УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ РЕКУРРЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕДУР

ГОДОВАНЧУК В. В., КОРОСТЕЛЕВ А. П.

1. Введение. Рассмотрим процедуру стохастической аппроксимации с дискретным временем

$$x_{n+1} - x_n = \alpha_n (b(x_n) + \psi_n(x_n)) + \beta_n \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где $b(x)$ — векторное поле в d-мерном евклидовом пространстве R^d; $\psi_n(x)$ — детерминированное смещение, возникающее при измерении поля $b(x)$ на n-м шаге; ξ_n — вектор случайных возмущений; $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — последовательности положительных коэффициентов; $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

Рекуррентное соотношение (1.1) включает, в частности, такие процедуры стохастической аппроксимации, как процедура Роббинса — Монро и Кифера — Вольфовица [1].

Пусть поле $b(x)$ таково, что динамическая система

$$\dot{x}(t) = b(x(t)) \tag{1.2}$$

имеет точку 0 асимптотически устойчивого положения равновесия. В [1] приводятся условия сходимости процедуры вида (1.1) к точке 0 в различных вероятностных смыслах. Так, если случайные возмущения независимы и имеют ограниченный второй момент, то для сходимости траекторий процедуры (1.1) с вероятностью 1 к точке 0 (при выполнении некоторых предположений относительно функций $b(x)$ и $\psi_n(x)$) достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 < \infty. \tag{1.3}$$

Вопросы определения более точных достаточных условий сходимости при различных предположениях о характере случайных возмущений ξ_n рассматривались ранее в работах [2—4]. В последней работе можно найти подробную библиографию.

В данной работе исследуется сходимость процедуры (1.1) в предположении возвратности траекторий (1.1) с вероятностью 1 по отношению к достаточно малой окрестности точки 0. Такую сходимость мы будем называть *локальной*.

Условие (1.3) оказывается тем дальше от необходимого условия локальной сходимости, чем быстрее убывают хвосты распределений случайных величин $\|\xi_n\|$. Так, если случайные возмущения имеют конечный экспоненциальный момент, то, как было показано в работе [5], для локальной сходимости процедуры (1.1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda > 0$ выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp\{-\lambda \alpha_n / \beta_n^2\} < \infty. \tag{1.4}$$

В данной работе исследуются необходимые и достаточные условия локальной сходимости процедуры (1.1) в случаях, когда возмущения ξ_n не имеют ограниченного экспоненциального момента. Здесь рассматриваются две ситуации: возмущения со степенными хвостами распределений и возмущения с субэкспоненциальными хвостами.

Оказывается, что в первом случае сходимость будет иметь место, если для любого $x > 0$ сходится ряд из вероятностей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\|\beta_n \xi_n\| > x\} < \infty. \tag{1.5}$$

При субэкспоненциальных хвостах возникает более сложная картина перехода от условия (1.5) к условию (1.4) в зависимости от соотношения между α_n и β_n.

2. Предположения и вспомогательные результаты.

Предположения А.

А1. Поле $b(x)$ имеет точку 0 асимптотически устойчивого положения равновесия с областью притяжения D. Это означает, что положение равновесия 0 устойчиво по

Ляпунову, и любая траектория динамической системы (1.2) с начальным условием $x(0) \in D$ сходится к точке 0, оставаясь в области D.

А2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $C_\varepsilon < \infty$, что

$$\| b(x) - b(y) \| \leqslant C_\varepsilon \| x - y \| \quad \text{при} \quad x, y \in D \setminus U_\varepsilon,$$

где U_ε — ε-окрестность точки 0.

Замечание 2.1. Предположение **А2** позволяет рассматривать не только гладкие поля $b(x)$, но и, например, такие:

$$b(x) = -x \| x \|^a, \quad a \geqslant -1.$$

Для простоты изложения доказательства будут проводиться для случая $\psi_n \equiv 0$. Следует указать, что случай, когда $\sup\limits_{x \in D} \| \psi_n(x) \| \to 0$ при $n \to \infty$, рассматривается аналогично и требует несущественных изменений в доказательствах.

