МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 (1969), 619—625

УДК 517.5

ДОПУСТИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНОВ ПРИ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. Я. Хавинсон

Известные аппроксимационные теоремы Вейерштрасса и Лаврентьева дополняются указанием допустимых ограничений на величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов. Библ. 4 назв.

В работе [1] Дж. Стафни доказал следующую теорему, дополняющую классическую теорему Вейерштрасса:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $w(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$ — *последовательность положительных вещественных чисел, для которой*

$$\lim \sqrt[m]{w(m)} = \infty.$$

Для произвольной непрерывной на отрезке [0, 1] *функции* $f(x)$, $f(0) = 0$, *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *найдется такой многочлен*

$$Q(x) = \sum c_m x^m,$$

что

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - Q(x)| < \varepsilon \quad и \quad |c_m| < \varepsilon w(m).$$

В то же время в [1] замечено, что не всякую непрерывную функцию $f(x)$, $f(0) = 0$, можно равномерно аппроксимировать многочленами

$$Q(x) = \sum c_m x^m,$$

для которых

$$|c_m| \leqslant w(m),$$

если

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{w(m)} < +\infty.$$

Доказательство теоремы 1 в работе [1] получено из довольно специальных соображений.

Здесь мы докажем более сильное предложение, находящееся в таком же отношении к известной аппроксимационной теореме М. А. Лаврентьева [2], как цитированный результат из [1] относится к теореме Вейерштрасса. Наше доказательство будет основано на некоторых общих фактах функционального анализа и теории функций.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть K — нигде не плотный компакт в комплексной плоскости, имеющий связное дополнение, и $0 \in K$. Пусть последовательность $w(m)$ положительных чисел, $m = 0, 1, \ldots,$ удовлетворяет условию*

$$\lim \sqrt[m]{w(m)} = \infty. \tag{1}$$

Для всякой непрерывной на K функции $f(z)$, $f(0) = 0$, и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется многочлен

$$Q(z) = \sum c_m z^m, \text{ для которого}$$

$$\max_{z\in K} |f(z) - Q(z)| < \varepsilon \text{ и } |c_m| < \varepsilon w(m), \ m = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Если

$$R = \overline{\lim} \sqrt[m]{w(m)} < +\infty \tag{3}$$

и 0 — предельная точка K, то существует непрерывная на K функция $f(z)$, $f(0) = 0$, такая, что если последовательность многочленов

$$Q_n(z) = \sum c_m^n z^m$$

равномерно на K сходится к $f(z)$, то при всяком $M > 0$ невозможно одновременное выполнение неравенств

$$|c_m^n| \leqslant M w(m), \qquad m = 0, 1, \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Доказательство теоремы 2. Мы будем опираться на одну общую теорему, установленную нами в работе [3]. (Цитируем эту теорему в несколько ослабленном варианте, — достаточном для наших целей.)

Пусть E — нормированное пространство и $p(c_0, \ldots, c_m, \ldots)$ — функция от счетного множества числовых аргументов $c_0, \ldots, c_m, \ldots$ (вещественных или комплексных — в зависимости от того, каким является E). Предположим, что при любом m функция $p(c_0, \ldots, c_m) = p(c_0, \ldots, c_m, 0, \ldots, 0, \ldots)$ является непрерывным, симметричным и выпуклым функционалом в евклидовом пространстве $E_{m+1} = \{(c_0, \ldots, c_m)\}$.

В пространстве E выделена некоторая последовательность элементов $\{\varphi_m\}$, $m = 0, 1, \ldots$. Нужная нам теорема утверждает:

Для того, чтобы для элемента $\omega \in E$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *можно было подобрать такие коэффициенты* $c_0, \ldots, c_N$ *(N также зависит от ω и ε), чтобы выполнялись неравенства*

$$\left\|\omega - \sum\nolimits_{j=1}^{N} c_j \varphi_j\right\| < \varepsilon, \qquad p(c_0, \ldots, c_N) < \varepsilon, \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого линейного функционала $l \in E^*$ *из выполнения неравенств*

$$\left| l\left(\sum\nolimits_{j=0}^{m} a_j \varphi_j\right)\right| \leqslant p(a_0, \ldots, a_m) \tag{6}$$

при всех m и $a_0, \ldots, a_m$ следовало бы, что

$$l(\omega) = 0.$$

Пусть у нас $E = C(K)$ — пространство непрерывных на K функций $f(z)$ с обычной нормой

$$\|f\| = \max_{z \in K} |f(z)|. \tag{7}$$

В качестве функции $p(c_0, c_1, \ldots, c_m, \ldots)$ возьмем такую:

$$p(c_0, \ldots, c_m, \ldots) = \sup_m \left| \frac{c_m}{w(m)} \right|. \tag{8}$$

