1+a_2-\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{matrix} \,\middle|\, 1-\delta,\, 1+\delta\right) =$$
$$= \hat{A} \cdot F_3\left(\begin{matrix} - \\ \alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, a_2; 1+a_1-b_1, 1+a_2-b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{1-\delta}, \frac{1}{1+\delta}\right) +$$
$$+ \hat{B} \cdot F_3\left(\begin{matrix} - \\ b_2-2a_2+\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, b_2-a_2; 1+a_1-b_1, 1-a_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \end{matrix} \,\middle|\, \frac{-\delta}{1-\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right) +$$
$$+ \hat{C} \cdot F_3\left(\begin{matrix} - \\ b_1-2a_1+\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a_2, b_1-a_1; 1+a_2-b_2, 1-a_1 \\ - \quad - \quad - \quad - \end{matrix} \,\middle|\, \frac{\delta}{1+\delta}, \frac{-\delta}{1-\delta}\right) +$$
$$+ \hat{D} \cdot F_3\left(\begin{matrix} - \\ b_1+b_2-2a_1-2a_2+\alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} b_1-a_1, b_2-a_2; 1-a_1, 1-a_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{1-\delta}, \frac{1}{1+\delta}\right), \tag{40}$$

где

$$\hat{A} = (1-\delta)^{-a_1}(1+\delta)^{-a_2}\frac{(\alpha)_{-a_1-a_2}}{(b_1)_{-a_1}(b_2)_{-a_2}},$$

$$\hat{B} = (1-\delta)^{-a_1}(-1-\delta)^{a_2-b_2}(-\delta)^{\alpha-2a_2+b_2-1}\Gamma\begin{bmatrix} b_1, b_2, \alpha-a_1-a_2 \\ b_1-a_1, a_2, b_2-2a_2+\alpha \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = (1+\delta)^{-a_2}(-1+\delta)^{a_1-b_1}\delta^{\alpha-2a_1+b_1-1}\Gamma\begin{bmatrix} b_1, b_2, \alpha-a_1-a_2 \\ b_2-a_2, a_1, b_1-2a_1+\alpha \end{bmatrix},$$

$$\hat{D} = (\delta-1)^{a_1-b_1}(-1-\delta)^{a_2-b_2}(-1)^{\alpha+b_1+b_2-2a_1-2a_2}\Gamma\begin{bmatrix} b_1, b_2, \alpha-a_1-a_2 \\ a_1, a_2, b_1+b_2-2a_1-2a_2+\alpha \end{bmatrix},$$

здесь $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha - 2a_2 + b_2 - 1) > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha - 2a_1 + b_1 - 1) > 0$ (остальные условия прежние).

Как видно из (40), при $\delta \to +0$ коэффициенты $\hat{B}$ и $\hat{C}$ обращаются в нуль. Если здесь сделать замену

$$\alpha = 1 - 2a - c - j \text{ или } 2 - 2a - c + j, \quad a_1 = a_2 = -a, \quad b_1 = b_2 = c,$$

то коэффициент $\hat{D}$ также обращается в нуль за счет $1/\Gamma(-a) = 0$, $a \geqslant 0$ целое.

Отсюда следует

Теорема 5. *Имеет место представление*

$$F_2\left(1-2a-\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} -a,-a \\ c,c \end{matrix} \,\middle|\, 1-0,\, 1+0\right) = \\ = \frac{(\alpha)_{2a}}{(c)_a^2} F_3\left(\begin{matrix} - \\ \alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -a,-a; 1-a-c, 1-a-c \\ - \quad - \quad\quad - \quad\quad - \end{matrix} \,\middle|\, 1+0,\, 1-0\right),$$

где $\alpha = 1-2a-c-j$ *или* $2-2a-c+j$, $j \in \mathbb{Z}$, $c, \alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Две последние теоремы показывают, что функции Аппеля $F_2(1,1)$ и $F_3(1,1)$ взаимосвязаны. Отсюда следуют утверждения.