В качестве рекуррентной процедуры мы будем рассматривать некоторую марковскую цепь x_n. Для всех $n \geqslant 1$ и $x \in R^d$ обозначим $\mathbf{P}_{n,x}$ вероятностную меру, связанную с марковской цепью x_n: $\mathbf{P}_{n,x}\{x_n = x\} = 1$.

Пусть существует такой компакт $K \subset D$, содержащий точку 0 вместе с некоторой окрестностью, что до момента первого выхода из K процесс x_n определяется следующим соотношением:

$$x_{n+1} - x_n = \alpha_n b(x_n) + \beta_n \xi_n. \tag{2.1}$$

Предположение Б. Пусть для любого $n \geqslant 1$ и $x \in R^d$ марковская цепь возвратна по отношению к множеству K с $\mathbf{P}_{n,x}$-вероятностью 1, т. е.

$$\mathbf{P}_{n,x}\{\exists N \geqslant n\colon\ x_N \in K\} = 1.$$

Замечание 2.2. Выполнения этого предположения легко добиться, полагая, например, $\mathbf{P}_{n,x}\{x_{n+1} = z \in K\} = 1$ для всех $n \geqslant 1$ и $x \notin K$.

Процедура (2.1) рассматривается при детерминированном начальном условии $x_1 = x \in R^d$. Сходимость процедуры (2.1) с $\mathbf{P}_{1,x}$-вероятностью 1 мы далее называем просто *сходимостью с вероятностью* 1.

Предположение **В**. Коэффициенты α_n и β_n неотрицательны; $\alpha_n \to 0$ и $\beta_n^2/\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

Для любых $s \geqslant 0$ и $T > 0$ положим

$$N_1 = N_1(s) = \max\left\{N\colon\ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \leqslant s\right\};$$

$$N_2 = N_2(s, T) = \min\left\{N\colon\ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \geqslant s + T\right\}.$$

Отметим, что в силу предположения $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ имеет место равенство

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{n=N_1}^{N_2} \alpha_n = T.$$

Введем обозначение $\mu_\nu = \mu_\nu(s, T) = \sum\limits_{n=N_1}^{N_2} \beta_n^\nu$.

Из предположения **В** следует, что для любого значения $T > 0$ при $\nu \geqslant 2$ величина $\mu_\nu(s, T)$ стремится к нулю, если $s \to \infty$.

Предположение **Г**. Для любого $T > 0$ существуют такие положительные постоянные $\varkappa = \varkappa(T)$ и $C = C(T)$, что равномерно по s при некотором $\nu > 2$ справедлива оценка

$$[\mu_2(s, T)]^\varkappa \leqslant C\mu_\nu(s, T).$$

Пример 2.1. Пусть $\alpha_n = n^{-\alpha}$, $\beta_n = n^{-\beta}$. Предположение **В** выполнено, если $0 < \alpha \leqslant 1$ и $2\beta > \alpha$. В данном случае при $0 < \alpha < 1$

$$N_1 = [((1-\alpha)s)^{1/(1-\alpha)}(1 + o(1))]; \quad N_2 = [((1-\alpha)(s+T))^{1/(1-\alpha)}(1 + o(1))],$$

где $o(1) \to 0$ при $s \to \infty$. Поэтому

$$\mu_2(s, T) = O\left(T/s^{(2\beta-\alpha)/(1-\alpha)}\right); \quad \mu_\nu(s, T) = O\left(T/s^{(\nu\beta-\alpha)/(1-\alpha)}\right)$$

при $s \to \infty$, и предположение **Г** выполнено с $\varkappa = (\nu\beta - \alpha)/(2\beta - \alpha)$. Аналогично проверяется выполнение предположения **Г** при $\alpha = 1$ и $2\beta > 1$.

Этот пример показывает, что для «хороших» последовательностей коэффициентов $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ предположение **Г** является следствием предположения **В**.

