



A. V. Khorosheva, Number of representations of local p -one-dimensional forms by the genus, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2001, Volume 276, 334–348

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

March 21, 2025, 08:06:52



А. В. Хорошева

ЧИСЛО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ p -ОДНОМЕРНЫХ ФОРМ РОДОМ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F = [Q]$ – род целочисленных положительно определенных квадратичных форм размерности n определителя $d = |Q|$; A – квадратичная форма размерности $m < n$ определителя $|A|$. Форма A представляется родом F , если хотя бы для одной формы $Q \in F$ матричное уравнение

$$Q[X] = {}^t X Q X = A, \quad (1)$$

имеет целое решение. Исследуется задача о нахождении количества примитивных представлений формы A родом F . Представление называется примитивным, если наибольший общий делитель его миноров порядка m равен 1. Вес примитивных представлений $pn(A; F)$ определяется формулой

$$pn(A; F) = \sum_{i=1}^h \frac{pr(A; Q_i)}{o(Q_i)},$$

где суммирование ведется по всем классам эквивалентности Q_i рода F ; $pr(A; Q_i)$ – число примитивных представлений формы A формой Q_i ; $o(Q_i)$ – порядок группы автоморфизмов Q_i . В [1] была получена общая формула Гаусса–Минковского для веса примитивных представлений квадратичных форм

$$pn(A; F) = c(n-m) \text{std}(n-m, |G|) \prod_{p|2ad} \alpha_p(A; Q), \quad (2)$$

где $c(n-m)$ – множитель, зависящий только от разности размерностей $n-m$; $\text{std}(n-m, |G|)$ – стандартная масса, равная произведению ζ -функции Римана и L -функции Дирихле; $\alpha_p(A; Q)$ – локальные множители, зависящие только от p -адических инвариантов формы A и рода F .

Если A – тернарная форма уровня a , F – одноклассный род, содержащий форму шестимерной решетки корней Госсета E_6 , то формула (2) для числа примитивных решений X (1) принимает вид [1]

$$pr(A; E_6) = 1440 \left(3 - \left(\frac{a_3}{3}\right)\right) \prod_{p|a} \left(p + \varepsilon_1(A) \left(\frac{3}{p}\right)\right), \quad (3)$$

где a – бесквадратное число, не делящееся на 3. Определитель d формы E_6 равен 3, и в формуле (3) предполагается отсутствие общих делителей для d и a . Если у d и a появляются общие делители, то нахождение числа представлений усложняется. В этом случае в формуле (2) выделяются ветвящиеся множители $\alpha_p(A; Q)$ для p , делящих одновременно a и d . В их вычислении состоит основная трудность.

В [2] был предложен один из способов нахождения ветвящихся множителей $\alpha_p(A; Q)$, который заключается в прямом вычислении $\alpha_p(A; Q)$ для p , делящих одновременно a и d , из формулы (2) для конкретной формы Q . Все остальные множители из (2) явно вычислены в [1], а $pn(A; Q)$ можно вычислить как взвешенное число решений уравнений (1) для всех $Q_i \in [Q]$. В [3] были найдены формулы для количества представлений чисел конкретными формами в случае ветвления. Во всех этих работах формы A и Q имеют жордановы разложения над \mathbb{Z}_p

$$Q \sim Q_1 \oplus pQ_p, \quad A \sim A_1 \oplus pA_p$$

с одномерными блоками Q_p и A_p . Для этого случая число примитивных представлений равно (2.21)

$$pr(A; E_6) = 1440 \left(9 + \left(\frac{a_3}{3}\right)\right) \prod_{p|a} \left(p + \varepsilon_1(A) \left(\frac{3}{p}\right)\right), \quad (4)$$

где a – бесквадратное число, делящееся на 3.

В данной статье исследуются формы Q и A с разложением над \mathbb{Z}_p

$$Q \sim Q_1 \oplus p^s Q_{p^s}, \quad A \sim A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu} \quad (5)$$

с одномерными блоками Q_{p^s} , A_{p^ν} и $\nu = 1, 2, 3$, $p \neq 2$, причем разность размерностей $n - m$ нечетна. Все основные результаты

представлены в теореме 1. Так, для E_6 и тернарной формы A степени $a = 3^\nu a_3$, $3 \nmid a_3$, из теоремы 1 получаем формулу

$$pr(A; E_6) = 1440 \cdot 3(9-1) \prod_{\substack{p^s \parallel a \\ s \geq 2}} p^{s-1} \left(p + \varepsilon_1(A) \left(\frac{3}{p} \right) \right), \quad (6)$$

если $\nu = 2$, $p \neq 2, 3$; и формулу

$$pr(A; E_6) = 1440 \cdot 9(9-1) \prod_{\substack{p^s \parallel a \\ s \geq 2}} p^{s-1} \left(p + \varepsilon_1(A) \left(\frac{3}{p} \right) \right), \quad (7)$$

если $\nu = 3$.

