



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Осипов, Одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли в  $\mathbb{R}^n$  для  $0 < p \leq 2$ ,  
*Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2010, том 376, 88–115

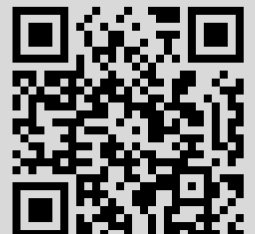
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и  
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

18 марта 2025 г., 20:51:23



Н. Н. Осипов

**ОДНОСТОРОННЕЕ НЕРАВЕНСТВО  
ЛИТЛВУДА–ПЭЛИ В  $\mathbb{R}^n$  ДЛЯ  $0 < p \leq 2$**

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА И ИСТОРИЯ ВОПРОСА

В 1983 г. Рубио де Франсия (см. [1]) доказал, что при  $2 \leq p < \infty$  справедливо неравенство

$$\left\| \left( \sum_m |M_{\Delta_m} f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad (1)$$

где  $\Delta_m$  – произвольные попарно непересекающиеся интервалы на прямой  $\mathbb{R}$ , а  $M_{\Delta_m} f = (\widehat{f} \chi_{\Delta_m})^\vee$  – соответствующие им мультипликаторы Фурье, причем константа  $C_p$  не зависит ни от функции  $f$ , ни от интервалов  $\Delta_m$ . Вскоре после этого Журне (см. [2]), используя методы им же построенной теории сингулярных интегральных операторов на прямом произведении евклидовых пространств, показал, что аналогичная оценка выполняется, когда функция  $f$  задана на  $\mathbb{R}^n$ , а  $\Delta_m$  – попарно непересекающиеся параллелепипеды в  $\mathbb{R}^n$  со сторонами, параллельными осям координат.

Далее, заметим, что, используя двойственность, оценку (1) можно переписать следующим образом:

$$\left\| \sum_m f_m \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \left\| \{f_m\} \right\|_{L^p(\mathbb{R}, l^2)}, \quad 1 < p \leq 2, \quad (2)$$

где  $\{f_m\}$  – набор функций, таких, что  $\text{supp } \widehat{f}_m \subset \Delta_m$ . В 2005 г. Кисляков и Парилов (см. [3]), используя теорию операторов Кальдерона–Зигмунда на классах Харди, установили, что неравенство (2) выполняется при всех  $0 < p \leq 2$ . С другой стороны, в 1985 г. Р. Фейфферман (см. [4]) описал теорию, позволяющую проверять ограниченность линейных операторов на классах Харди на произведении двух

---

*Ключевые слова:* класс Харди, атомное разложение, лемма Журне, оператор Кальдерона–Зигмунда.

Поддержано РФФИ, грант No. 08-01-00358.

евклидовых пространств  $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ . Его методы в некотором смысле двойственны упомянутой теории Журне, который работал, в основном, в терминах пространства  $ВМО$ . В 2009 г. автор (см. [5]), совместив технику Кислякова и Парилова с методами Фейффермана, доказал, что аналог неравенства (2) выполняется, если  $\Delta_m$  – попарно-непересекающиеся прямоугольники в  $\mathbb{R}^2$  и  $0 < p \leq 2$ .

Теория Фейффермана, однако, применима только к произведению двух евклидовых пространств. Тем не менее, в работе Кэрбэри и Сигера [6] описывается теория, являющаяся развитием идей Журне и Фейффермана, которая позволяет рассматривать произвольное число евклидовых сомножителей. Используя ее, мы можем распространить результат работы [5] на случай произвольной размерности, то есть доказать следующую теорему.

**Теорема.** Пусть задана последовательность функций  $\{f_m\}$  такая, что  $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n)$  и  $\text{supp } \widehat{f}_m \subset \Delta_m$ , где  $\Delta_m$  – непересекающиеся параллелепипеды в  $\mathbb{R}^n$  со сторонами, параллельными осям координат. Тогда при  $0 < p \leq 2$  выполняется оценка

$$\left\| \sum_m f_m \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,n} \left\| \{f_m\} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n, l^2)},$$

причем константа  $C_{p,n}$  не зависит ни от функций, ни от прямоугольников.

Здесь индекс  $m$  пробегает счетное или конечное множество. Если  $m$  пробегает конечное множество, мы намеренно не отражаем в обозначениях, что норма в правой части вычисляется не в  $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$ , а в  $L^p(\mathbb{R}^n, l_N^2)$  при некотором  $N \in \mathbb{N}$  (формально можно считать, что конечные последовательности функций дополнены до бесконечных нулями). Мы будем поступать подобным образом и в дальнейшем, не оговаривая этого. Также необходимо заметить, что всюду в этой статье мы пользуемся следующим определением преобразования Фурье:

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} d\xi, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Эту работу следует рассматривать как дополнение к статье [5], так как здесь используются, по сути, те же идеи и методы. Однако вычисления в сравнении с [5] утяжеляются, и их решено было изложить отдельно в том числе и по этой причине.

2. ПЕРЕХОД ОТ ПРОСТРАНСТВА  $L^p(\mathbb{R}^n)$   
К ПРОСТРАНСТВУ  $H^p(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R})$

В этом параграфе мы приведем несколько утверждений, которые в дальнейшем позволят нам рассматривать класс  $H^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < p \leq 2$ , вместо пространства  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Здесь мы под  $H^p(\mathbb{R}^n)$  понимаем многопараметрический класс Харди на произведении евклидовых пространств (строгое определение приведено ниже).

Для начала определим аналитический класс Харди  $H_A^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Определение 1.** Рассмотрим область  $D = D_1 \times \dots \times D_n$ , где  $D_s = \{z_s = x_s + iy_s \mid x_s, y_s \in \mathbb{R}; y_s > 0\}$ . Будем говорить, что функция  $u$  (скалярно-значная или  $l^2$ -значная), определенная и аналитическая в этой области, принадлежит классу  $H_A^p(\mathbb{R}^n)$ , если

$$\|u\|_{H_A^p}^p = \sup_{y_1, \dots, y_n > 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)|^p dx < \infty.$$

Заметим, что вместо аналитических функций мы можем рассматривать классы функции, антианалитических по всем переменным.

Мы пишем  $H_A^p(\mathbb{R}^n)$  вместо  $H_A^p(D)$ , отождествляя функцию  $u$  с её предельными значениями при  $y = (y_1, \dots, y_n) \rightarrow 0$ , причем предел понимается в смысле медленно растущих распределений. В [7, стр. 174] доказано, что для функции  $u$  из однопараметрического класса Харди (на одном евклидовом пространстве) такой предел существует и однозначно определяет эту функцию. Для функции из класса Харди на произведении нескольких евклидовых пространств это доказывается аналогично.

Теперь сформулируем лемму, которая позволит нам перейти от пространства  $L^p$  к пространству  $H_A^p$ . Для случая  $n = 2$  ее доказательство можно найти в работе [5] (случай произвольного  $n$  рассматривается совершенно аналогично, поэтому доказательство мы здесь не приводим).

**Лемма 1.** Пусть  $\Delta_m$  – параллелепипеды в  $\mathbb{R}^n$  (возможно, пересекающиеся), все точки которых имеют неотрицательные координаты, а  $g_m$  – функции из  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , для которых  $\text{supp } \hat{g}_m \subset \Delta_m$ , причем функций, не равных тождественно нулю, среди них конечное число. Тогда функция  $G = \{g_m\}$  лежит в  $H_A^p(\mathbb{R}^n, l^2)$  и при этом  $\|G\|_{H_A^p(l^2)} \leq \|G\|_{L^p(l^2)}$ .

Заметим, что если предположить, что все точки параллелепипедов  $\Delta_m$  имеют отрицательные координаты и рассматривать антианалитические функции вместо аналитических, то лемма останется верна.

Теперь через некасательную максимальную функцию определим “вещественный” класс Харди  $H^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что функция  $u$  (скалярно-значная или  $l^2$ -значная), определенная в области  $D$  и гармоническая по каждой переменной, принадлежит классу  $H^p(\mathbb{R}^n)$ , если

$$N(u)(x) = \sup_{(t,y) \in \Gamma(x)} |u(t_1 + iy_1, \dots, t_n + iy_n)| \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

где  $\Gamma(x) = \Gamma_1(x_1) \times \dots \times \Gamma_n(x_n)$  — прямое произведение конусов  $\Gamma_s(x_s) = \{(t_s, y_s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid |t_s - x_s| < y_s\}$ . При этом положим  $\|u\|_{H^p} = \|N(u)\|_{L^p}$ .

Мы снова пишем  $H^p(\mathbb{R}^n)$  вместо  $H^p(D)$  ввиду того, что у функции  $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$  существует предел при  $y \rightarrow 0$  в смысле распределений, который ее полностью определяет (см. [7, стр. 174]). Далее, во избежание путаницы, мы будем обозначать предельное распределение функции  $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$  через  $f$  (и писать  $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ ). Как и в одномерном случае, если  $u \in H^p_A(\mathbb{R}^n)$ , то  $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ , причем  $\|u\|_{H^p} \leq C\|u\|_{H^p_A}$  (см., например, [8] или [9]). То же самое верно и для антианалитических функций.