Для исследования условий локальной сходимости нам потребуются оценки вероятностей уклонений для взвешенных сумм независимых случайных величин. Пусть $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием и функциями распределения $F_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Лемма 2.1. *Пусть выполнено предположение* **Г** *при некотором* $\nu > 2$ *и при этом значении* ν *справедливо неравенство*

$$\sup_{n,\, x>0} \{x^\nu [F_n(-x) + (1 - F_n(x))]\} < +\infty.$$

Тогда для любых $x > 0$ *и* $T > 0$ *найдется такая постоянная* $C(x, T)$, *что равномерно по* s *выполнена оценка*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{n=N_1(s)}^{N_2(s,T)} \beta_n\eta_n\right| > x\right\} \leqslant C(x, T) \sum_{n=N_1(s)}^{N_2(s,T)} \beta_n^\nu.$$

Лемма 2.2. *Пусть при некотором* ν, $0 < \nu < 1$, *для всех* $x > 0$

$$\sup_n [F_n(-x) + (1 - F_n(x))] \leqslant \exp\{-cx^\nu\} \tag{2.2}$$

и для любого $T > 0$ *справедливо равенство*

$$\lim_{s\to\infty} \mu_{2-\nu}(s, T) = 0. \tag{2.3}$$

Тогда для любых $x > 0$ *и* $T > 0$ *найдется такая постоянная* $C(x, T)$, *что равномерно по* s *выполнена оценка*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{n=N_1(s)}^{N_2(s,T)} \beta_n\eta_n\right| > x\right\} \leqslant C(x, T) \sum_{n=N_1(s)}^{N_2(s,T)} \exp\{-cx^\nu/4\beta_n^\nu\}.$$

Лемма 2.1 является простым следствием теоремы 1,с из работы [6].

Доказательство леммы 2.2. Оценим вероятность, фигурирующую в условии леммы, следующим образом:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} \beta_n\eta_n\right| > x\right\} \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} \mathbf{P}\{|\beta_n\eta_n| > x\} +$$

$$+ \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} \beta_n\eta_n\right| > x;\ |\beta_n\eta_n| \leqslant x \text{ при всех } n\colon N_1 \leqslant n \leqslant N_2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} e^{-cx^\nu/\beta_n^\nu} + 2e^{-zx}\mathbf{M}\,\mathrm{ch}\left\{z\sum_{n=N_1}^{N_2} \beta_n\eta_n\right\} \prod_{n=N_1}^{N_2} \chi\{|\beta_n\eta_n| \leqslant x\},$$

где $\chi\{\cdot\}$ — индикатор соответствующего события.

Введем величины

$$f_n(z) = \int_{|\beta_n u| \leqslant x} \exp\{z\beta_n u\}\, dF_n(u).$$

Заметим, что второе слагаемое в последнем выражении равно

$$e^{-zx}\left[\prod_n f_n(z) + \prod_n f_n(-z)\right].$$

Покажем, что при $|z| \leqslant z_0 = c/(2x^{1-\nu} \max\limits_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} \beta_n^\nu)$ справедлива оценка

$$f_n(z) \leqslant 1 + \frac{\sigma^2}{2}(\beta_n z)^2 + \frac{c_1}{6}|\beta_n z|^3, \tag{2.4}$$

где $\sigma^2 = \sup_n \mathrm{M}\,\eta_n^2$, $c_1 = e^c \sup_n \mathrm{M}\,|\eta_n|^3$. Согласно условию (2.2) имеем: $\sigma^2 < +\infty$ и $c_1 < +\infty$.

Оценки (2.4) достаточно для доказательства леммы, поскольку

$$e^{-z_0 x} \prod_{n=N_1}^{N_2} f_n(\pm z_0) \leqslant \exp\left\{-z_0 x + \sigma^2/2 \sum_{n=N_1}^{N_2} [(\beta_n z_0)^2 + O(|\beta_n z_0|^3)]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\left(cx^{\nu}/2 - O\left(\sum_{n=N_1}^{N_2} \beta_n^{2-\nu}\right)\right)\Big/\left(\max_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} \beta_n^{\nu}\right)\right\}.$$