В формулах (4), (6–7) a и d имеют общий простой делитель $p = 3$. Особенности этого случая проясняются, если от кольца \mathbb{Z} перейти к кольцу целых p -адических чисел \mathbb{Z}_p и рассмотреть примитивные представления

$$Q[X] = A, \quad X \in M_{n,m}(\mathbb{Z}_p) \quad (8)$$

над локальным кольцом \mathbb{Z}_p . Если p не делит a и d одновременно, то решения X уравнения (8) образуют одну орбиту $\{X\}$. Если же p делит оба числа a и d , то имеет место явление ветвления и множественности орбит. С орбитами $\{X_i\}$ связываются неэквивалентные формы G_i размерности $n - m$ определителя

$$|G| = a^{n-m} |Q| / |A|,$$

и такая связь лежит в основе метода Гаусса, с помощью которого он получил формулу для суммы трех квадратов. Формулы (3–4), (6–7) отличаются локальными множителями

$$\alpha_3(A; E_6) = 3 - \left(\frac{a_3}{3} \right), \quad \alpha_3(A; E_6) = 9 + \left(\frac{a_3}{3} \right),$$

$$\alpha_3(A; E_6) = 3(9-1), \quad \alpha_3(A; E_6) = 9(9-1).$$

Множители $\alpha_p(A; Q)$ для простых p , делящих a и d , имеют сложную структуру и их вычисление представляет основную трудность. Для форм A и Q (5) существование ветвления проявляется в том, что $\alpha_p(A; Q)$ распадается в сумму

$$\alpha_p(A; Q) = \sum_{G_i} \alpha_p(A; Q, G_i).$$

Вычислить множители $\alpha_p(A; Q, G_i)$ значительно проще (§2), так как вычисление сводится к нахождению $c_p(A; Q, G_i)$ – числа решений $C \pmod A$ матричного сравнения

$$aA^{-1}[C] + G_i \equiv 0 \pmod{aZ_p}, \tag{9}$$

где a – степень формы A .

В основе доказательства теоремы 1 лежит классификация минимальных неразложимых представлений над \mathbb{Z}_p . Для $\nu = 1$ возможны всего два минимальных представления – одномерное и двумерное (1.2). При $\nu = 2$ появляется уже 7 видов минимальных представлений (1.3)–(1.5) размерностей один, два и три. Для $\nu = 3$ имеется 13 видов минимальных представлений (1.6)–(1.9), добавляются четырехмерные формы. Таким образом, найдя все виды форм G_i и число решений сравнений (9), можно вычислить соответствующий локальный множитель $\alpha_p(A; Q)$.

Для построения родов $F = [Q]$ с нужными характеристиками применяется метод ортогонального дополнения (§3). С его помощью получен двухклассный род $F_1 = \{Q_1, Q_2\}$, состоящий из неэквивалентных форм

$$Q_1 = 1_4 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = 1 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

с инвариантами $n = 6$, $d = 9$, $3_{F_1} = 1^{-5}9^{-1}$, $2_{F_1} = 1_{1,0}^{+6}$. Вес примитивных представлений одномерной формы $A = a$ родом F_1 вычисляется по формуле

$$pn(A, F_1) = 2^{-8}3^{-2}\alpha_2(A; Q)\alpha_3(A; Q) \prod_{\substack{p^s \parallel a \\ p \neq 2, 3}} p^{2(s-1)} \left(p^2 - \left(\frac{-1}{p} \right) \right)$$

с локальными множителями

$$\begin{aligned} \alpha_3(A; Q) &= \left(3^4 - \left(\frac{a3}{3} \right) \right) / 2, \text{ если } 3 \nmid a; \\ \alpha_3(A; Q) &= 3^2(3^4 - 1) / 2 = 360, \text{ если } 3 \parallel a; \\ \alpha_3(A; Q) &= 6480 + 9 \left(9 + \left(\frac{a3}{3} \right) \right), \text{ если } 3^2 \parallel a, \varepsilon_9(A) = +1; \\ \alpha_3(A; Q) &= 3^4(3^4 - 1) / 2 + 3^4 = 3321, \text{ если } 3^2 \parallel a, \varepsilon_9(A) = -1; \\ \alpha_3(A; Q) &= 3^6(3^4 - 1) / 2 + (3^2 - 1) = 29168, \text{ если } 3^3 \parallel a. \end{aligned}$$