Для функций из класса  $H^p(\mathbb{R}^n)$  существует теорема об атомном разложении. Эта теорема использовалась в качестве одного из главных инструментов при построении описанной в следующем параграфе теории, которая позволяет проверять ограниченность некоторых линейных операторов на пространстве  $H^p(\mathbb{R}^n)$ . Если опустить детали, то теорема об атомном разложении утверждает, что если  $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ , то  $f = \sum \lambda_k a_k$ , где числа  $\lambda_k$  такие, что  $\sum |\lambda_k|^p \leq C\|f\|_{H^p}^p$ , а каждая из функций  $a_k$  сосредоточена на открытом множестве конечной меры. Функции  $a_k$  называются атомами и каждая из них, в свою очередь, представима в виде суммы сосредоточенных на диадических параллелепипедах функций (предатомов), у которых равно нулю определенное число моментов по каждой переменной. Для ситуации, когда  $n = 2$ , подробности можно посмотреть в работах [4] и [10]. Для произвольного  $n$  теорема формулируется и доказывается совершенно аналогично (см. [6]). Ключевым фактом, используемым при доказательстве атомного разложения, является то, что

$\|S_\psi(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{H^p}$ , где  $S_\psi(f)$  – некоторая квадратичная функция, определение которой мы дадим ниже. Этот факт следует считать общеизвестным, однако доказательство его в литературе, видимо, отсутствует (из дальнейшего, впрочем, видно, что основная трудность была преодолена в работе [8]). Поэтому мы докажем его для полноты. Для начала определим квадратичную функцию  $S_\psi(f)$ . Пусть  $\psi$  – гладкая функция с носителем в отрезке  $[-1, 1]$ , четная и такая, что  $\int \psi(t) t^r = 0$  при  $0 \leq r \leq N$ , где число  $N$  достаточно большое (чем меньше показатель  $p$ , тем большее число моментов предполагается равным нулю). Обозначим

$$\Psi_y(x) = \prod_{s=1}^n \psi_{y_s}(x_s) = \prod_{s=1}^n \frac{1}{y_s} \psi\left(\frac{x_s}{y_s}\right).$$

Тогда квадратичная функция  $S_\psi(f)$  определяется формулой

$$S_\psi(f)(x) = \left( \iint_{\Gamma(x)} |(f * \Psi_y)(t)|^2 \frac{dt dy}{y_1^2 \cdots y_n^2} \right)^{1/2}.$$

Как уже было сказано, хорошо известен (но нигде явно не проверяется) следующий факт.

**Лемма 2.** *Если распределение  $f$  принадлежит классу  $H^p(\mathbb{R}^n)$ , то квадратичная функция  $S_\psi(f)$  принадлежит пространству  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , причем*

$$\|S_\psi(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{H^p}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Через  $u$  будем обозначать функцию, предельным распределением которой является  $f$ . Нам понадобится интеграл площадей Лузина от функции  $u$ , который определяется по формуле

$$A(u)(x) = \left( \iint_{\Gamma(x)} |\nabla_1 \cdots \nabla_n u(t_1 + iy_1, \dots, t_n + iy_n)|^2 dt dy \right)^{1/2},$$

где  $\nabla_s h = \left( \frac{\partial}{\partial t_s} h, \frac{\partial}{\partial y_s} h \right)$  (таким образом под знаком модуля стоит вектор из  $2^n$  компонент). Мы будем использовать оценку

$$\|A(u)\|_{L^p} \leq C\|u\|_{H^p}, \quad (4)$$

доказательство которой можно найти в работах [8] или [9] (в этих работах рассматриваются классы Харди на произведении двух евклидовых пространств, однако те же методы применимы и в случае, когда число евклидовых сомножителей произвольно). Также нам потребуется обратная оценка

$$\|u\|_{H^p} \leq C \|A(u)\|_{L^p}, \tag{5}$$

для ситуации, когда  $u$  гармоническая функция, действующая из верхней комплексной полуплоскости  $\mathbb{C}_+$  в сепарабельное гильбертово пространство  $\mathcal{H}$ , такая, что  $|u(x + iy)|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$  (см. [7, стр. 161–167]).

Теперь  $n$ -кратным применением одномерной теории сингулярных интегральных операторов выведем оценку (3) из оценки (4). Для упрощения выкладок положим  $n = 2$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Обозначим  $u_\varepsilon(z_1, z_2) = u(z_1 + i\varepsilon, z_2 + i\varepsilon)$  и  $f_\varepsilon(x_1, x_2) = u(x_1 + i\varepsilon, x_2 + i\varepsilon)$ . Также обозначим  $\mathcal{P}_y(x) = P_{y_1}(x_1)P_{y_2}(x_2)$ , где  $P_y(x) = cy/(x^2 + y^2)$  – ядро Пуассона, и докажем соотношение

$$u_\varepsilon(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (f_\varepsilon * \mathcal{P}_y)(x). \tag{6}$$

Заметим, что  $|u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)| \leq Cy_1^{-1/p}y_2^{-1/p}\|u\|_{H^p}$ . Действительно, так как  $|u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)| \leq N(u)(t_1, t_2)$  при  $|x_s - t_s| < y_s$ ,  $s = 1, 2$ , то

$$\begin{aligned} &|u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)|^p \\ &\leq \frac{C}{y_1 y_2} \iint_{\substack{|x_1 - t_1| < y_1 \\ |x_2 - t_2| < y_2}} (N(u)(t_1, t_2))^p dt_1 dt_2 \leq Cy_1^{-1}y_2^{-1}\|u\|_{H^p}^p. \end{aligned}$$

Таким образом функция  $u_\varepsilon$  ограничена на  $D$  вплоть до границы и, дважды пользуясь утверждением из [11, § VII.1.2], получаем (6).

Далее, введем несколько вспомогательных гильбертовых пространств:

$$\mathcal{H}_{t_1, y_1} = L^2\left(\Gamma_1(0), \frac{dt_1 dy_1}{y_1^2}\right), \quad \mathcal{H}_{t_2, y_2} = L^2\left(\Gamma_2(0), \frac{dt_2 dy_2}{y_2^2}\right)$$

и

$$\mathcal{H}_{t_1, t_2, y_1, y_2} = L^2\left(\Gamma_1(0) \times \Gamma_2(0), \frac{dt_1 dt_2 dy_1 dy_2}{y_1^2 y_2^2}\right).$$

Зафиксировав  $x_1$ , определим функцию  $g_{x_1}$  со значениями в пространстве  $\mathcal{H}_{t_1, y_1}$  по формуле  $g_{x_1}(x_2) = (f_\varepsilon(\cdot, x_2) * \psi_{y_1})(x_1 - t_1)$ . Также введем  $\mathcal{H}_{t_2, y_2}$ -значное ядро  $K_2(x_2) = \psi_{y_2}(x_2 - t_2)$ . Хорошо известно, что для таких ядер выполнены условия гладкости вида

$$\left| \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^r K_2(x_2) \right|_{\mathcal{H}_{t_2, y_2}} \leq C_r |x_2|^{-1-r},$$

то есть  $K_2$  – ядро сингулярного интегрального оператора, ограниченного в  $L^2$  по теореме Планшереля. Воспользовавшись теорией таких операторов (см. [7, 188–192]), получим, что

$$\begin{aligned} \|S_\psi(f_\varepsilon)\|_{L^p}^p &= \iint |(g_{x_1} * K_2)(x_2)|_{\mathcal{H}_{t_1, t_2, y_1, y_2}}^p dx_2 dx_1 \\ &\leq C \int \|g_{x_1} * P_{y_2}\|_{HP(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{t_1, y_1})}^p dx_1. \end{aligned}$$

Заметим, что  $|(g_{x_1} * P_{y_2})(x_2)|_{\mathcal{H}_{t_1, y_1}} \rightarrow 0$  при  $y_2 \rightarrow \infty$ . Действительно, нетрудно видеть, что функция  $f_\varepsilon$  лежит в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^2)$  (это вытекает из ее ограниченности). Тогда по теореме Планшереля функция  $h(x_1, x_2) = g_{x_1}(x_2)$  лежит в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_{t_1, y_1})$ . Значит, функция  $g_{x_1}(x_2)$  лежит в пространстве  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{t_1, y_1})$  при почти всех  $x_1$ . Тогда

$$\sup_{y_2 > 0} \int |(g_{x_1} * P_{y_2})(x_2)|_{\mathcal{H}_{t_1, y_1}}^2 dx_2 < \infty,$$

и отсюда следует, что  $|(g_{x_1} * P_{y_2})(x_2)|_{\mathcal{H}_{t_1, y_1}} \leq C y_2^{-1/2}$  (см. [7, 173–174]). Таким образом, мы можем воспользоваться оценкой (5):

$$\begin{aligned} &\|g_{x_1} * P_{y_2}\|_{HP(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{t_1, y_1})}^p \\ &\leq C \int \left( \iint_{\Gamma_2(0)} |(g_{x_1} * \nabla_2 P_{y_2})(x_2 - t_2)|_{\mathcal{H}_{t_1, y_1}}^2 dt_2 dy_2 \right)^{p/2} dx_2. \end{aligned}$$

Теперь зафиксируем  $x_2$  и определим функцию  $g_{x_2}$  со значениями в пространстве  $L^2(\Gamma_2(0))$  по формуле  $g_{x_2}(x_1) = (f_\varepsilon(x_1, \cdot) * \nabla_2 P_{y_2})(x_2 - t_2)$ . Нам понадобится еще одно вспомогательное гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_{t_1, t_2, y_1, y_2} = L^2\left(\Gamma_1(0) \times \Gamma_2(0), dt_2 dy_2 \frac{dt_1 dy_1}{y_1^2}\right)$$



и ядро  $K_1(x_1) = \psi_{y_1}(x_1 - t_1)$ . Собирая все вместе и меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} \|S_\psi(f_\varepsilon)\|_{L^p}^p &\leq C \iint |(g_{x_2} * K_1)(x_1)|_{\mathcal{H}_{t_1, t_2, y_1, y_2}}^p dx_1 dx_2 \\ &\leq C' \iint \left( \iint_{\Gamma_1(0)} |(g_{x_2} * \nabla_1 P_{y_1})(x_1 - t_1)|_{L^2(\Gamma_2)}^2 dt_1 dy_1 \right)^{p/2} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Чтобы получить последнее неравенство, мы вновь воспользовались одномерной теорией сингулярных интегральных операторов и оценкой (5). Далее, пользуясь соотношением (6), получаем, что последнее выражение равно  $C' \|A(u_\varepsilon)\|_{L^p}^p$ , что, в свою очередь (ввиду оценки (4)), не превосходит

$$C'' \|u_\varepsilon\|_{H^p}^p \leq C'' \|u\|_{H^p}^p.$$

Так как все наши оценки равномерны по  $\varepsilon$ , то перейдя к пределу, получим то, что требуется.