В силу условия (2.3) последнее выражение не превосходит при всех достаточно больших значениях s величины $\exp\left\{-\dfrac{cx^{\nu}}{4 \max\limits_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} \beta_n^{\nu}}\right\}$, что влечет утверждение леммы. Итак, остается доказать справедливость оценки (2.4). Имеем:

$$f_n(z) = \int\limits_{-x/\beta_n}^{-(x/\beta_n)^{1-\nu}} e^{z\beta_n u}\, dF_n(u) + \int\limits_{-(x/\beta_n)^{1-\nu}}^{(x/\beta_n)^{1-\nu}} e^{z\beta_n u}\, dF_n(u) + \int\limits_{(x/\beta_n)^{1-\nu}}^{x/\beta_n} e^{z\beta_n u}\, dF_n(u). \qquad (2.5)$$

Покажем, что первый и третий интегралы в правой части (2.5) при $|z| \leqslant z_0$ убывают быстрее любой степени β_n. Действительно, взяв, например, последний интеграл по частям, получаем: при достаточно больших значениях n

$$\int\limits_{(x/\beta_n)^{1-\nu}}^{x/\beta_n} e^{z\beta_n u}\, dF_n(u) \leqslant \exp\left\{-\frac{c}{2}\left(\frac{x}{\beta_n}\right)^{\nu}\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-c\left(\frac{x}{\beta_n}\right)^{\nu-\nu^2} + \frac{c}{2}\right\} + \int\limits_{(x/\beta_n)^{1-\nu}}^{x/\beta_n} \beta_n z \exp\{-cu^{\nu} + \beta_n z u\}\, du.$$

Внеинтегральные члены убывают быстрее любой степени β_n. Подынтегральная функция $\exp\{-cu^{\nu} + \beta_n z u\}$ на отрезке интегрирования выпукла вниз, поэтому при достаточно больших значениях n она не превосходит величины

$$\max\left[\exp\left\{-c\left(\frac{x}{\beta_n}\right)^{\nu-\nu^2} + \frac{c}{2}\right\};\ \exp\left\{-\frac{c}{2}\left(\frac{x}{\beta_n}\right)^{\nu}\right\}\right].$$

Следовательно, интеграл убывает также быстрее любой степени β_n.

Рассмотрим второе слагаемое в равенстве (2.5). Поскольку при $|u| \leqslant (x/\beta_n)^{1-\nu}$ и $|z| \leqslant z_0$ справедливо неравенство $|\beta_n z u| \leqslant c/2$, подынтегральная функция допускает оценку

$$\exp\{\beta_n z u\} \leqslant 1 + \beta_n z u + \frac{1}{2}(\beta_n z u)^2 + \frac{e^{c/2}}{6}|\beta_n z u|^3.$$

Воспользовавшись тем, что $\mathrm{M}\eta_n = 0$, получаем оценку (2.4), что завершает доказательство леммы.

3. Возмущения со степенными хвостами распределений. Рассмотрим процедуру (2.1), в которой ξ_n — последовательность независимых случайных векторов с нулевыми средними значениями. Распределения векторов ξ_n могут быть различными. Положим

$$V(x) = \sup_n \mathrm{P}\{\|\xi_n\| > x\}, \qquad x > 0.$$

Пусть для некоторого $\nu > 2$ существуют такие постоянные C_1 и C_2, что для всех достаточно больших $x > 0$ выполнены неравенства

$$0 < C_1 \leqslant x^{\nu} V(x) \leqslant C_2 < +\infty. \qquad (3.1)$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены предположения* **А — Г** *и условие* (3.1). *Тогда для сходимости процедуры* (2.1) *с вероятностью* 1 *необходимо и достаточно,* *чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{\nu} < \infty.$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как из условия (3.1) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\,\{\|\beta_n\xi_n\| > \varepsilon\} \geqslant \varepsilon^{-\nu} C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{\nu}.$$

Для доказательства достаточности заметим, что из леммы 2.1 вытекает, что для любого $T > 0$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ справедлива оценка

$$\mathrm{P}\left\{\max_{N_1(s)\leqslant N\leqslant N_2(s,\,T)} \left\| \sum_{n=N_1(s)}^{N} \beta_n \xi_n \right\| > \delta\right\} \leqslant C \sum_{n=N_1(s)}^{N_2(s,\,T)} \beta_n^{\nu} \qquad (3.2)$$

с некоторой постоянной $C = C\,(T,\,\delta)$ при всех достаточно больших s.