Для тернарной формы $A \sim A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu}$, где $\nu = 0, 1, 2, 3$; $p = 3$, вес примитивных представлений родом F_1 по теореме 1 равен

$$pn(A; F_1) = \frac{1}{6} \alpha_2(A; Q) \alpha_3(A; Q) \prod_{p^s \parallel a} p^{s-1} (p + \varepsilon_1(A)),$$

где $p \neq 2, 3$, и при $3 \nmid a$ локальный множитель $\alpha_3(A; Q)$ вычисляется по формуле

$$\alpha_3(A; Q) = \left(9 - \left(\frac{a_3}{3} \right) \right) / 2.$$

При появлении общих делителей, когда уровень a равен $a = 3^\nu a_3$, получаем следующие множители ветвления:

при $\nu = 1$

$$\alpha_3(A; Q) = 3(9 - 1)/2 = 12;$$

при $\nu = 2$

$$\alpha_3(A; Q) = 9(9 - 1)/2 + 9 = 45, \text{ если } \varepsilon_9(A) = -1;$$

$$\alpha_3(A; Q) = 45 - 3 \cdot \varepsilon_1(A) \left(\frac{a_3}{3} \right), \text{ если } \varepsilon_9(A) = +1;$$

при $\nu = 3$

$$\alpha_3(A; Q) = 3^3(9 - 1)/2 + (3 + \varepsilon_1(A)) = 111 + \varepsilon_1(A).$$

Локальный множитель $\alpha_2(A; Q)$ вычисляется по формуле

$$\alpha_2(A; Q) = (4 + \varepsilon_2)/8,$$

где $\varepsilon_2 = \left(\frac{a_2 \cdot t(A)}{2} \right)$, если a – четное. Если a – нечетное, то

$$\alpha_2(A; Q) = (1 \pm 2^{-1})/4 \text{ при } \text{oct} \equiv \pm 1 \text{ или } \pm 3 \pmod{8},$$

где $\text{oct} \equiv -t(A) \pmod{8}$, если $\left(\frac{a_2}{2} \right) = +1$; $\text{oct} \equiv 4 - t(A) \pmod{8}$, если $\left(\frac{a_2}{2} \right) = -1$. Здесь $t(A)$ – странность формы A [4].

§1. МИНИМАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1.1. Исследуем вес примитивных представлений для форм A , имеющих жорданово разложение над кольцом целых p -адических чисел \mathbb{Z}_p

$$A \sim_p A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu}, \nu = 1, 2, 3$$

для всех простых $p > 2$, делящих одновременно a и d , причем размерность блока A_{p^ν} равна 1. Условие примитивности представлений равносильно существованию матрицы $Q_G^A(C)$, эквивалентной исходной матрице Q ,

$$Q_G^A(C) = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^t C & Q' \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $Q' = a^{-1}(E[C] + G)$, a – уровень формы A , то есть наименьшее положительное целое число, для которого матрица $E = aA^{-1}$ будет целочисленной, G – целая симметрическая матрица размерности $k = n - m$. Если в разложении (1.1) сцепляющую матрицу выбрать в виде $C = \begin{pmatrix} 0 \\ C_p \end{pmatrix}$ с блоком C_p высоты $\dim A_{p^\nu}$, то выполняется соотношение

$$pn(A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu}; Q) = pn(p^\nu A_{p^\nu}; Q \ominus A_1),$$

где форма $X = Q \ominus A_1$ – любая форма из разложения $Q = A_1 \oplus X$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что форма $A = p^\nu A_{p^\nu}$ одномерна.

1.2. В [5] были получены все возможные сцепляющие матрицы C и минимальные представления для $\nu = 1, 2, 3$.

