E. O. Karmanova, On congruences of paths,
Prikl. Diskr. Mat., 2011, Number 2, 96–100

УДК 512.2

О КОНГРУЭНЦИЯХ ЦЕПЕЙ

Е. О. Карманова

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: lkb@info.sgu.ru

Под конгруэнцией цепи понимается отношение эквивалентности на множестве ее вершин, все классы которого являются независимыми подмножествами. Показано, что любой связный граф является фактор-графом подходящей цепи. Найдены границы для минимальной длины цепи, факторизующейся на данный граф.

Ключевые слова: *цепь, конгруэнция, фактор-граф, дерево, звезда, обход.*

Под ориентированным графом (далее орграфом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество вершин, а α — отношение на V, задающее множество дуг. Основные понятия приводятся в соответствии с [1].

Графовые модели широко используются во многих областях человеческой деятельности. Транспортные системы, информационные сети, компьютерные программы, отношение зависимости в социальных группах — все могут моделироваться графами. Существуют различные методы преобразования графовых систем для приложений к проблемам оптимизации в вышеупомянутых ситуациях. В качестве допустимых реконструкций данного графа обычно рассматриваются следующие [2]:

1) ориентация ребер данного неориентированного графа (например, известная теорема Оре — критерий ориентируемости графа в сильно связный орграф [3]);
2) добавление новых дуг (ребер) (эта реконструкция используется, например, для построения отказоустойчивых реализаций компьютерных сетей по Хейзу — Абросимову [4, 5]);
3) удаление некоторых дуг (ребер) (здесь общеизвестными результатами являются, например, алгоритмы построения минимального остовного дерева для связной сети, так называемые минимальные раскontуривания сетей в технической диагностике [6]);
4) отождествление некоторых вершин графа.

Последний вид реконструкций формализуется следующим образом.

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа G. Фактор-графом орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε; $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : \exists u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2)\ ((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть K — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией K-графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V, что фактор-граф G/θ является K-графом.

Известны результаты М. Р. Мирзаянова [7], который рассматривал случай, когда K — класс сильносвязных орграфов, и предложил способ построения сильносвязной конгруэнции произвольного орграфа, наибольшей по числу вершин в фактор-графе. Им установлено также [8], что n-элементная ориентированная цепь имеет 2^{n-3} минимальных сильносвязных конгруэнций.

Возьмём в качестве класса K класс неориентированных графов.

Путем в графе $G = (V, \alpha)$ называется последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза. Если начальная и конечная вершины пути совпадают, путь называется циклическим. Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его ребрам, является простым. Простой циклический путь называется циклом, нециклический — цепью. Цепь с m ребрами будем обозначать P_m.

Звезда — это граф, все ребра которого инцидентны одной и той же вершине. Звезду с m ребрами будем обозначать S_m.

Показано, что любой связный граф является фактор-графом подходящей цепи, и получены оценки для минимальной длины цепи, факторизующейся на данный граф.

Множество вершин называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа G тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

Известна следующая задача о факторизации: можно ли для заданного графа сказать, является ли он фактор-графом другого заданного графа? Эта задача является NP-полной.

Например, возьмем пятиреберную цепь P_5. Пятивершинный цикл C_5 будет её фактор-графом, а четырехреберная звезда S_4 — нет.

К числу нерешенных проблем комбинаторной теории графов относится следующая задача: сколько фактор-графов имеет n-элементная цепь? Сколько среди них неизоморфных?

В [9] доказана следующая теорема.

Теорема 1. $i(P_{n-1}) = F(n+2)$, где $i(G)$ — число независимых множеств в графе G, $F(n)$ — числа Фибоначчи.

Отсюда следует, что для цепи P_{n-1} количество всех конгруэнций с одним нетривиальным классом равно $F(n+2) - 2$, так как в число всех независимых множеств в графе включается пустое множество и все одноэлементные подмножества множества его вершин.