Из (3.2) следует, что для любого $T > 0$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ существует такая постоянная $C = C\,(T,\,\delta)$, что для всех достаточно больших s равномерно по $x \in K$

$$\mathrm{P}_{N_1(s),\,x}\,\{\max_{N_1(s)\leqslant n\leqslant N_2(s,\,T)} \|x_n - x\,(t\,(n))\| > \delta\} \leqslant C \sum_{n=N_1(s)}^{N_2(s,\,T)} \beta_n^{\nu}, \qquad (3.3)$$

где $x\,(t)$ — траектория динамической системы (1.2) с начальным условием $x\,(0) = x$, а $t\,(n) = \sum_{k=N_1(s)}^{n} \alpha_k$.

Оценка (3.3) легко доказывается в случае, когда поле $b\,(x)$ удовлетворяет условию Липшица во всей области D. При выполнении предположения **А2** для доказательства оценки (3.3) достаточно использовать (3.2) и устойчивость по Ляпунову.

Далее, для любого $\delta > 0$ выберем $h = h\,(\delta)$ так, чтобы траектории $x\,(t)$ динамической системы (1.2), начавшиеся в U_h — h-окрестности точки 0, оставались в $(\delta/2)$-окрестности этой точки при всех $t \geqslant 0$. Положим

$$\tau_\delta\,(n) = \min\,\{N \geqslant n\colon x_N \notin U_\delta\}$$

и $\tau_\delta\,(n) = +\infty$, если $x_N \in U_\delta$ при всех $N \geqslant n$.

Используя оценку (3.3), сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{\nu}$, можно показать, что для любого $x \in U_h$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_{n,\,x}\,\{\tau_\delta\,(n) = +\infty\} = 1. \qquad (3.4)$$

Из предположения **Б** и оценки (3.3) следует возвратность траекторий процедуры (2.1) в сколь угодно малую окрестность точки 0. Поэтому из равенства (3.4) вытекает сходимость траекторий процедуры (2.1) к точке 0 с вероятностью 1.

Следствие 3.1. Рассмотрим процедуру (2.1) при $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n$ (процедура Роббинса — Монро). Пусть выполнены предположения **А** и **Б**, условие (3.1), и пусть $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$. Тогда для сходимости процедуры Роббинса — Монро необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{\nu}$. Действительно, в этом случае предположения **В** и **Г**, очевидно, выполнены.

Введем величину

$$\nu_0 = \sup\,\{\nu\colon \mathbf{M}\,\|\,\xi_n\,\|^{\nu} < +\infty\}.$$

Следствие 3.2. *Допустим, что* $2 < \nu_0 < +\infty$ *и выполнены предположения* **А — Г**. *Тогда для сходимости процедуры* (2.1) *с вероятностью* 1 *достаточно, чтобы при некотором* $\varepsilon > 0$ *сходился ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{\nu_0-\varepsilon}$.

Как показывает следующий пример, сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{\nu_0}$ недостаточно для сходимости процедуры (2.1).

Пример 3.1. Пусть $\beta_n = (n \ln^2 n)^{-1/3}$ $(n \geqslant 2)$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^3 < \infty$. Пусть процедура (2.1) — одномерная и случайные величины ξ_n, ξ имеют одинаковое симметричное распределение, причем

$$p_k = \mathbf{P}\left\{\xi = \pm \frac{1}{\beta_k}\right\} = \frac{c}{k^2}; \quad \sum_{|k|=2}^{\infty} p_k = 1.$$

Тогда $\mathbf{M}\,|\,\xi\,|^\nu = O\left(\sum_{n=2}^{\infty} n^{\nu/3-2} \ln^{2\nu/3} n\right)$, поэтому $\nu_0 = 3$. Однако,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}\{|\beta_n \xi_n| > 1\} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{|k|=n}^{\infty} p_k = \infty,$$

т. е. процедура (2.1) расходится.