Теорема 6. *Функция Аппеля* $F_3(1,1)$, *как и* $F_2(1,1)$, *обладает свойством зеркальной симметрии относительно центра* $j_0 = -1/2$ *при замене* $j \mapsto -j-1$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$(1-2a-c-j)_{2a} F_3\left(\begin{matrix} - \\ 1-2a-c-j \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -a,-a; 1-a-c, 1-a-c \\ - \quad - \quad\quad - \quad\quad - \end{matrix} \,\middle|\, 1,1\right) = \\ = (2-2a-c+j)_{2a} F_3\left(\begin{matrix} - \\ 2-2a-c+j \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -a,-a; 1-a-c, 1-a-c \\ - \quad - \quad\quad - \quad\quad - \end{matrix} \,\middle|\, 1,1\right).$$

Теорема 7. *Справедлива формула приведения*

$$F_3\left(\begin{matrix} - \\ \alpha \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -a,-a; 1-a-c, 1-a-c \\ - \quad - \quad\quad - \quad\quad - \end{matrix} \,\middle|\, 1,1\right) = \frac{(1)_a (c)_a}{(\alpha)_{2a}} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -a,-j,j+1 \\ c,1 \end{matrix} \,\middle|\, 1\right),$$

где α *дано выше.*

§ 6. Точное аналитическое представление ряда Аппеля $F_2(x,y)$ вблизи границы его области сходимости

Сначала сформулируем основное утверждение (в нелогарифмическом случае) [15].

Теорема 8. *Имеет место представление для ряда Аппеля* $F_2(x,y)$ *вблизи границы* $\Gamma = \partial D_2$ *его области сходимости* D_2: $|x| + |y| < 1$, *т. е. на* Γ_-: $|x| + |y| = 1 - \delta$, $\delta \to +0$, $|x/y| < 1$:

$$F_2\left(\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} \beta,\beta' \\ \gamma,\gamma' \end{matrix} \,\middle|\, x,y\right)_{\Gamma_-} = E_1 + E_2 + E_3 \tag{41}$$

при условии $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha)>0$ *нецелое, в области*

$$D=(D_{E_1}\cap D_{E_2}\cap D_{E_3})\subset D_2,$$

где

$$E_1=y^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\right)Q_1\left(\alpha,1+\alpha-\gamma',\gamma-\beta,1+\alpha+\beta'-\gamma',\gamma;\frac{-x}{y},\frac{x+y-1}{y}\right) \tag{41'}$$

в области D_{E_1}: $\left|\frac{-x}{y}\right|+\left|\frac{x+y-1}{y}\right|<1$;

$$E_2=x^{\gamma'-\beta'-\alpha}y^{\beta'-\gamma'}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma'-\alpha,\gamma'-\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta,\alpha+\beta'-\gamma'\\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\times$$
$$\times Q_2\left(1-\beta',\gamma'-\beta',\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha,1+\gamma'-\beta'-\alpha,\gamma+\gamma'-\beta'-\alpha;\frac{-x}{y},\frac{1-x-y}{x}\right) \tag{41''}$$

в области D_{E_2}: $\left\|\frac{-y}{x}\right|-\left|\frac{1-x-y}{x}\right\|>1$;

$$E_3=x^{\beta-\gamma}y^{\beta'-\gamma'}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma'-\alpha,\gamma'-\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\beta,\gamma+\gamma'-\beta'-\alpha\\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\times$$
$$\times\,F_3\left(\begin{matrix}-\\ 1+\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1-\beta,1-\beta';\gamma-\beta,\gamma'-\beta'\\ -\quad-\quad-\quad-\end{matrix}\,\middle|\,\frac{x+y-1}{x},\frac{x+y-1}{y}\right) \tag{41'''}$$

в области D_{E_3}: $\left|\frac{x+y-1}{x}\right|<1$, $\left|\frac{x+y-1}{y}\right|<1$.