В [10] представлена программа, генерирующая все конгруэнции заданной цепи и выделяющая среди них цепные конгруэнции, т. е. такие, фактор-графы по которым являются цепями. При этом выдается общее число конгруэнций данной цепи и количество её цепных конгруэнций. Например, у трехреберной цепи P_3 имеется четыре различных конгруэнции, которые дают три неизоморфных фактор-графа. У четырехреберной цепи P_4 всего имеется 14 фактор-графов, из них 7 попарно неизоморфных.

На основании результатов, полученных в [10], можно выдвинуть следующее предположение.

ГИПОТЕЗА. Количество конгруэнций n-элементной цепи равно $B(n-1)$, где $B(n)$ — число Белла.

Число Белла $B(n)$ — это число всевозможных эквивалентностей на n-элементном множестве.

Маршрут в связном графе называется обходом, если он содержит все ребра графа.

Следующий известный результат Тарри [3] показывает, что любой связный граф с m ребрами имеет обход длины $2m$.

Лемма 1. Если граф связный, то можно построить циклический маршрут, содержащий все ребра графа в точности два раза, по одному в каждом направлении.

Пусть дана m-реберная цепь. Какие графы являются ее фактор-графами?

Теорема 2. Связный граф тогда и только тогда является фактор-графом m-реберной цепи, когда в нем есть обход длины m.

Доказательство. Необходимость. Пусть связный граф G является фактор-графом цепи P_m по конгруэнции θ. Покажем, что в нем есть обход длины m.

Пусть в цепи P_m вершины пронумерованы натуральными числами $1, 2, \ldots, m, m+1$.

Каждая вершина графа G является θ-классом. При этом $\theta(i)$ и $\theta(j)$ смежны в G тогда и только тогда, когда существуют $i' \in \theta(i)$ и $j' \in \theta(j)$, такие, что $|i' - j'| = 1$.

Рассмотрим в G маршрут $M = \theta(1), \theta(2), \ldots, \theta(m+1)$. Покажем, что это обход, т.е. любое ребро графа G входит в состав маршрута. В самом деле, пусть $\{\theta(k), \theta(l)\}$ — ребро в G. Так как $\theta(k)$ и $\theta(l)$ смежны в G, то найдутся $k' \in \theta(k)$ и $l' \in \theta(l)$, такие, что k' и l' смежны в цепи P_m, т.е. $|k' - l'| = 1$. Пусть $l' = k' + 1$. Тогда в M встретится фрагмент $\ldots, \theta(k'-1), \theta(k'), \theta(l'), \ldots$, и значит, ребро $\{\theta(k), \theta(l)\}$ входит в состав M. Таким образом, M — обход, и его длина равна m.

Достаточность. Пусть G — произвольный связный граф и в нем есть обход длины m. Построим цепь, фактор-графом которой является граф G.

Так как в графе G есть обход длины m, то каждая вершина при нумерации вершин вдоль обхода получит одну или более меток из натуральных чисел $1, 2, \ldots, m, m+1$. Наибольшая метка равна $m+1$. В цепи P_m, вершины которой пронумерованы натуральными числами $1, 2, \ldots, m, m+1$, рассмотрим отношение

$$(i, j) \in \theta \;\Leftrightarrow i \text{ и } j \text{ — метки одной и той же вершины графа } G.$$

Очевидно, что отношение θ — эквивалентность на множестве вершин цепи.

Пусть $(i, j) \in \theta$ и $i < j$, т.е. при прохождении обхода некоторая вершина графа G встретилась на шаге i, а затем на шаге j. Понятно, что $j \geqslant i + 2$. Следовательно, вершины i и j не являются смежными в цепи P_m. Это означает, что все θ-классы являются независимыми подмножествами, и значит, θ — конгруэнция цепи P_m.

Покажем, что граф G изоморфен фактор-графу P_m/θ.

Каждой вершине графа G сопоставим множество всех её меток. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между вершинами графа G и θ-классами. Покажем, что это соответствие сохраняет отношение смежности.