Ясно, что при любом m функция

$$p(c_0, \ldots, c_m) = p(c_0, \ldots, c_m, 0, \ldots)$$

является непрерывной на евклидовом пространстве E_{m+1}, выпуклой и симметричной. В качестве последовательности $\{\varphi_j\}$ возьмем последовательность степеней z: $\varphi_j(z) = z^j$, $j = 0, 1, \ldots$ Нам нужно установить для функции

$\omega = f(z)$, $f(0) = 0$, возможность неравенств (5) при любом $\varepsilon > 0$. Использование приведенного критерия позволяет доказать теорему 2 с помощью техники, развитой в современных способах доказательства аппроксимационной теоремы Лаврентьева и близких к ней результатов (см. [4], стр. 37—43). Пусть $l(\psi)$ — какой-то линейный функционал над $C(K)$. Он имеет представление

$$l(\psi) = \int_K \psi(z)\,d\mu, \tag{9}$$

где μ — некоторая комплексная бэровская мера на K. Предположим выполненным условие (6). Тогда, в частности, получим

$$|\,l(z^m)\,| \leqslant 1/w(m), \qquad m = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Рассмотрим функцию

$$\alpha(t) = \int_K \frac{d\mu(z)}{t - z}. \tag{11}$$

Интеграл, задающий функцию $\alpha(t)$, абсолютно сходится для почти всех (относительно плоской меры) значений t, и, значит, функция $\alpha(t)$ определена для почти всех значений t (см. [4], стр. 39). Вне K функция $\alpha(t)$ является аналитической.

Разложим эту функцию в ряд Лорана в окрестности точки $t = \infty$:

$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^{-k}. \tag{12}$$

Если взять окружность Γ с центром в нуле, содержащую K внутри себя, и воспользоваться интегральной формулой Коши, то будем иметь:

$$\begin{aligned} l(z^m) &= \int_K z^m d\mu = \int_K d\mu \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{t^m dt}{t - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t^m dt \int_K \frac{d\mu(z)}{t - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \alpha(t)\, t^m dt = \alpha_{m+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Неравенство (10) вместе с условием (1) влечет сходимость ряда (12) всюду, кроме точки $t = 0$. Сумму ряда (12) будем обозначать $\alpha_1(t)$. Вне K будет равенство $\alpha(t) = \alpha_1(t)$, но оно a priori могло бы не иметь места на K. Допустим сперва, что $\alpha(t) = \alpha_1(t)$ почти везде на K, а значит, и почти везде на плоскости. Возьмем малую окружность γ

с центром в нуле. Будем иметь:

$$\alpha_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\alpha_1(z)\,dz}{t-z}=\alpha(t) \tag{14}$$

Зададим на $K\cup\gamma$ меру $\nu(e)$ бэровских множеств e с помощью равенства

$$\nu(e)=\mu(e\cap K)-\frac{1}{2\pi i}\int_{e\cap\gamma}\alpha_1(t)\,dt. \tag{15}$$

Тогда из (14) и (11) следует, что

$$\int_{K\cup\gamma}\frac{d\nu(z)}{t-z}=0 \text{ почти везде во внешности } \gamma. \tag{16}$$

Рассуждая так же, как это сделано при доказательстве леммы 7.5 на стр. 39 статьи [4], убедимся в том, что для любого множества $e\subset K$, лежащего во внешности γ, должно быть $\nu(e)=0$. Но для таких множеств $\nu(e)=\mu(e)$ и, следовательно, $\mu(e)=0$. Так как γ имеет произвольно малый радиус, то мера μ может быть сосредоточена в единственной точке 0. Но для всякой функции $\omega=f(z)$, для которой $f(0)=0$, будет тогда

$$\int_K f\,d\mu=0,$$

и теорема доказана.

Допустим теперь, что равенство $\alpha_1(t)=\alpha(t)$ не имеет места почти везде на K. Тогда найдется точка $t_0\in K$, $t_0\neq 0$, в которой интеграл

$$\int_K\frac{d|\mu(z)|}{|t_0-z|} \tag{17}$$

сходится и

$$\alpha_1(t_0)\neq\alpha(t_0). \tag{18}$$

В силу сходимости интеграла (17) мера точки t_0: $\mu\{t_0\}=0$. Рассмотрим малую окружность γ с центром в нуле, и пусть d —замкнутый круг с границей γ. Возьмем компакт $K_1=d\cup K$, и пусть Ω_∞ — та из дополнительных к нему областей, которая содержит ∞, а $\partial\Omega_\infty$ — граница Ω_∞. При достаточно малом радиусе γ мы добьемся того, что точка t_0 будет лежать на $\partial\Omega_\infty$.