Заметим, что если  $f \in H_A^p(\mathbb{R}^n)$ , то для доказательства оценки  $\|S_\psi(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{H_A^p}$  интегралы площадей Лузина не требуются. Мы можем просто заменять все  $H_A^p$ -нормы, возникающие в процессе доказательства,  $L^p$ -нормами граничных значений соответствующих функций.

Подведем итоги этого параграфа. Итак, суммируемые функции, спектр которых лежит в параллелепипедах с положительными координатами, принадлежат аналитическому классу Харди  $H_A^p(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$  на произведении евклидовых пространств (см. [5]). Аналитический класс Харди  $H_A^p$  лежит в “вещественном” классе Харди  $H^p$  (см. [8] или [9]). Интеграл площадей Лузина действует ограниченно из  $H^p$  в  $L^p$  (см. [8] или [9]). От интеграла площадей Лузина  $n$ -кратным применением одномерной теории сингулярных интегральных операторов (см. [7]) можем перейти к квадратичной функции  $S_\psi(f)$  (если  $f \in H_A^p(\mathbb{R}^n)$ , то интеграл площадей Лузина не требуется).  $L^p$ -ограниченность квадратичной функции  $S_\psi$  позволяет получить атомное разложение для функций из  $H^p$  (см. [4] и [10]). Атомное разложение является одним из главных инструментов, используемых при построении теории, позволяющей проверять ограниченность некоторых линейных операторов на классах  $H^p(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$  (см. следующий параграф).

### 3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОСТРАНСТВЕ $H^p(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R})$

В этом параграфе мы сформулируем один из результатов работы [6], с помощью которого можно проверять ограниченность линейных операторов на пространстве  $H^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $0 < p \leq 1$  (это пространство было определено в предыдущем параграфе).

Для начала введем некоторые обозначения. Рассмотрим набор индексов  $\gamma \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Через  $\mathbb{R}^\gamma$  обозначим подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , порождаемое единичными координатными векторами  $e_s$ , где  $s$  пробегает  $\gamma$ . Дополнение подмножества  $\gamma$  до множества  $\{1, \dots, n\}$  обозначим через  $\gamma'$  (таким образом,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^\gamma \oplus \mathbb{R}^{\gamma'}$ ). Символом  $x_\gamma$  будем обозначать ортогональную проекцию вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  на  $\mathbb{R}^\gamma$ . Также обозначим через  $\mathbb{Z}^\gamma$  ( $\mathbb{N}^\gamma$ ) множество наборов целых (натуральных) чисел, пронумерованных индексами из множества  $\gamma$ . В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

**Определение 3.** Пусть  $a$  – функция из  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (скалярно-значная или  $l^2$ -значная). Будем говорить, что  $a$  –  $(N, p, \gamma)$ -предатом (здесь  $N$  – целое неотрицательное число), если выполняются следующие условия:

- (i)  $\text{supp } a \subset \Delta \times \mathbb{R}^{\gamma'}$ , где  $\Delta \subset \mathbb{R}^\gamma$  – параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат,
- (ii)  $\|a\|_{L^2} \leq |\Delta|^{1/2-1/p}$  и
- (iii) если  $s \in \gamma$ , то  $\int a(x) x_s^r dx_s = 0$  при  $0 \leq r \leq N$  и при почти всех  $(x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n)$ .

Заметим, что мы можем рассматривать предатом  $a$  как функцию из пространства  $L^2(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))$ , сосредоточенную на параллелепипеде  $\Delta$ . В ситуации, когда  $\gamma = \{1, \dots, n\}$ , будем говорить, что  $a$  –  $(N, p)$ -предатом.

Теперь рассмотрим оператор  $T$ , действующий ограниченно из  $L^2(\mathbb{R}^n)$  в  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (каждое из пространств  $L^2(\mathbb{R}^n)$  может состоять как из скалярно-значных функций, так и из  $l^2$ -значных). Предположим, что он обладает ядром  $K(x, y)$ , то есть равенство

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$$

справедливо для любой функции  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  с компактным носителем, если только  $x \notin \text{supp } f$ . Далее, рассмотрим множество индексов

$\gamma \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Пусть  $l$  – набор натуральных чисел из  $\mathbb{N}^\gamma$  и  $\Delta$  – параллелепипед в  $\mathbb{R}^\gamma$ , являющийся прямым произведением отрезков  $I_s$ ,  $s \in \gamma$ . Через  $\Theta$  обозначим гладкую функцию, сосредоточенную на отрезке  $[1, 4]$ , такую, что

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \Theta(|t|/2^m) \equiv 1$$

на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Нам понадобятся функции  $\Theta_{I_s, l_s}(t) = \Theta(2^{-(l_s+2)}|I_s|^{-1}|t|)$ . Через  $T_{\Delta, l}^\gamma$  обозначим оператор, ядро которого определяется формулой

$$K_{\Delta, l}^\gamma(x, y) = K(x, y) \prod_{s \in \gamma} \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s).$$

Для оператора  $T_{\Delta, l}^{\{1, \dots, n\}}$  будем использовать обозначение  $T_{\Delta, l}$ . С помощью атомного разложения в пространстве  $H^p(\mathbb{R}^n)$  и различных модификаций леммы Журне о покрытиях, в [6] доказывается следующий результат.

**Теорема** (Кэрбэри, Сигер). Пусть оператор  $T$  такой, как описано выше (то есть ограниченный на  $L^2(\mathbb{R}^n)$  и обладающий ядром). Пусть  $0 < p \leq 1$  и  $\varepsilon > 0$ . Предположим, что при достаточно большом  $N$  и любом  $\gamma \subseteq \{1, \dots, n\}$ ,  $1 \leq |\gamma| \leq n - 1$ , верно, что для любого  $(N, p, \gamma)$ -предатома  $a$ , сосредоточенного на параллелепипеде  $\Delta$  (если рассматривать его как функцию, заданную на  $\mathbb{R}^\gamma$  и действующую в  $L^2(\mathbb{R}^{\gamma'})$ ), и любого  $l \in \mathbb{N}^\gamma$  выполняется оценка

$$\begin{aligned} \|T_{\Delta, l}^\gamma a\|_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}^p &= \int_{\mathbb{R}^\gamma} \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |(T_{\Delta, l}^\gamma a)(x_\gamma, x_{\gamma'})|^2 dx_{\gamma'} \right)^{p/2} dx_\gamma \\ &\leq C \prod_{s \in \gamma} 2^{-\varepsilon l_s}. \end{aligned} \quad (7)$$

Также предположим, что при достаточно большом  $N$  и любом  $1 \leq r \leq n$  верно, что для любого  $(N, p)$ -предатома  $b$ , сосредоточенного на параллелепипеде  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ , и любого набора натуральных чисел  $(l_1, \dots, l_{r-1}, l_{r+1}, \dots, l_n)$  выполняется оценка

$$\left\| \sum_{l_r > 0} T_{\Delta, l} b \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq C \prod_{s \neq r} 2^{-\varepsilon l_s}, \quad (8)$$

где  $l = (l_1, \dots, l_n)$ . Тогда оператор  $T$  действует ограниченно из  $H^p(\mathbb{R}^n)$  в  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Заметим, что, согласно [6], достаточно рассматривать лишь предатомы, сосредоточенные на диадических параллелепипедах, но этот факт нигде нами в дальнейшем не используется, поэтому в формулировке теоремы Кэрбэри–Сигера мы сознательно его опустили.

#### 4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ $S$ И $R$

Этот параграф является почти дословным повторением соответствующего параграфа из работы [5], в которой рассматривалась ситуация  $n = 2$ . Мы покажем, как свести сформулированную нами теорему к утверждениям об ограниченности двух вспомогательных операторов.

Так как все наши оценки не будут зависеть от числа параллелепипедов  $\Delta_m$ , то мы можем считать, что их множество конечно. Вначале рассмотрим частный случай, когда все параллелепипеды  $\Delta_m$  могут быть получены из некоторых диадических путем увеличения длин сторон в 8 раз с сохранением координат левой нижней вершины. То есть каждому параллелепипеду  $\Delta_m$  мы можем сопоставить мультииндекс  $(k, j) = (k_1, \dots, k_n, j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$  такой, что

$$\Delta_m = [j_1 2^{k_1}, (j_1 + 8) 2^{k_1}] \times \dots \times [j_n 2^{k_n}, (j_n + 8) 2^{k_n}].$$

Также предположим, что  $\text{supp } \widehat{f}_m \subset \frac{3}{4} \cdot \Delta_m$ . Сделаем следующее техническое замечание.

**Замечание.** Любой параллелепипед  $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  можно поместить в параллелепипед  $\Delta = I_1 \times \dots \times I_n$ , имеющий такой вид, как мы описали, причем так, что длины соответствующих отрезков будут сравнимы (то есть  $|I_s| \asymp |[a_s, b_s]|$ ) и  $R \subset \frac{3}{4} \cdot \Delta$ .

Действительно, пусть  $I_s = [j_s 2^{k_s}, (j_s + 8) 2^{k_s}]$ , где степень  $k_s$  такая, что  $2^{k_s} \leq |[a_s, b_s]| < 2^{k_s+1}$  и  $j_s = \sup\{j \in \mathbb{Z} \mid (j+1) 2^{k_s} < a_s\}$ . Нетрудно видеть, что  $|I_s| \asymp |[a_s, b_s]|$  и  $[a_s, b_s] \subset \frac{3}{4} \cdot I_s$ . Параллелепипед  $\Delta = I_1 \times \dots \times I_n$  будет искомым.