Пусть вершины u и v смежны в графе G. Это означает, что при обходе они были пройдены последовательно, например вершина v после u. Тогда существуют такие метки i у вершины u и j у вершины v, что $j = i + 1$. Отсюда следует, что классы $\theta(i)$ и $\theta(j)$ смежны в фактор-графе P_m/θ.

С другой стороны, если классы $\theta(i)$ и $\theta(j)$ смежны в фактор-графе P_m/θ, то в P_m существуют вершины $i' \in \theta(i)$ и $j' \in \theta(j)$, такие, что $|i' - j'| = 1$. Это означает, что в графе G вершины, соответствующие классам $\theta(i)$ и $\theta(j)$, являются смежными.

Таким образом, граф G изоморфен фактор-графу P_m/θ. ■

Следствие 1. Любой связный граф с m ребрами является фактор-графом цепи P_{2m-1}.

Одной из открытых проблем является следующая: для данного связного графа G найти цепь с минимальным числом ребер $p(G)$, фактор-графом которой является данный граф.

Напомним, что диаметром дерева называется максимальное расстояние между его вершинами.

Теорема 3. Если T — дерево с m ребрами, имеющее диаметр d, то $p(T) = 2m - d$.

Доказательство. Согласно лемме, любой граф с m ребрами имеет обход длины $2m$. Пусть R — минимальный обход дерева T, и пусть его длина $r < 2m$. Значит, в R есть ребро, проходимое один раз. Пусть таких ребер k штук. Пронумеруем их в порядке обхода R. Покажем, что ребра, проходимые один раз, образуют в T цепь.

Предположим, что это не так. Пусть ребра $1 = \{u_0, u\}$ и 2 с началом v не инцидентны. Рассмотрим в составе R маршрут $R(u, v)$. Он содержит цепь $P(u, v)$. Пусть ее первым ребром будет $\{u, u'\}$.

Ребро $\{u, u'\}$ в обходе R проходится больше одного раза.

Представим обход R в виде $R = R_{in}u_0uR_u^1uu'R_{u'}^1u'uR_u^2uu'R_{u'}^2 \ldots uu'R_{fin}$, где R_{in} — подмаршрут, соединяющий начальную вершину обхода R с вершиной u_0; R_{fin} — подмаршрут, соединяющий вершину u' с конечной вершиной обхода R; R_u^i — подмаршруты обхода R с началом и концом в u; $R_{u'}^i$ — с началом и концом в u'.

Заметим, что второй раз ребро $\{u, u'\}$ не может быть пройдено от u к u', так как иначе после его прохождения нужно попасть из u' в u по некоторому подмаршруту $R(u', u)$, а тогда в составе маршрута $uu'R(u', u)$ появляется цикл, что невозможно для дерева. Таким образом, в составе R ребро $\{u, u'\}$ второй раз проходится от u' к u.

Теперь построим маршрут $R_{in}u_0uR_u^1R_u^2 \ldots R_u^s uu'R_{u'}^1R_{u'}^2 \ldots R_{u'}^s R_{fin}$. Этот маршрут является обходом, так как он содержит все ребра, пройденные в составе R, а значит, все ребра дерева T. Его длина меньше, чем у R, что невозможно, ибо R минимален. Следовательно, предположение о том, что ребра, проходимые один раз, не образуют в T цепь, неверно, и в составе обхода R есть цепь P, состоящая из ребер, проходимых один раз.

Длина цепи P равна k. Но $k \leqslant d$, так как d — наибольшая длина цепи в дереве T.

Пусть s_{m-k} — длина части обхода R, проходимая по ребрам кратности $\geqslant 2$ в R. Тогда $2m > r = s_{m-k} + k \geqslant 2(m-k) + k = 2m - k \geqslant 2m - d$. Итак, каждый обход дерева T имеет длину не меньше чем $2m - d$. Следовательно, $2m - d$ — это минимальная возможная длина обхода дерева T. Покажем, что обход длины $2m - d$ существует.

Изобразим дерево T следующим образом. Пусть P_d — цепь длины d в дереве T, $v_i \in P_d$, $i = \overline{0, d-1}$.