Доказательство. Применяя к ряду Аппеля $F_2(x,y)$ в (1) формулы (9) и (17), имеем

$$F_2\left(\alpha\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma'\end{matrix}\,\middle|\,x,y\right)=E_1+E_{23},$$

где

$$E_1=y^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\gamma-\beta)_m(1+\alpha-\gamma')_m}{(\gamma)_m(1+\alpha+\beta'-\gamma')_m(1)_m}\left(\frac{-x}{y}\right)^m\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+m,1+\alpha-\gamma'+m\\ 1+\alpha+\beta'-\gamma'+m\end{matrix}\,\middle|\,\frac{x+y-1}{y}\right),$$

что совпадает с правой частью в (41′); выражение E_{23} имеет вид

$$E_{23}=y^{\beta'-\gamma'}(1-x-y)^{\gamma'-\beta'-\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma'-\alpha,\gamma'-\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\beta')_n(\gamma'-\beta')_n}{(1+\gamma'-\beta'-\alpha)_n(1)_n}\left(\frac{x+y-1}{y}\right)^n\times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\beta,\alpha+\beta'-\gamma'-n\\ \gamma\end{matrix}\;\middle|\;\frac{x}{x+y-1}\right).$$

Если в последней сумме к ряду Гаусса вновь применить формулу (17), то получаем

$$E_{23}=E_2+E_3,$$

где выражение E_2 содержит $Q_2(x,y)$ — вторую функцию Гаргаро и Онли, а выражение E_3 — функцию Аппеля $F_3(x,y)$.

В самом деле, имеем

$$E_2=x^{\gamma'-\beta'-\alpha}y^{\beta'-\gamma'}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma'-\alpha,\gamma'-\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\;\middle|\;1\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta,\alpha+\beta'-\gamma'\\ \gamma\end{matrix}\;\middle|\;1\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\beta')_n(\gamma'-\beta')_n(\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha)_n}{(1+\gamma'-\beta'-\alpha)_n(\gamma+\gamma'-\beta'-\alpha)_n(1)_n}\left(\frac{-x}{y}\right)^n\times$$
$$\times\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+\beta'-\gamma'-n,1+\alpha+\beta'-\gamma-\gamma'-n\\ 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma-\gamma'-n\end{matrix}\;\middle|\;\frac{x+y-1}{x}\right),$$

что совпадает с правой частью в $(41'')$;

$$E_3=x^{\beta-\gamma}y^{\beta'-\gamma'}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma'-\alpha,\gamma'-\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\;\middle|\;1\right)\times$$
$$\times\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\beta,\gamma+\gamma'-\beta'-\alpha\\ \gamma\end{matrix}\;\middle|\;1\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\beta')_n(\gamma'-\beta')_n}{(1+\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha)_n(1)_n}\left(\frac{x+y-1}{y}\right)^n\times$$
$$\times\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\beta,1-\beta\\ 1+\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha+n\end{matrix}\;\middle|\;\frac{x+y-1}{x}\right),$$

что совпадает с правой частью в $(41''')$.

Замечание. Если $|y/x|<1$, то в (41) надо учесть свойство (3).

Эта теорема дает точное аналитическое представление для ряда Аппеля $F_2(x,y)$ на Γ_- по параметру $\delta=1-x-y\to+0$, $|x/y|<1$, через три других ряда гипергеометрического типа от двух переменных Q_1, Q_2 и F_3. Отсюда легко получаются асимптотические разложения ряда Аппеля $F_2(x,y)$ на Γ_- по порядку $O(\delta^k)$, $k\geqslant 1$.