Теперь докажем теорему для описанного частного случая. Пусть  $\mathcal{A}$  – множество мультииндексов, соответствующих параллелепипедам  $\Delta_m$ . Пусть  $h = \{h_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^{2n}} \in L^2(\mathbb{R}^n, l^2)$ . Нам потребуется оператор

$S$ , который задаётся формулой

$$S(h)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k,j) \in \mathcal{A}} e^{2\pi i j_1 2^{k_1} x_1} \dots e^{2\pi i j_n 2^{k_n} x_n} (\Phi_k * h_{k,j})(x_1, \dots, x_n),$$

где  $\Phi_k(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{k_1}(x_1) \dots \varphi_{k_n}(x_n)$ , а функции  $\varphi_{k_s}$ , в свою очередь, определяются так: пусть  $\varphi$  – функция из класса Шварца на  $\mathbb{R}$  такая, что ее преобразование Фурье неотрицательно и равно нулю вне отрезка  $[0, 8]$  и единице на отрезке  $[1, 7]$ , тогда  $\varphi_{k_s}(t) = 2^{k_s} \varphi(2^{k_s} t)$ .

**Лемма 3.** *Оператор  $S$  действует ограниченно из  $H^p(\mathbb{R}^n, l^2)$  в  $L^p(\mathbb{R}^n)$  при  $0 < p \leq 2$ , причем оценочная постоянная зависит только от  $p$  и  $n$ .*

Доказательство этой леммы мы временно отложим. Покажем, что если она верна, то наша теорема доказана для описанного частного случая. Пусть  $g_{k,j} \equiv 0$ , если  $(k,j) \notin \mathcal{A}$ , и

$$g_{k,j}(x_1, \dots, x_n) = e^{-2\pi i j_1 2^{k_1} x_1} \dots e^{-2\pi i j_n 2^{k_n} x_n} f_m(x_1, \dots, x_n),$$

если мультииндекс  $(k,j) \in \mathcal{A}$  соответствует параллелепипеду  $\Delta_m$ . Заметим, что носители преобразований Фурье ненулевых функций  $g_{k,j}$  лежат в параллелепипедах

$$\frac{3}{4} \cdot \Delta_m - (j_1 2^{k_1}, \dots, j_n 2^{k_n}) = [2^{k_1}, 7 \cdot 2^{k_1}] \times \dots \times [2^{k_n}, 7 \cdot 2^{k_n}].$$

Отсюда по теореме Планшереля следует, что  $g_{k,j} = \Phi_k * g_{k,j}$ . Обозначим  $g = \{g_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^{2n}}$ . Учитывая только что сказанное и пользуясь леммами 1 и 3, получаем

$$\left\| \sum_m f_m \right\|_{L^p} = \|S(g)\|_{L^p} \leq C_p \|g\|_{H^p(l^2)} \leq C'_p \|g\|_{L^p(l^2)} = C'_p \|\{f_m\}\|_{L^p(l^2)}.$$

Таким образом, выполняется нужная оценка.

Теперь сведем теорему к рассмотренному частному случаю. Нам потребуется еще один вспомогательный оператор. Пусть  $\psi$  – функция из класса Шварца на  $\mathbb{R}$  такая, что  $\widehat{\psi} \geq 0$  и  $\text{supp } \widehat{\psi} \subset [A^{-1}, A]$ , где  $A > 1$ . Положим  $\psi_k(t) = A^k \psi(A^k t)$ ,  $k \geq 0$ . Заметим, что  $\text{supp } \widehat{\psi}_k \subset [A^{k-1}, A^{k+1}]$ . Пусть  $\Psi_{k_1, \dots, k_n}(x_1, \dots, x_n) = \psi_{k_1}(x_1) \dots \psi_{k_n}(x_n)$  и  $\{h_m\} \in L^2(\mathbb{R}^n, l^2)$ , тогда нужный нам оператор  $R$  будет задаваться формулой

$$R(h_1, h_2, \dots) = (r(h_1), r(h_2), \dots),$$

где

$$r(h_m) = \{h_m * \Psi_{k_1, \dots, k_n}\}_{k_1, \dots, k_n=0}^L.$$

**Лемма 4.** Оператор  $R$  действует ограниченно из  $H^p(\mathbb{R}^n, l^2)$  в  $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$  при  $0 < p \leq 2$ , причем оценочная постоянная не зависит от  $L$ .

Доказательство этой леммы мы также отложим. В оставшейся части этого параграфа будет показано, как, используя оператор  $R$ , можно свести все к частному случаю, рассмотренному ранее. Это рассуждение не содержит никаких новых идей по сравнению с соответствующими рассуждениями для прямой  $\mathbb{R}$  в работе [12] (хотя ситуация там была несколько иной) или для плоскости  $\mathbb{R}^2$  в работе [5]. Мы наметим их и здесь исключительно для полноты.

Итак, для начала заметим, что растяжением можно добиться (без потери общности) того, чтобы длины отрезков, произведениями которых являются параллелепипеды  $\Delta_m = [a_1^m, b_1^m] \times \dots \times [a_n^m, b_n^m]$ , были не меньше 1. Зафиксируем число  $A$ , достаточно близкое к единице, а функцию  $\psi$  выберем так, чтобы  $\sum_{k \geq 0} \widehat{\psi}_k(t) = 1$  при  $t \geq 1$ . Обозначив

$a_m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$  и  $\theta = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ , введем функции  $g_m(x) = e^{-2\pi i \langle a_m - \theta, x \rangle} f_m(x)$ . “Измельчив” носители функций  $\widehat{g}_m$  с помощью оператора  $R$  и сместив их обратно, получим функции  $f_{m, k_1, \dots, k_n}(x) = e^{2\pi i \langle a_m - \theta, x \rangle} (g_m * \Psi_{k_1, \dots, k_n})(x)$ , причем  $f_m = \sum_{k_1, \dots, k_n} f_{m, k_1, \dots, k_n}$  (при

каждом  $m$  суммирование обрывается на конечном числе слагаемых – когда носитель функции  $\widehat{\Psi}_{k_1, \dots, k_n}$  покидает параллелепипед  $\Delta_m$ ). Рассматривая последовательность  $\{f_{m, k_1, \dots, k_n}\}$  как функцию из пространства  $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$  и пользуясь леммами 1 и 4, получаем:

$$\begin{aligned} \|\{f_{m, k_1, \dots, k_n}\}\|_{L^p(l^2)} &= \|R(\{g_m\})\|_{L^p(l^2)} \\ &\leq C_{p,A} \|\{g_m\}\|_{H^p(l^2)} \leq C'_{p,A} \|\{g_m\}\|_{L^p(l^2)} = C'_{p,A} \|\{f_m\}\|_{L^p(l^2)}. \end{aligned}$$

Далее, пусть  $N$  – фиксированное достаточно большое натуральное число (например,  $N = 100$ ). Разобьем последовательность  $\{f_{m, k_1, \dots, k_n}\}$  на  $N^n$  подпоследовательностей – в соответствии с остатками от деления индексов  $k_s$  на  $N$  в каждой группе (то есть при одном значении  $m$ ). Учитывая сказанное выше, теорему достаточно доказать отдельно для каждой подпоследовательности. Если в такой подпоследовательности из каждой группы исключить функции, у которых максимален один из индексов  $k_s$ , то носители преобразований Фурье оставшихся функций можно поместить в непересекающиеся параллелепипеды, соответствующие частному случаю, описанному выше. Для этого нужно выбрать число  $A$  достаточно близким

к единице и воспользоваться техническим *замечанием*, которое мы сделали в начале параграфа. Теперь разберемся с оставшимися функциями. Сдвинем носители их преобразований Фурье, лежащие в некоторых параллелепипедах  $\delta_r = [c_1^r, d_1^r] \times \dots \times [c_n^r, d_n^r]$ , так, чтобы вершины  $(d_1^r, \dots, d_n^r)$  попали в точку  $(-1, -1, \dots, -1) \in \mathbb{R}^n$ , после чего применим технику, описанную выше (но работая с функциями, антианалитическими по всем переменным и с аналогом оператора  $R$ , действующим на таких функциях).

5. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРОВ  $S$  И  $R$

Ограниченность операторов  $S$  и  $R$  на пространстве  $L^2$  следует из теоремы Планшереля. Таким образом, согласно теореме Кэrbэри–Сигера, чтобы доказать, что рассматриваемые операторы действуют ограниченно из  $H^p$  в  $L^p$  при  $0 < p \leq 1$ , нужно проверить, что для них выполняются оценки (7) и (8). Для  $1 < p < 2$  ограниченность следует из интерполяционных соображений (см., например, работу [13, стр. 451], результаты которой легко переносятся с тора на пространство  $\mathbb{R}^n$ ).

Сначала рассмотрим оператор  $S$ . Нам понадобится следующее утверждение, доказательство которого будет проведено в последнем параграфе.

**Лемма 5.** *Зададим последовательность функций*

$$\kappa(x, y) = \{\kappa_{k,j}(x, y)\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^2} = \{e^{2\pi i 2^k j x} \varphi_k(x - y)\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^2}$$

(напомним, что функции  $\varphi_k$  были введены нами при определении оператора  $S$ ). Пусть  $N \geq 0$  – целое число. Тогда для всякого отрезка  $I \subset \mathbb{R}$  и любого натурального числа  $l \geq 1$  найдется такая  $l^2$ -значная функция  $p_{I,l}(x, y)$ , являющаяся полиномом степени не выше  $N$  по  $y$ , что при всех  $\xi = \{\xi_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^2} \in l^2$  и всех  $y \in I$  выполняется оценка

$$\left( \int_I \left| \langle \kappa(x, y) \Theta_{I,l}(x - y) - p_{I,l}(x, y), \xi \rangle_{l^2} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq C_N 2^{-lB_N} |I|^{-1/2} |\xi|_{l^2}, \tag{9}$$

причем  $B_N > 1$  и  $B_N \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ . Здесь  $\tilde{I}^l = 2^{l+10}I \setminus 2^lI$ , а  $\Theta_{I,l}$  – функции, определенные нами в §3.