Повторяя для произвольного многочлена $Q(z)$ выкладку (13), придем к равенству

$$\int_K Q(z)\,d\mu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q(t)\,\alpha(t)\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma Q(t)\,\alpha_1(t)\,dt. \tag{19}$$

Если ввести меру ν равенством (15), то соотношение (19) означает ортогональность меры ν к любому многочлену $Q(z)$. Так как $\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$ тоже многочлен, то из этой ортогональности следует, что

$$\int_{K_1} \frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}\, d\nu(t) = 0,$$

или

$$\int_{K_1} \frac{Q(t)\, d\nu(t)}{t-t_0} = Q(t_0) \int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t-t_0}, \tag{20}$$

причем интегралы сходятся абсолютно. Пусть $P(K_1)$ — алгебра всех непрерывных на компакте K_1 функций, являющихся равномерными пределами многочленов. Для любой функции $g(t) \in P(K_1)$ будем иметь

$$\int_{K_1} \frac{g(t)\, d\nu(t)}{t-t_0} = g(t_0) \int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t-t_0}. \tag{21}$$

Сужение $P(K_1)$ на $\partial\Omega_\infty$: алгебра $P(\partial\Omega_\infty)$ есть алгебра Дирихле. Минимальная граница $P(\partial\Omega_\infty)$ совпадает с $\partial\Omega_\infty$, и так как $t_0 \in \partial\Omega_\infty$, то существует функция $g(t) \in P(\partial\Omega_\infty)$ такая, что $g(t_0) = 1$, $|g(t)| < 1$, $t \neq t_0$, $t \in \partial\Omega_\infty$ (относительно всех этих сведений см. [4], §§ 5—7, стр. 30—43). В силу принципа максимума можно считать, что $g(t)$ продолжена на K_1 и там имеет место неравенство $|g(t)| < 1$, $t \neq t_0$. Применяя (21) к функциям $\{g^k(t)\}$, получим

$$\int_{K_1} \frac{g^k(t)\, d\nu(t)}{t-t_0} = \int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t-t_0}.$$

Последовательность $\{g^k(t)\}$ сходится на K_1 к нулю всюду, кроме точки t_0, и, следовательно, эта последовательность сходится к нулю почти везде к ν (ведь $\nu\{t_0\} = \mu\{t_0\} = 0$). Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$\int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t-t_0} = 0.$$

Но

$$\int_{K_1} \frac{d\nu(t)}{t-t_0} = \alpha(t_0) - \alpha_1(t_0) \neq 0$$

по предположению.

Полученное противоречие полностью доказывает первую часть теоремы.

Рассмотрим вторую часть. Пусть выполнено (3) и для многочленов

$$Q_n(z) = \sum C_m^n z^m$$

выполняются неравенства (4) с некоторым $M > 0$. Последнее неравенство приводит к такому:

$$|c_m^n| \leqslant CM(2R)^m \tag{22}$$

с подходящим $C > 0$. Но тогда в круге $|z| < 1/4R$ будем иметь неравенство

$$|Q_n(z)| \leqslant 2MC.$$

Если последовательность $Q_n(z)$ сходится на множестве K к некоторой функции $f(z)$, а в круге $|z| < 1/4R$ расположено бесконечное множество точек из K, то по теореме Витали последовательность $Q_n(z)$ равномерно сходится во всем круге $|z| < 1/4R$. Таким образом, в этом круге $f(z)$ будет сужением на K аналитической в круге функции. Но если взять функцию

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{|z|}\right), \quad z \in K,$$

то она, как легко видеть, не может быть сужением на K никакой аналитической в окрестности нуля функции.

Теорема 2 доказана.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступило 19.XI.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Stafney James D., A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to C [0, 1], Duke Math. J., **34**, № 3 (1967), 393—396.

[2] Лаврентьев М. А., Sur les fonctions d'une variable complex représentables par des séries de polynomes, P., 1936.

[3] Хавинсон С. Я., Некоторые вопросы полноты систем, Докл. АН СССР, **137**, № 4 (1961), 793—796.

[4] Вермер Дж., Банаховы алгебры и аналитические функции, В сб. «Некоторые вопросы теории приближений», М., 1963.