Следствие 2. *Если в теореме 8 положить $\delta=0$, то имеем точное аналитическое представление для ряда Аппеля $F_2(x,y)$ на границе $\Gamma=D_2$: $|x|+|y|=1$:*

$$F_2\left(\alpha\;\middle|\;\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma'\end{matrix}\;\middle|\;x,y\right)\Bigg|_{\Gamma}=$$
$$=(1-x)^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\;\middle|\;1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\gamma-\beta,1+\alpha-\gamma'\\ \gamma,1+\alpha+\beta'-\gamma'\end{matrix}\;\middle|\;\frac{-x}{1-x}\right)+$$

$$+\, x^{\gamma'-\beta'-\alpha}(1-x)^{\beta'-\gamma'}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma'-\alpha,\gamma'-\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta,\alpha+\beta'-\gamma'\\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1-\beta',\gamma'-\beta',\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha\\ 1+\gamma'-\alpha-\beta',\gamma+\gamma'-\beta'-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,\frac{-x}{1-x}\right), \tag{42}$$

где $\left|\frac{-x}{1-x}\right|<1$, $0<x<\frac{1}{2}$ (остальные условия прежние).

Следствие 3. *Если в (42) положить $x=y=\frac{1}{2}$, то имеем представление*

$$F_2\left(\alpha\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma'\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2}-0,\,\frac{1}{2}+0\right)=$$
$$=2^{\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\gamma-\beta,1+\alpha-\gamma'\\ \gamma,1+\alpha+\beta'-\gamma'\end{matrix}\,\middle|\,-1+0\right)+$$
$$+\,2^{\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma'-\alpha,\gamma'-\beta'\\ \gamma'\end{matrix}\,\middle|\,1\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta,\alpha+\beta'-\gamma'\\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\times$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1-\beta',\gamma'-\beta',\gamma+\gamma'-\beta-\beta'-\alpha\\ 1+\gamma'-\beta'-\alpha,\gamma+\gamma'-\beta'-\alpha\end{matrix}\,\middle|\,-1+0\right), \tag{43}$$

где ряды Клаузена ${}_3F_2(-1+0)$ есть ряды типа Лейбница.

Замечание. Формулы (42) и (43) согласуются с аналогичными формулами (17) и (19) в [25], однако общая теорема 8 отлична от теоремы 1 в [25], где сохранен лишь первый порядок $O(\delta)$ асимптотического разложения ряда F_2 вблизи границы $\Gamma=\partial D_2$.

Используя формулы (10)–(12), из (42) и (43) можно легко получить многие формулы приведения и рекуррентные соотношения для ряда Аппеля $F_2(x,y)$ на границе Γ; например, имеем:

$$F_2\left(\gamma\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=2^{\beta+\beta'}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma\end{matrix}\,\middle|\,1\right),$$

$$\frac{\gamma}{2}F_2\left(\gamma+1\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\beta' F_2\left(\gamma\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'+1\\ \gamma,\gamma\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\,(\gamma-2\beta)F_2\left(\gamma\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'\\ \gamma,\gamma\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+(\beta-\gamma)F_2\left(\gamma\,\middle|\,\begin{matrix}\beta,\beta'-1\\ \gamma,\gamma\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Замечание. В работе [26], где использовалась функция Кампе–де Ферье $F^{2:1,1}_{1:1,1}(x,y)$, был получен только частный результат

$$F_2\left(\gamma\,\middle|\,\begin{matrix}-p,-q\\ \gamma,\gamma\end{matrix}\,\middle|\,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{(\gamma)_{p+q}}{2^{p+q}(\gamma)_p(\gamma)_q}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность Н. М. Матвееву за внимание и полезные обсуждения.

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. — М.: Наука, 1965.

[2] Olsson P. O. M. Solutions in a special case of the partial differential equations associated with the Appell function F_2 // Arkiv för Fysik. — 1964. — Band 25, No. 34. — P. 437–480.

[3] Olsson P. O. M. The Laplace transform of a product of two Whittaker functions // Arkiv för Fysik. — 1965. — Band 28, No. 11. — P. 113–120.

[4] Olsson P. O. M. Certain solutions of the partial differential equations associated with Appell's hypergeometric function F_2 // Arkiv för Fysik. — 1965. — Band 29, No. 20. — P. 285–291.

[5] Olsson P. O. M. A hypergeometric function of two variables of importance in perturbation theory. I // Arkiv för Fysik. — 1965. — Band 30, No. 14. — P. 187–191.