Подобные оценки встречались в работах, посвященных одномерному случаю (см., например, [1]), однако в них пары  $(k, j)$  пробегали не все множество  $\mathbb{Z}^2$ , а только некоторое его подмножество  $\mathcal{B} \in \mathbb{Z}^2$  такое, что  $\sum_{(k,j) \in \mathcal{B}} |\widehat{\varphi}_k(x - 2^k j)|^2 \leq C$ . В такой ситуации последовательность  $\{\kappa_{k,j}(x, y)\}_{(k,j) \in \mathcal{B}}$  оказывалась ядром некоторого оператора типа Кальдерона–Зигмунда (одномерного аналога оператора  $S$ ), причем его  $L^2$ -ограниченность следовала (по теореме Планшереля) из упомянутого ограничения на множество пар  $(k, j)$ . Однако, лемма 5 верна и без подобных ограничений, и именно это обстоятельство позволит нам оценить оператор  $S$  (то есть рассмотреть случай  $n$  измерений).

Построим оператор  $S_{\Delta, l}^\gamma$  и проверим для него оценку (7). Не умаляя общности, можем считать, что  $\gamma = \{1, 2, \dots, r\}$ , где  $r \leq n - 1$ . Пусть  $N$  – достаточно большое целое число и  $a = \{a_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^{2n}}$  – произвольный  $l^2$ -значный  $(N, p, \gamma)$ -предатом, заданный (если его рассматривать как функцию, действующую из  $\mathbb{R}^\gamma$  в  $L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}, l^2)$ ) на параллелепипеде  $\Delta = I_1 \times \dots \times I_r \subset \mathbb{R}^\gamma$ . Пусть  $l \in \mathbb{N}^\gamma$ . Тогда  $S_{\Delta, l}^\gamma$  – оператор, ядро которого задается формулой

$$K_{\Delta, l}^\gamma(x, y) = \left\{ e^{2\pi i 2^{k_1} j_1 x_1} \dots e^{2\pi i 2^{k_n} j_n x_n} \Phi_k(x - y) \prod_{s=1}^r \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) \right\}_{(k,j) \in \mathcal{A}}.$$

Нам понадобятся некоторые вспомогательные обозначения. Пусть  $k_\gamma = (k_1, \dots, k_r)$  и  $k_{\gamma'} = (k_{r+1}, \dots, k_n)$ . Аналогично определим наборы  $j_\gamma$  и  $j_{\gamma'}$ . Пусть

$$h = \{h_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'}}\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}} \in L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}, l^2).$$

Определим вспомогательные операторы  $S_{k_\gamma, j_\gamma}$  формулой

$$S_{k_\gamma, j_\gamma}(h)(x_{\gamma'}) = \sum_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}} \chi_{\mathcal{A}}(k, j) \left( \prod_{s=r+1}^n e^{2\pi i 2^{k_s} j_s x_s} \right) (\Phi_{k_{\gamma'}} * h_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'}})(x_{\gamma'}),$$

где  $k = (k_\gamma, k_{\gamma'})$ ,  $j = (j_\gamma, j_{\gamma'})$  и  $\Phi_{k_{\gamma'}}(x_{\gamma'}) = \varphi_{k_{r+1}}(x_{r+1}) \dots \varphi_{k_n}(x_n)$ . Заметим, что при фиксированных наборах  $k_\gamma$  и  $j_\gamma$  у параллелепипедов  $\Delta_m = I_1^m \times \dots \times I_n^m$ , соответствующих мультииндексам



$(k_\gamma, k_{\gamma'}, j_\gamma, j_{\gamma'}) \in \mathcal{A}$ , будут совпадать отрезки  $I_s^m$ ,  $s \in \gamma$ , а значит проекции  $I_{r+1}^m \times \dots \times I_n^m \in \mathbb{R}^{\gamma'}$  будут попарно непересекающимися (так как  $\Delta_m$  – попарно непересекающиеся параллелепипеды). Отсюда по теореме Планшереля получаем, что операторы  $S_{k_\gamma, j_\gamma}$  ограничены на пространстве  $L^2$ . Используя эти операторы, можем написать:

$$\begin{aligned} S_{\Delta, l}^\gamma(a)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \int_{\Delta} \langle K_{\Delta, l}^\gamma(x_\gamma, x_{\gamma'}, y_\gamma, y_{\gamma'}), a(y_\gamma, y_{\gamma'}) \rangle dy_\gamma dy_{\gamma'} \\ &= \int_{\Delta} \sum_{k_\gamma, j_\gamma \in \mathbb{Z}^\gamma} S_{k_\gamma, j_\gamma} \left( \{a_{k, j}(y_\gamma, \cdot)\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}} \right) (x_{\gamma'}) \\ &\quad \times \prod_{s=1}^r e^{2\pi i 2^{k_s} j_s x_s} \varphi_{k_s}(x_s - y_s) \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) dy_\gamma. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь  $\{a_{k, j}(y_\gamma, \cdot)\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}}$  – набор компонент предатома  $a$ , соответствующих фиксированному подиндексу  $(k_\gamma, j_\gamma)$  и пронумерованных подиндексами  $(k_{\gamma'}, j_{\gamma'})$ . Зафиксировав переменную  $y_\gamma$ , мы применяем оператор  $S_{k_\gamma, j_\gamma}$  к этому набору, после чего выписываем те множители из ядра  $K_{\Delta, l}^\gamma(x, y)$ , которые не участвуют в определении операторов  $S_{k_\gamma, j_\gamma}$ . Далее будем обозначать:

$$\begin{aligned} \xi_0(x_{\gamma'}, y_\gamma) &= \{\xi_{k_\gamma, j_\gamma}^0(x_{\gamma'}, y_\gamma)\}_{k_\gamma, j_\gamma \in \mathbb{Z}^\gamma} \\ &= \left\{ S_{k_\gamma, j_\gamma} \left( \{a_{k, j}(y_\gamma, \cdot)\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}} \right) (x_{\gamma'}) \right\}_{k_\gamma, j_\gamma \in \mathbb{Z}^\gamma}. \end{aligned}$$

Используя это обозначение, перепишем последнее выражение в (10) так:

$$\int_{\Delta} \sum_{k_\gamma, j_\gamma \in \mathbb{Z}^\gamma} \xi_{k_\gamma, j_\gamma}^0(x_{\gamma'}, y_\gamma) \prod_{s=1}^r e^{2\pi i 2^{k_s} j_s x_s} \varphi_{k_s}(x_s - y_s) \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) dy_\gamma. \tag{11}$$

Так как у предатома  $a$  равны нулю первые  $N$  моментов по первым  $r$  переменным, то, когда мы применяем к нему оператор  $S_{\Delta, l}^\gamma$ , мы можем заменить множитель

$$e^{2\pi i 2^{k_1} j_1 x_1} \varphi_{k_1}(x_1 - y_1) \Theta_{I_1, l_1}(x_1 - y_1)$$

из ядра  $K_{\Delta, l}^{\gamma}(x, y)$  на выражение

$$e^{2\pi i 2^{k_1} j_1 x_1} \varphi_{k_1}(x_1 - y_1) \Theta_{I_1, l_1}(x_1 - y_1) - p(x_1, y_1),$$

где  $p(x_1, y_1)$  – произвольный полином по  $y_1$ , степени не выше  $N$ . Пользуясь этим, можем переписать (11) в виде

$$\int_{\Delta} \sum_{\substack{k_2, \dots, k_r, \\ j_2, \dots, j_r \in \mathbb{Z}}} \left\langle \kappa(x_1, y_1) \Theta_{I_1, l_1}(x_1 - y_1) - p_{I_1, l_1}(x_1, y_1), \{ \xi_{k_\gamma, j_\gamma}^0(x_{\gamma'}, y_\gamma) \}_{k_1, j_1 \in \mathbb{Z}} \right\rangle \\ \times \prod_{s=2}^r e^{2\pi i 2^{k_s} j_s x_s} \varphi_{k_s}(x_s - y_s) \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) dy_\gamma. \quad (12)$$

Здесь мы у последовательности  $\xi_0$  зафиксировали индексы  $k_2, \dots, k_r$  и  $j_2, \dots, j_r$ , после чего получившийся при этом набор (проиндексированный парами  $(k_1, j_1)$ ) скалярно умножили на разность  $\kappa \cdot \Theta_{I_1, l_1} - p_{I_1, l_1}$ , где функции  $\kappa$  и  $p_{I_1, l_1}$  – такие, как в лемме 5, причем их компоненты также проиндексированы парами  $(k_1, j_1)$ . Далее, введем последовательность  $\xi_1$  по формуле

$$\xi_1(x_1, x_{\gamma'}, y_\gamma) = \left\{ \xi_{k_2, \dots, k_r, j_2, \dots, j_r}^1(x_1, x_{\gamma'}, y_\gamma) \right\}_{\substack{k_2, \dots, k_r, \\ j_2, \dots, j_r \in \mathbb{Z}}} \\ = \left\{ \left\langle \kappa(x_1, y_1) \Theta_{I_1, l_1}(x_1 - y_1) - p_{I_1, l_1}(x_1, y_1), \{ \xi_{k_\gamma, j_\gamma}^0(x_{\gamma'}, y_\gamma) \}_{k_1, j_1 \in \mathbb{Z}} \right\rangle \right\}_{\substack{k_2, \dots, k_r, \\ j_2, \dots, j_r \in \mathbb{Z}}}.$$