4. **Возмущения с субэкспоненциальными хвостами распределений.** В данном пункте вместо условия (3.1) будем предполагать выполненным следующее условие: для некоторого ν, $0 < \nu < 1$, существуют такие постоянные C_1 и C_2, $0 < C_1 \leqslant C_2 < < \infty$, что для всех достаточно больших x выполнены неравенства

$$e^{-C_2 x^\nu} \leqslant V(x) \leqslant e^{-C_1 x^\nu}. \tag{4.1}$$

Условия сходимости процедуры (2.1) при субэкспоненциальных хвостах распределений векторов ξ_n, т. е. при выполнении условия (4.1) зависят от асимптотического поведения величины $\mu_{2-\nu}(s, T)$ при $s \to \infty$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения* **А** — **В** *и условие* (4.1), *и пусть для любого* $T > 0$

$$\lim_{s\to\infty} \mu_{2-\nu}(s, T) = 0. \tag{4.2}$$

Тогда для сходимости процедуры (2.1) *с вероятностью* 1 *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\lambda > 0$ *выполнялось*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda/\beta_n^\nu} < \infty.$$

Необходимость вследствие выполнения условия (4.1) очевидна. Доказательство достаточности опирается на лемму 2.2 и совпадает с доказательством теоремы 3.1.

Следствие 4.1. *Рассмотрим рекуррентную процедуру* (2.1) *при* $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n$ *(процедура Роббинса — Монро). Пусть выполнены предположения* **А, Б** *и условия* (4.1) *и* (4.2). *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$, *то для сходимости процедуры Роббинса — Монро необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\lambda > 0$ *сходился ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda/\gamma_n^\nu}$.

В теоремах 3.1 и 4.1 оказывалось, что главный член вероятности события $\left\{\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} \beta_n \eta_n\right| > x\right\}$ оценивался вероятностью события $\{|\beta_n \eta_n| > x$ хотя бы при одном n: $N_1 \leqslant n \leqslant N_2\}$, т. е. вероятностью того, что хотя бы одно из слагаемых совершит «уклонение» величины не менее чем x. Вероятность же того, что сумма усеченных величин превзойдет x, т. е. вероятность события

$$\left\{\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} \beta_n \xi_n\right| > x, \ |\beta_n \xi_n| \leqslant x \quad \text{при} \quad N_1 \leqslant n \leqslant N_2\right\},$$

оказывалась пренебрежимо малой.

Иная ситуация возникает в случае, когда $\mu_{2-\nu}(s, T) \to \infty$ при $s \to \infty$. В этом случае вероятность уклонения суммы усеченных величин начинает играть доминирующую роль.

Для значительного упрощения изложения случай $\mu_{2-\nu}(s, T) \to \infty$, $s \to \infty$, будет рассмотрен при некоторых дополнительных условиях регулярности на последовательности коэффициентов $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ и в предположении, что все случайные возмущения ξ_n в процедуре (2.1) имеют одинаковое распределение.

Определение. Произвольную последовательность $\{g_n\}$ с положительными членами назовем *регулярной*, если для любого $T > 0$

$$\lim_{s\to\infty} [\max_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} g_n / \min_{N_1 \leqslant n \leqslant N_2} g_n] = 1.$$

Теорема 4.2. *Пусть в процедуре* (2.1) *случайные векторы* ξ_n *имеют одинаковое распределение с невырожденной ковариационной матрицей и пусть выполнены предположения* **А** — **В** *и условие* (4.1). *Если последовательности коэффициентов* $\{\alpha_n\}$ *и* $\{\beta_n\}$ *регулярны и для любого* $T > 0$

$$\lim_{s\to\infty} \mu_{\nu-2}(s, T) = \infty, \tag{4.3}$$

то для сходимости процедуры (2.1) *с вероятностью* 1 *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\lambda > 0$ *выполнялось условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda\alpha_n/\beta_n^2} < \infty. \tag{4.4}$$

Доказательство. Из регулярности последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ следует регулярность последовательности $\{\beta_n^{2-\nu}/\alpha_n\}$. Поскольку

$$\mu_{2-\nu}(s, T) \leqslant 2T \max\{\beta_n^{2-\nu}/\alpha_n \mid N_1(s) \leqslant n \leqslant N_2(s, T)\}.$$

в силу условия (4.3) имеем: $\beta_n^{2-\nu}/\alpha_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, при всех достаточно больших n выполнено неравенство $\beta_n^{-\nu} \geqslant \alpha_n/\beta_n^2$. Поэтому, если сходится ряд (4.4), то для любого $\lambda > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda/\beta_n^{\nu}} < \infty. \tag{4.5}$$

Наоборот, из условия (4.1) следует, что сходимость ряда в (4.5) является необходимым условием для сходимости процедуры (2.1). Поэтому достаточно доказывать теорему в случае, когда выполнено (4.5).