[6] Olsson P. O. M. A hypergeometric function of two variables of importance in perturbation theory. II // Arkiv för Fysik. — 1965. — Band 29, No. 38. — P. 459–465.

[7] Olsson P. O. M. A higher order solution of the partial differential equations associated with Appell's hypergeometric function $F_2(a, b_1, b_2, c_1, c_2; x_1, x_2)$ // Arkiv för Fysik. — 1967. — Band 33, No. 30. — P. 433–442.

[8] Almström H., Olsson P. O. M. Analytical properties of certain matrix elements // J. Math. Phys. — 1967. — V. 8. — P. 2013–2021.

[9] Olsson P. O. M. On the integration of the differential equations of five-parametric double-hypergeometric functions of second order // J. Math. Phys. — 1977. — V. 18, No. 6. — P. 1285–1294.

[10] Hahne G. E. Analytic continuation of Appell's hypergeometric series F_2 to the vicinity of the singular point $x = 1$, $y = 1$ // J. Math. Phys. — 1969. — V. 10, No. 3. — P. 524–531.

[11] Gargaro W. W., Onley D. S. Matrix elements of relativistic electrons in a Coulomb field // J. Math. Phys. — 1970. — V. 11, No. 4. — P. 1191–1197.

[12] Gargaro W. W., Onley D. S. Real and virtual radiation electron-nucleus scattering // Phys. Rev. C. — 1971. — V. 4, No. 4. — P. 1032–1043.

[13] Sud K., Wright L. E. A new analytic continuation of Appell's hypergeometric series F_2 // J. Math. Phys. — 1976. — V. 17, No. 9. — P. 1719–1721.

[14] Sud K., Wright L. E., Onley D. S. Radial integrals with finite energy loss for Dirac–Coulomb functions // J. Math. Phys. — 1976. — V. 17, No. 12. — P. 2175–2181.

[15] Тарасов В. Ф. Некоторые представления рядов функций Аппеля F_1 и F_2 вблизи границ их областей сходимости и в окрестности особой точки $(1, 1)$, свойство зеркальной симметрии функции Аппеля $F_3(1, 1)$ // Деп. в ВИНИТИ 5.4.91, № 1483–В91. — 61 с.

[16] Тарасов В. Ф. Зеркальная симметрия функций Аппеля F_2 и F_3 в особой точке $(1, 1)$ // Успехи мат. наук. — 1993. — Т. 48, № 3. — С. 203–204.

[17] Tarasov V. F. Hydrogenic Slater radial integrals with discrete parameters and their asymptotics // Modern Phys. Lett. B. — 1994. — V. 8, No. 23. — P. 1403–1416.

[18] Tarasov V. F. The generalization of Slater's and Marvin's integrals and their representations by means of Appell's functions $F_2(x,y)$ // Modern Phys. Lett. B. — 1994. — V. 8, No. 23. — P. 1417–1426.

[19] Tarasov V. F. Multipole matrix elements for DH-systems and their asymptotics // Int. J. Modern Phys. B. — 1995. — V. 9, No. 20. — P. 2699–2718.

[20] Appell P., Kampé de Fériet M. J. Functions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. — Paris: Gauthier–Villars, 1926.

[21] Exton H. Handbook of Hypergeometric Integrals. — Preston: Wiley, 1976.

[22] Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. —М.: ИЛ, 1963.

[23] Уиттекер Э. Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. — М.: Физматгиз, 1963.

[24] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. — М.: Мир, 1980.

[25] Нгуен Тхань Хай. Асимптотические разложения рядов F_2, G_1, G_2 и H_4 вблизи границ областей сходимости и их значения на границе // Известия АН БССР, серия физ.-матем. 1987. (Деп. в ВИНИТИ № 5355–В87. — 24 с.)

[26] Lal C. On the sum and reducible case of a certain Appell's function // Math. Stud. (India). — 1982. — V. 50. — P. 268–271.

Статья поступила в редакцию в апреле 1996 г.