Вообще, определим  $r$  последовательностей  $\xi_s$  рекуррентными соотношениями

$$\xi_s(x_1, \dots, x_s, x_{\gamma'}, y_\gamma) = \left\{ \xi_{k_{s+1}, \dots, k_r, j_{s+1}, \dots, j_r}^s(x_1, \dots, x_s, x_{\gamma'}, y_\gamma) \right\}_{\substack{k_{s+1}, \dots, k_r, \\ j_{s+1}, \dots, j_r \in \mathbb{Z}}} \\ = \left\{ \left\langle \kappa(x_s, y_s) \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) - p_{I_s, l_s}(x_s, y_s), \right. \right. \\ \left. \left. \{ \xi_{k_s, \dots, k_r, j_s, \dots, j_r}^{s-1}(x_1, \dots, x_{s-1}, x_{\gamma'}, y_\gamma) \}_{k_s, j_s \in \mathbb{Z}} \right\rangle \right\}_{\substack{k_{s+1}, \dots, k_r, \\ j_{s+1}, \dots, j_r \in \mathbb{Z}}}. \quad (13)$$

Заметим, что у каждой следующей последовательности кратность меньше, чем у предыдущей, а  $\xi_r(x, y_\gamma)$  – просто скалярно-значная функция. В терминах последовательности  $\xi_1$  формула (12) переписывается так:

$$\int_{\Delta} \sum_{\substack{k_2, \dots, k_r, \\ j_2, \dots, j_r \in \mathbb{Z}}} \xi_{k_2, \dots, k_r, j_2, \dots, j_r}^1(x_1, x_{\gamma'}, y_\gamma) \\ \times \prod_{s=2}^r e^{2\pi i 2^{k_s} j_s x_s} \varphi_{k_s}(x_s - y_s) \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) dy_\gamma. \quad (14)$$

Теперь повторим  $r$  раз действия, благодаря которым мы перешли от выражения (11) к выражению (14). То есть, используя множитель

$$e^{2\pi i 2^{k_2} j_2 x_2} \varphi_{k_2}(x_2 - y_2) \Theta_{I_2, l_2}(x_2 - y_2),$$

заменяем элементы последовательности  $\xi_1$  в (14) на элементы последовательности  $\xi_2$  и так далее. В результате получим, что

$$S_{\Delta, l}^\gamma(a)(x) = \int_{\Delta} \xi_r(x, y_\gamma) dy_\gamma. \tag{15}$$

Далее будем обозначать  $\tilde{\Delta}^l = \tilde{I}_1^{l_1} \times \dots \times \tilde{I}_r^{l_r}$  (напомним, что  $\tilde{I}^l = 2^{l+10} I \setminus 2^l I$ ). Заметим, что  $\Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) = 0$ , когда  $y_s \in I_s$  и  $x_s \notin \tilde{I}_s^{l_s}$ . Пользуясь этим, получаем, что

$$\begin{aligned} \|S_{\Delta, l}^\gamma a\|_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}^p &= \int_{\tilde{\Delta}^l} \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |S_{\Delta, l}^\gamma(a)(x_\gamma, x_{\gamma'})|^2 dx_{\gamma'} \right)^{p/2} dx_\gamma \\ &\leq |\tilde{\Delta}^l|^{1-p/2} \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \int_{\tilde{\Delta}^l} |S_{\Delta, l}^\gamma(a)(x)|^2 dx_\gamma dx_{\gamma'} \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Последнюю оценку мы получили, воспользовавшись неравенством Гёльдера и изменив порядок интегрирования. Далее, используя для  $S_{\Delta, l}^\gamma(a)$  соотношение (15) и занося норму в пространстве  $L^2(\tilde{\Delta}^l)$  под знак интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \left( \int_{\tilde{\Delta}^l} |S_{\Delta, l}^\gamma(a)(x)|^2 dx_\gamma \right)^{1/2} &= \left( \int_{\tilde{\Delta}^l} \left| \int_{\Delta} \xi_r(x, y_\gamma) dy_\gamma \right|^2 dx_\gamma \right)^{1/2} \\ &\leq \int_{\Delta} \left( \int_{\tilde{\Delta}^l} |\xi_r(x, y_\gamma)|^2 dx_\gamma \right)^{1/2} dy_\gamma. \end{aligned}$$

Вспоминая определение последовательностей  $\xi_s$  и используя лемму 5,

приходим к оценке

$$\begin{aligned}
& \int_{\bar{I}_s^{l_s}} |\xi_s(x_1, \dots, x_s, x_{\gamma'}, y_\gamma)|_{l^2}^2 dx_s \\
&= \sum_{\substack{k_{s+1}, \dots, k_r, \bar{I}_s^{l_s} \\ j_{s+1}, \dots, j_r \in \mathbb{Z}}} \int \left| \left\langle \kappa(x_s, y_s) \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) - p_{I_s, l_s}(x_s, y_s), \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left\{ \xi_{k_s, \dots, k_r, j_s, \dots, j_r}^{s-1}(x_1, \dots, x_{s-1}, x_{\gamma'}, y_\gamma) \right\}_{k_s, j_s \in \mathbb{Z}} \right\rangle \right|^2 dx_s \\
&\quad \leq C_N 2^{-2l_s B_N} |I_s|^{-1} |\xi_{s-1}(x_1, \dots, x_{s-1}, x_{\gamma'}, y_\gamma)|_{l^2}^2.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись предыдущим соотношением  $r$  раз, получаем, что

$$\int_{\tilde{\Delta}^l} |\xi_r(x, y_\gamma)|^2 dx_\gamma \leq C_{N,r} |\Delta|^{-1} |\xi_0(x_{\gamma'}, y_\gamma)|_{l^2}^2 \prod_{s=1}^r 2^{-2l_s B_N}.$$

Собрав все вместе, а затем воспользовавшись неравенством Гёльдера и изменив порядок интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned}
& \|S_{\Delta, l}^\gamma a\|_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}^p \\
&\leq C_{N,r} |\tilde{\Delta}^l|^{1-p/2} |\Delta|^{-p/2} \prod_{s=1}^r 2^{-pl_s B_N} \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \left( \int_{\Delta} |\xi_0(x_{\gamma'}, y_\gamma)| dy_\gamma \right)^2 dx_{\gamma'} \right)^{p/2} \\
&\leq C_{N,r} |\tilde{\Delta}^l|^{1-p/2} \prod_{s=1}^r 2^{-pl_s B_N} \left( \int_{\Delta} \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |\xi_0(x_{\gamma'}, y_\gamma)|^2 dx_{\gamma'} dy_\gamma \right)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Вспомня определение последовательности  $\xi_0$  и пользуясь  $L^2$ -ограниченностью операторов  $S_{k_\gamma, j_\gamma}$ , получаем:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta} \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |\xi_0(x_{\gamma'}, y_{\gamma})|^2 dx_{\gamma'} dy_{\gamma} \\
& \leq \int_{\Delta} \sum_{k_{\gamma}, j_{\gamma} \in \mathbb{Z}^{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \left| S_{k_{\gamma}, j_{\gamma}} \left( \{a_{k,j}(y_{\gamma}, \cdot)\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}} \right) (x_{\gamma'}) \right|_{l^2}^2 dx_{\gamma'} dy_{\gamma} \\
& \leq \int_{\Delta} \sum_{k_{\gamma}, j_{\gamma} \in \mathbb{Z}^{\gamma}} \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \left| \{a_{k,j}(y_{\gamma}, x_{\gamma'})\}_{k_{\gamma'}, j_{\gamma'} \in \mathbb{Z}^{\gamma'}} \right|_{l^2}^2 dx_{\gamma'} dy_{\gamma} \\
& = \|a\|_{L^2}^2 \leq |\Delta|^{1-2/p}
\end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\begin{aligned}
\|S_{\Delta, l}^{\gamma} a\|_{L^p(\mathbb{R}^{\gamma}, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}^p & \leq C_{N,r} |\Delta|^{p/2-1} |\tilde{\Delta}^l|^{1-p/2} \prod_{s=1}^r 2^{-p l_s B_N} \\
& = C'_{N,r} \prod_{s=1}^r 2^{-l_s (p(B_N+1/2)-1)}.
\end{aligned}$$

Так как  $B_N \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ , то выбрав достаточно большое  $N$ , получим требуемую оценку.

Осталось проверить оценку (8). Для этого достаточно доказать, что для любого  $l^2$ -значного  $(N, p)$ -предатома  $b = \{b_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^{2n}}$  (при достаточно большом  $N$ ), заданного на параллелепипеде  $\Delta \in \mathbb{R}^n$ , и любого набора  $l \in \mathbb{N}^n$  выполняется оценка

$$\|S_{\Delta, l} b\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq C \prod_{s=1}^n 2^{-\varepsilon l_s},$$

где  $\varepsilon > 0$  – некоторое фиксированное число. Для этого рассмотрим последовательность  $\xi_0(y) = \{\xi_{k,j}^0(y)\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^{2n}}$  такую, что те ее компоненты, индекс которых принадлежит множеству  $\mathcal{A}$ , совпадают с соответствующими компонентами предатома  $b$ , а остальные компоненты тождественно равны нулю. Можем написать:

$$S_{\Delta, l}(b)(x) = \int_{\Delta} \sum_{k,j \in \mathbb{Z}^n} \xi_{k,j}^0(y) \prod_{s=1}^n e^{2\pi i 2^{k_s} j_s x_s} \varphi_{k_s}(x_s - y_s) \Theta_{l_s, l_s}(x_s - y_s) dy$$

Далее, определим  $r = n$  последовательностей  $\xi_s(x_1, \dots, x_s, y)$  с помощью тех же рекуррентных соотношений (13) (лишь заметим, что переменная  $x_{\gamma'}$  исчезает, ввиду того, что  $\gamma' = \emptyset$ ). В точности повторив те выкладки, с помощью которых мы пришли к равенству (15) при рассмотрении операторов  $S_{\Delta, l}^\gamma$ , получим, что

$$S_{\Delta, l}(b)(x) = \int_{\Delta} \xi_n(x, y) dy$$

Далее, действуя так же, как при рассмотрении операторов  $S_{\Delta, l}^\gamma$ , то есть  $n$  раз применяя лемму 5, придем к оценке

$$\|S_{\Delta, l} b\|_{L^p}^p \leq C_{N, n} |\tilde{\Delta}^l|^{1-p/2} \prod_{s=1}^n 2^{-pl_s B_N} \left( \int_{\Delta} |\xi_0(y)|^2 dy \right)^{p/2}.$$

Выражение справа, в свою очередь, не превосходит

$$C_{N, n} |\Delta|^{p/2-1} |\tilde{\Delta}^l|^{1-p/2} \prod_{s=1}^n 2^{-pl_s B_N} = C'_{N, n} \prod_{s=1}^n 2^{-l_s(p(B_N+1/2)-1)}.$$

Выбрав достаточно большое  $N$ , получим требуемую оценку.