Введем усеченные случайные векторы

$$Y_n = \begin{cases} \xi_n, & \text{если} \quad \|\xi_n\| \leqslant 1/\beta_n, \\ c_n & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где c_n выбирается из условия $\mathbf{M}Y_n = 0$.

Сходимость ряда в (4.5) означает, что с вероятностью 1, начиная с некоторого конечного n, справедливо равенство $Y_n = \xi_n$. Значит, процедура (2.1) будет сходиться тогда и только тогда, когда сходится процедура, определенная в K соотношением

$$Z_{n+1} - Z_n = \alpha_n b(Z_n) + \beta_n Y_n. \tag{4.6}$$

Случайные возмущения в (4.6) удовлетворяют условию Крамера [7]. Положим $G_n(z) = \ln \mathbf{M}e^{(z, Y_n)}$ и введем кумулянту марковской цепи Z_n:

$$G(n, x, z) = \ln \mathbf{M}_{n,x} \exp\{(z, z_{n+1} - x)\} = \\ = \alpha_n (b(x), z) + G_n(\beta_n z).$$

Пусть A — ковариационная матрица случайного вектора ξ_n. Поскольку $\alpha_n/\beta_n = o(\beta_n^{1-\nu})$ при $n \to \infty$, имеем (^{T} — символ транспонирования):

$$G_n\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} z\right) \to \frac{1}{2} z^T A z \tag{4.7}$$

равномерно по z из любого ограниченного множества. Этот факт проверяется с помощью оценок, аналогичных оценкам в доказательстве леммы 2.2. Более того, нетрудно проверить сходимость первых и вторых производных по z в соотношении (4.7).

Это вместе с регулярностью последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ обеспечивает выполнение условий теоремы 2.1 из работы [7], т. е. справедливость экспоненциальных оценок для вероятностей уклонения марковской цепи Z_n (с нормирующим множителем α_n/β_n^2). Необходимость и достаточность условия (4.4) для сходимости процедуры (2.1) получается аналогично [5] (теорема 5.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972, 304 с.
2. *Красулина Т. П.* О процессах стохастической аппроксимации с бесконечной дисперсией.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. XIV, в. 3, с. 546—550.
3. *Revesz P.* A note on the Robbins—Monro method.— Studia Sci. Math. Hungarica, 1972, v. VII, f. 3—4, p. 355—362.
4. *Ljung L.* Strong convergence of a stochastic approximation algorithm.— Ann. Statist., 1978, v. 6, № 3, p. 680—696.
5. *Коростелев А. П.* Затухающие возмущения динамических систем и условия сходимости рекуррентных стохастических процедур.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 2, с. 298—317.
6. *Hanson D. L., Wright F. T.* Some more results on rates of convergence in the law of large numbers for weighted sums of independent random variables.— Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 141, p. 443—464.
7. *Вентцель А. Д.* Грубые предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. III.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 4, с. 673—691.

Поступила в редакцию
11.XI.1980

CONDITIONS FOR THE LOCAL CONVERGENCE OF RECURSIVE STOCHASTIC PROCEDURES

GODOVANČUK V. V., KOROSTELEV A. P. (MOSCOW)

(*Summary*)

We obtain the necessary and sufficient conditions for the almost sure convergence of recursive procedure (2.1) to the equilibrium stable state of the vector field $b(x)$. It is assumed that the trajectories of this procedure return a. s. into any neighbourhood of the equilibrium state. The convergence under this assumption is called local. Local convergence is studied for the cases of power (theorem 3.I) and subexponential (theorems 4.1 and 4.2) tails of distributions of random perturbations $\xi(t)$.