Выберем висячую вершину $v_0 \in P_d$ в качестве корневой и припишем уровень i каждой вершине v_i цепи P_d. Эти вершины могут быть смежны с некоторыми вершинами, не входящими в цепь P_d, они, в свою очередь, с другими вершинами и т. д. Таким образом, каждая вершина $v_i \in P_d$, $i = \overline{1, d-2}$, является корнем некоторого дерева T_i (среди этих деревьев могут быть пустые).

Построим обход $v_0v_1T_1v_1v_2T_2 \ldots v_{d-3}v_{d-2}T_{d-2}v_{d-2}v_{d-1}$. Согласно лемме 1, каждое дерево T_i имеет обход длины, равной удвоенному числу его ребер, причем начинается и заканчивается он в вершине $v_i \in P_d$ графа T.

Отсюда и из теоремы 2 следует доказываемое утверждение, поскольку длина построенного обхода равна $2m - d$, и этот обход минимален. ■

Следствие 2. Для звезды S_m имеем $p(S_m) = 2m - 2$.

Докажем теорему о верхней и нижней оценках $p(G)$ для произвольного связного графа G с m ребрами.

Теорема 4. Для связного графа G с m ребрами $m \leqslant p(G) \leqslant 2m - 2$.

Доказательство. Первое неравенство следует из того, что количество ребер в фактор-графе не может превышать количества ребер в исходном графе.

Покажем, что в каждом связном графе G с m ребрами существует обход длины $2m-2$. Рассмотрим два случая.

1) Граф G имеет висячие вершины.

Возьмем произвольную висячую вершину u, пройдем исходящее из неё ребро. Граф $G^* = G \setminus \{u\}$ связный и имеет $m^* = m-1$ ребер. По следствию 1, существует обход графа G^* длины $2m^*-1 = 2m-3$ и, следовательно, обход графа G длины $2m-2$.

2) Граф не имеет висячих вершин.

Отметим произвольную вершину u, не являющуюся точкой сочленения. Возьмем некоторое исходящее из неё ребро, пусть другим его концом будет вершина v.

Граф $G^* = G \setminus \{u\}$ связный и имеет $m^* = m-d$ ребер, где d — степень вершины u. По лемме 1 существует обход графа G^* из вершины v длины $2(m-d)$. Вершина u с непройденными ребрами образует d-реберную звезду. Обойдем эту звезду, отправляясь из вершины v. Согласно следствию 2, этот обход имеет длину $2d-2$. Таким образом, получаем обход графа G длины $2(m-d)+2d-2 = 2m-2$. Заметим, что если в m-реберном графе есть эйлеров путь, то этот граф является фактор-графом цепи длины m (наименьшая возможная длина для цепи, факторизуемой на m-реберный граф). С другой стороны, звезда S_m, имеющая m ребер, не может быть получена как фактор-граф цепи с длиной меньше чем $2m-2$. Следовательно, обе оценки являются точными. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 367 с.
2. *Салий В. Н.* Оптимальные реконструкции графов // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 59–65.
3. *Оре О.* Теория графов. 2-е изд. М.: Наука, 1980. 336 с.
4. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing systems // IEEE Trans. Comput. 1976. No. 9. P. 25.
5. *Абросимов М. Б.* Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5. Вып. 1. С. 86–91.
6. *Верзаков Г. Ф., Киншт Н. В., Рабинович В. И., Тимонен Л. С.* Введение в техническую диагностику. М.: Энергия, 1968.
7. *Мирзаянов М. Р.* Сильно связные конгруэнции ориентированных графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 7. С. 104–114.
8. *Мирзаянов М. Р.* О минимальных сильно связных конгруэнциях ориентированных цепей // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6. Вып. 1/2. С. 91–95.
9. *Prodinger H. and Tichy R. F.* Fibonacci numbers of graphs // Fibon. Quart. 1982. V. 20. No. 1. P. 16–21.
10. *Карманова Е. О.* О конгруэнциях цепей и циклов // Компьютерные науки и информационные технологии. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 238.