Теперь проверим ограниченность оператора  $R$ . Его ядро  $\Lambda$  задается формулой

$$\Lambda(x, y) = \{\Psi_{k_1, \dots, k_n}(x-y)\}_{k_1, \dots, k_n=0}^L.$$

Значения этой функции суть линейные операторы из  $l^2$  в  $l^2_{\mathbb{N}^{n+1}}$ , где элементы векторов из  $l^2$  пронумерованы индексами  $m$ , а элементы векторов из  $l^2_{\mathbb{N}^{n+1}}$  — мультииндексами  $(m, k_1, \dots, k_n)$  (см. определение оператора  $R$ ). Обозначим через  $\rho$  одномерный аналог оператора  $R$ , то есть оператор, действующий из  $L^2(\mathbb{R}, l^2)$  в  $L^2(\mathbb{R}, l^2_{\mathbb{N}^2})$  по формуле

$$\rho(\{h_m\}) = \{h_m * \psi_k\}_{m \in \mathbb{N}, k=0, \dots, L}.$$

Заметим, что применить оператор  $R$  к некоторой функции от  $n$  переменных, это то же самое, что  $n$  раз последовательно применить оператор  $\rho$  к этой функции отдельно по каждой переменной при фиксированных остальных. Ядром оператора  $\rho$  является последовательность  $\lambda(x, y) = \{\psi_k(x-y)\}_{k=0}^L$ , причем выполняется следующая лемма.

**Лемма 6.** Для ядра  $\lambda(x, y)$  выполняется следующее условие гладкости:

$$|\lambda(x, y)\Theta_{I,l}(x - y) - p_{I,l}(x, y)|_{l^2} \leq \frac{C_N |I|^{N+1}}{|x - y_0|^{N+2}}, \quad (16)$$

где  $N \geq 0$ ,  $I$  – произвольный конечный интервал в  $\mathbb{R}$ ,  $y_0$  – его центр,  $y \in I$ ,  $x \notin 2 \cdot I$ , а  $p_{I,l}(x, y)$  – некоторая  $l^2$ -значная функция, являющаяся полиномом степени не выше  $N$  по  $y$ .

Доказательство этой леммы мы также проведем в последнем параграфе. Используя ее, мы проверим ограниченность оператора  $R$  примерно так же, как мы проделали это для оператора  $S$ , причем выкладки будут значительно проще.

Снова, не умаляя общности, будем считать, что  $\gamma = \{1, 2, \dots, r\}$ , где  $r \leq n - 1$ . Пусть  $a = \{a_m\}$  – произвольный  $l^2$ -значный  $(N, p, \gamma)$ -предатом ( $N$  – достаточно большое), заданный на параллелепипеде  $\Delta = I_1 \times \dots \times I_r \subset \mathbb{R}^\gamma$ . Пусть  $l \in \mathbb{N}^\gamma$ . Мы должны проверить оценку (7) для оператора  $R_{\Delta,l}^\gamma$ , ядро которого задается формулой

$$\Lambda_{\Delta,l}^\gamma(x, y) = \left\{ \Psi_{k_1, \dots, k_n}(x - y) \prod_{s=1}^r \Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) \right\}_{k_1, \dots, k_n=0}^L.$$

Через  $\rho^{\gamma'}$  будем обозначать  $|\gamma'|$ -мерный аналог оператора  $R$ , действующий по переменным  $x_s, s \in \gamma'$ , то есть оператор, заданный формулой

$$\rho^{\gamma'}(\{h_m\})(x_{\gamma'}) = \left\{ (h_m * \Psi_{k_{r+1}, \dots, k_n})(x_{\gamma'}) \right\}_{k_{r+1}, \dots, k_n=0, m \in \mathbb{N}}^L$$

где  $h = \{h_m\}$  – функция, заданная на подпространстве  $\mathbb{R}^{\gamma'}$  и  $\Psi_{k_{r+1}, \dots, k_n}(x_{\gamma'}) = \psi_{k_{r+1}}(x_{r+1}) \dots \psi_{k_n}(x_n)$ . Пользуясь тем, что у предатома  $a$  равны нулю первые  $N$  моментов по первым  $r$  переменным, в этих обозначениях получаем, что

$$\begin{aligned} (R_{\Delta,l}^\gamma a)(x) &= \int_{\Delta} (\lambda(x_1, y_1)\Theta_{I_1, l_1}(x_1 - y_1) - p_{I_1, l_1}(x_1, y_1)) \\ &\dots (\lambda(x_r, y_r)\Theta_{I_r, l_r}(x_r - y_r) - p_{I_r, l_r}(x_r, y_r)) \rho^{\gamma'}(a(y_\gamma, \cdot))(x_{\gamma'}) dy_\gamma, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $p_{I_s, l_s}$  – полиномы из леммы 6. Пользуясь тем, что  $\Theta_{I_s, l_s}(x_s - y_s) = 0$  при  $y_s \in I_s$  и  $x_s \notin \tilde{I}_s^l$ , можем написать:

$$\|R_{\Delta,l}^\gamma a\|_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}^p = \int_{\tilde{\Delta}^l} \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |R_{\Delta,l}^\gamma(a)(x_\gamma, x_{\gamma'})|_{l^2}^2 dx_{\gamma'} \right)^{p/2} dx_\gamma.$$

Используя выражение (17) для оператора  $R_{\Delta,l}^\gamma$  и  $r$  раз применяя лемму 6, приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \left| R_{\Delta,l}^\gamma(a)(x_\gamma, x_{\gamma'}) \right|_{l_2} \\ & \leq C_N |\Delta|^{N+1} \prod_{s=1}^r |x_s - y_s^0|^{-(N+2)} \int_{\Delta} |\rho^{\gamma'}(a(y_\gamma, \cdot))(x_{\gamma'})|_{l_2} dy_\gamma. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|R_{\Delta,l}^\gamma a\|_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}^p & \leq C_{N,p} |\Delta|^{p(N+1)} \prod_{s=1}^r \int_{I_s^l} |x_s - y_s^0|^{-p(N+2)} dx_s \\ & \quad \times \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \left( \int_{\Delta} |\rho^{\gamma'}(a(y_\gamma, \cdot))(x_{\gamma'})|_{l_2} dy_\gamma \right)^2 dx_{\gamma'} \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Простейшие вычисления дают

$$\int_{I_s^l} |x_s - y_s^0|^{-p(N+2)} dx_s = C'_{N,p} (2^{l_s} |I_s|)^{1-p(N+2)}.$$

Занеся норму в пространстве  $L^2(\mathbb{R}^{\gamma'})$  под знак интеграла, воспользовавшись  $L^2$ -ограниченностью оператора  $\rho^{\gamma'}$  и применив неравенство Гёльдера, получим, что

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} \left( \int_{\Delta} |\rho^{\gamma'}(a(y_\gamma, \cdot))(x_{\gamma'})|_{l_2} dy_\gamma \right)^2 dx_{\gamma'} \right)^{p/2} \\ & \leq \left( \int_{\Delta} \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |\rho^{\gamma'}(a(y_\gamma, \cdot))(x_{\gamma'})|_{l_2}^2 dx_{\gamma'} \right)^{1/2} dy_\gamma \right)^p \\ & \leq \left( \int_{\Delta} \left( \int_{\mathbb{R}^{\gamma'}} |a(y_\gamma, x_{\gamma'})|_{l_2}^2 dx_{\gamma'} \right)^{1/2} dy_\gamma \right)^p \leq |\Delta|^{p/2} \|a\|_{L^2}^p \leq |\Delta|^{p-1}. \end{aligned}$$



Собрав все вместе, имеем

$$\|R_{\Delta,l}^\gamma a\|_{L^p(\mathbb{R}^\gamma, L^2(\mathbb{R}^{\gamma'}))}^p \leq C_{N,p}'' \prod_{s=1}^r 2^{l_s(1-p(N+2))}$$

Выбрав достаточно большое  $N$ , получим требуемую оценку. Оценка (8) проверяется аналогично ( $n$ -кратным применением леммы 6).

### 6. Условия гладкости

Для завершения доказательства нам осталось проверить леммы 5 и 6. Начнем с леммы 6. Заметим, что оценка, сходная с условием (16), проверяется, например, в работе [12], однако в ту оценку не входили функции  $\Theta_{I,l}$ . Участие этих функций в оценке (16) делает доказательство несколько более сложным технически. Итак, пусть  $I$  — конечный интервал в  $\mathbb{R}$ ,  $y_0$  — его центр,  $y \in I$  и  $x \notin 2 \cdot I$ . Пусть  $p_k(x, y) = P_{x-y_0,k}^{I,l}(x-y)$ , где  $P_{u,k}^{I,l}$  —  $N$ -й полином Тейлора для произведения  $\psi_k \Theta_{I,l}$  с центром в точке  $u$ . Тогда

$$|\psi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)| \leq c_N \sum_{\substack{0 \leq r, r' \leq N+1 \\ r+r'=N+1}} |y-y_0|^{N+1} |\psi_k^{(r)}(\tau)\Theta_{I,l}^{(r')}(\tau)|,$$

где  $\tau$  — некоторая точка между  $x-y$  и  $x-y_0$ . Поскольку функции  $\Theta$  и  $\psi$  из класса Шварца, их производные убывают быстрее любой степени. Пользуясь этим, а также тем, что  $|x-y| \asymp |x-y_0|$ , получаем:

$$\begin{aligned} & |y-y_0|^{N+1} |\psi_k^{(r)}(\tau)\Theta_{I,l}^{(r')}(\tau)| \\ &= |y-y_0|^{N+1} |A^{k(r+1)}\psi^{(r)}(A^k\tau)2^{-(l+2)r'}|I|^{-r'}\Theta^{(r')}(2^{-(l+2)}|I|^{-1}\tau)| \\ &\leq C_{N,v}|y-y_0|^{N+1}A^{k(r+1)}(A^k|x-y_0|)^{-v}(|x-y_0|)^{-r'}, \quad v = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если положить  $v = 0$  и  $v = r + 2$ , то получим две оценки:

$$|\psi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)| \leq C_N \sum_{\substack{0 \leq r, r' \leq N+1 \\ r+r'=N+1}} A^{k(r+1)} \frac{|I|^{N+1}}{|x-y_0|^{r'}}, \quad (18)$$

$$|\psi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)| \leq C_N(N+2)A^{-k} \frac{|I|^{N+1}}{|x-y_0|^{N+3}}. \quad (19)$$

Пользуясь оценкой (19), когда  $A^k \geq \frac{1}{|x-y_0|}$ , и оценкой (18) в остальных случаях, получим, что

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C'_N |I|^{N+1} \left( \sum_{k: A^k \geq |x-y_0|^{-1}} \frac{A^{-2k}}{|x-y_0|^{2(N+3)}} + \sum_{\substack{k: A^k < |x-y_0|^{-1} \\ 0 \leq r, r' \leq N+1 \\ r+r'=N+1}} \frac{A^{2k(r+1)}}{|x-y_0|^{2r'}} \right)^{1/2} \\ & \leq C''_N \frac{|I|^{N+1}}{|x-y_0|^{N+2}}. \end{aligned}$$

А это и есть оценка (16), если положить  $p_{I,l}(x,y) = \{p_k(x,y)\}_{k=0}^L$ .

Нам осталось доказать лемму 5. Утверждения, сходные с этой леммой, проверялись во многих работах, посвященных неравенству Литлвуда–Пэли (см., например, [1, 3, 5, 12]), но из-за участия в нашей оценке функций  $\Theta_{I,l}$  мы формально не можем сослаться ни на одну из них. Тем не менее, доказательство, которое мы приводим ниже, является, по сути, повторением соответствующего рассуждения из работы [12].

Итак, определим функции  $p_k(x,y)$  через полиномы Тейлора для произведений  $\varphi_k \Theta_{I,l}$  так же, как мы делали это при доказательстве оценки (16). Ясно, что оценки (18) и (19) будут верны для функций  $\varphi_k$  при  $A = 2$ . Положим

$$p_{I,l}(x,y) = \{e^{2\pi i 2^k j x} p_k(x,y)\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^2}.$$

Также обозначим

$$r_{k,l} = \sup_{x \in \bar{I}^l, y \in I} |\varphi_k(x-y)\Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x,y)|.$$

В этих обозначениях получаем:

$$\begin{aligned}
 & \left( \int_{\bar{I}^l} |\langle \kappa(x, y) \Theta_{I,l}(x-y) - p_{I,l}(x, y), \xi \rangle|^2 dx \right)^{1/2} \\
 & \leq \left( \int_{\bar{I}^l} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi_k(x-y) \Theta_{I,l}(x-y) - p_k(x, y)| \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \xi_{k,j} e^{2\pi i 2^k j x} \right| \right)^2 dx \right)^{1/2} \\
 & \leq \sum_k r_{k,l} \left( \int_{\bar{I}^l} \left| \sum_j \xi_{k,j} e^{2\pi i 2^k j x} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
 & \leq \left( \sum_k r_{k,l} \right)^{1/2} \left( \sum_k r_{k,l} \int_{\bar{I}^l} \left| \sum_j \xi_{k,j} e^{2\pi i 2^k j x} \right|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством треугольника в  $L^2$  и неравенством Коши для сумм. Далее, пользуясь оценками (18) и (19), получаем, что

$$r_{k,l} \leq C_N \sum_{\substack{0 \leq r, r' \leq N+1 \\ r+r'=N+1}} 2^{k(r+1)} |I|^r 2^{-lr'}, \quad r_{k,l} \leq C_N (N+2) 2^{-k} |I|^{-2} 2^{-(N+3)l}. \tag{21}$$

Используя первую оценку, когда  $2^k < |I|^{-1} 2^{-l}$ , и вторую в остальных случаях, получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_k r_{k,l} \\
 & \leq C_N \sum_{\substack{k: 2^k < |I|^{-1} 2^{-l} \\ 0 \leq r, r' \leq N+1 \\ r+r'=N+1}} 2^{k(r+1)} |I|^r 2^{-lr'} + C'_N \sum_{k: 2^k \geq |I|^{-1} 2^{-l}} 2^{-k} |I|^{-2} 2^{-(N+3)l} \\
 & \leq C''_N 2^{-l(N+2)} |I|^{-1}.
 \end{aligned}$$

Осталось оценить второй множитель в последнем выражении в (20). Сделав замену переменной  $t = 2^k x$  и воспользовавшись теоремой Рисса–Фишера, получим, что

$$\int_{2^{l+10} \cdot I} \left| \sum_j \xi_{k,j} e^{2\pi i 2^k j x} \right|^2 dx \leq \begin{cases} C 2^{l+10} |I| \sum_j |\xi_{k,j}|^2, & \text{если } 2^{l+10} |I| \geq 2^{-k} \\ 2^{-k} \sum_j |\xi_{k,j}|^2, & \text{если } 2^{l+10} |I| < 2^{-k}. \end{cases}$$

Пользуясь этими оценками, а также неравенствами (21), получаем:

$$\begin{aligned}
& \sum_k r_{k,l} \int_{\tilde{I}^l} \left| \sum_j \xi_{k,j} e^{2\pi i 2^k j x} \right|^2 dx \\
& \leq C |\xi|_{l^2}^2 \left( \sum_{k:2^k \geq |I|^{-1} 2^{-l-10}} r_{k,l} 2^{l+10} |I| + \sum_{k:2^k < |I|^{-1} 2^{-l-10}} r_{k,l} 2^{-k} \right) \\
& \leq C_N |\xi|_{l^2}^2 \left( \sum_{k:2^k \geq |I|^{-1} 2^{-l-10}} 2^{-k} 2^{-(N+2)l} |I|^{-1} + \sum_{\substack{k:2^k < |I|^{-1} 2^{-l-10} \\ 0 \leq r, r' \leq N+1 \\ r+r'=N+1}} 2^{kr} 2^{-lr'} |I|^r \right) \\
& \leq C'_N |\xi|_{l^2}^2 2^{-(N+1)l}.
\end{aligned}$$

Таким образом, лемма 5 доказана, причем  $B_N = N + 3/2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals*. — Rev. Mat. Iberoamer. **1**, No. 2 (1985), 1–14.
2. Jean-Lin Journé, *Calderón–Zygmund operators on product spaces*. — Rev. Mat. Iberoamer. **1**, No. 3 (1985), 55–91.
3. С. В. Кисляков, Д. В. Париров, *О теореме Литтлвуда–Пэли для произвольных интервалов*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **327** (2005), 98–114.
4. Robert Fefferman, *Calderón–Zygmund theory for product domains:  $H^p$  spaces*. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986), 840–843.
5. Н. Н. Осипов, *Неравенство Литтлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в  $\mathbb{R}^2$  при  $0 < p \leq 2$* . — Алгебра и анализ **22**, No. 2 (2010), 164–184.
6. Anthony Carbery, Andreas Seeger,  *$H^p$ - and  $L^p$ -variants of multiparameter Calderón–Zygmund theory*. — Trans. Amer. Math. Soc. **334**, No. 2 (1992), 719–747.
7. С. Fefferman, E. M. Stein,  *$H^p$  spaces of several variables*. — Acta Math. **129** (1972), 137–193.
8. R. F. Gundy, E. M. Stein,  *$H^p$  theory for the poly-disc*. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA **76** (1979), 1026–1029.
9. Shuichi Sato, *Lusin functions and nontangential maximal functions in the  $H^p$  theory on the product of upper half-spaces*. — Tôhoku Math. Journ. **37** (1985), 1–13.
10. Sun-Yung A. Chang, Robert Fefferman, *A continuous version of duality of  $H^1$  with BMO on the bidisc*. — Ann. of Math. **112**, No. 1 (1980), 179–201.
11. Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of function*. — Princeton, 1970.
12. С. В. Кисляков, *Теорема Литтлвуда–Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **355** (2008), 180–198.
13. Quanhua Xu, *Some properties of the quotient space  $(L^1(\mathbf{T}^d)/H^1(D^d))$* . — Illinois J. of Math. **37**, No. 3 (1993), 437–454.

Osipov N. N. One-sided Littlewood–Paley inequality in  $\mathbb{R}^n$  for  $0 < p \leq 2$ .

We prove the one-sided Littlewood–Paley inequality for arbitrary collections of mutually disjoint rectangular parallelepipeds in  $\mathbb{R}^n$  for the  $L^p$ -metric,  $0 < p \leq 2$ . The paper supplements the author's earlier work, which dealt with the situation of  $n = 2$ . That work was based on R. Fefferman's theory, which makes it possible to verify the boundedness of certain linear operators on two-parameter Hardy spaces (i.e., Hardy spaces on the product of two Euclidean spaces  $H^p(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$ ). However, Fefferman's results are not applicable in the situation where the number of Euclidean factors is greater than 2. Here we employ the more complicated Carbery–Seeger theory, which is a further development of Fefferman's ideas. It allows us to verify the boundedness of some singular integral operators on the multiparameter Hardy spaces  $H^p(\mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_n})$ , which leads eventually to the required inequality of Littlewood–Paley type.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
Фонганка 27, 191023 С.-Петербург, Россия  
*E-mail*: nicknick@pdmi.ras.ru

Поступило 10 апреля 2010 г.