Пусть форма G имеет жорданово разложение над \mathbb{Z}_p $G \sim \bigoplus_\alpha G_\alpha$ с блоками G_α , $\dim G_\alpha = k_\alpha$. Разобьем сцепляющие векторы C соответственно на блоки C_α длины k_α . Пусть $C = (C_0 | \dots | C_\alpha | \dots)$ и $G = G(C) \oplus G_{res}$, где $G(C)$ – прямая сумма всех блоков G_α , для которых $C_\alpha \not\equiv 0 \pmod{p^\nu}$. Тогда форма (1.1) распадается в прямую сумму

$$Q_G^A(C) \sim Q(C) \oplus \frac{1}{a} G_{res}, \text{ где } Q(C) = \begin{pmatrix} A & C_{\neq 0} \\ {}^t C_{\neq 0} & Q'(C) \end{pmatrix}.$$

Так, для $A = pA_p$, выбирая $C = (0 | \dots | 0)$ и $C = (C_{0, \text{fix}} | 0 \dots)$, получаем формы $Q(C) = A$ и $Q(C) = 1_2^-$, где $1_2^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому представления формы A формой Q распадаются на суммы минимальных представлений и число орбит $\{X\}$ решений уравнения (1) равно взвешенному числу разложений $Q \sim X \oplus Y$, где формы X имеют следующие вид и вес:

$$\begin{aligned} pX_1 &= pA_p, & \omega_1 &= 1, \\ X_{20} &= 1_2^-, & \omega_{20} &= 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

“Взвешенное” число означает, что каждое разложение засчитывается соответствующее ω число раз.

Если $A = p^2 A_{p^2}$, то добавляются сцепляющие матрицы C вида

$$C_{\text{fix}} = pC'_{\text{fix}} = (0|\dots|pC'_\alpha|0\dots)$$

с блоком $C'_\alpha = (10\dots 0)$ и $\alpha \geq 2$. Отсюда, уравнение (1) имеет число орбит $\{X\}$, равное взвешенному числу разложений $Q \sim X \oplus Y$, где формы X имеют следующие вид и вес.

1. Одномерные формы

$$p^2 X_1 = p^2 A_{p^2}, \quad \omega_1 = 1. \quad (1.3)$$

2. Двумерные формы

$$\begin{aligned} X_{20} &= 1_2^-, \quad pX_{20} = p1_2^-, \quad \omega_{20} = 1; \\ X_{22}^\eta &= 1^{\eta_1} \oplus p^2 \cdot 1^{\eta_2}, \quad \omega_{22}^\eta = (\eta); \\ X_{2\alpha} &= A_{p^2} \oplus p^\alpha \cdot 1^\pm \quad \text{для } \alpha > 2, \quad \omega_{2\alpha} = (p-1)/2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

3. Трехмерные формы

$$\begin{aligned} X_{32} &= 1_2^- \oplus p^2 A_{p^2}, \quad \omega_{32} = 1; \\ X_{3\alpha} &= A_{p^2} \oplus p^\alpha \cdot 1_2^- \quad \text{для } \alpha \geq 2, \quad \omega_{3\alpha} = 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(p-2-3 \left(\frac{-1}{p} \right) \right), & \text{если } \eta_1 = \eta_2 = \left(\frac{-a_p E}{p} \right), \\ \frac{1}{4} \left(p-2 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\eta_1 = \left(\frac{a_p(E+c)}{p} \right)$, $\eta_2 = \left(\frac{a_p(E^{-1}+c^{-1})}{p} \right)$. И в этом случае по теореме Витта [6] о продолжении изометрии двух подпространств до изометрии содержащих их невырожденных пространств, можно считать, что α -блок матрицы G равен

$$G_{p^\alpha} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^\perp(G_{p^\alpha}) \end{pmatrix} \text{ с } c = c_\alpha^{-1}, \text{ если } G_{p^\alpha}^{-1}[C'_\alpha] = c_\alpha \not\equiv 0 \pmod{p},$$

или

$$G_{p^\alpha} = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2^\perp(G_{p^\alpha}) \end{pmatrix} \text{ с } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ если } c_\alpha \equiv 0 \pmod{p}.$$

Для $A = p^3 A_{p^3}$, помимо векторов вида 1 и 2

$$(C_{0, \text{fix}}|0\dots) \text{ и } (0|\dots|0), (0|\dots|p^2 C'_\alpha|0\dots) \text{ с } \alpha \geq 3$$

в случае формы $G \sim \bigoplus_{\alpha \geq 2} p^\alpha G_{p^\alpha}$, где $k_0 = k_1 = 0, k_2 = 1$ и $G_{p^2} \sim -E$, появляются еще векторы третьего вида

$$(C_2|0\dots) \text{ с } C_2 = p(C'_2 + pC''_2), C''_2 \bmod p$$

и

$$(C_2|\dots|p^2 C'_\alpha|0\dots) \text{ с } C'_\alpha = (10\dots 0) \text{ и } \alpha \geq 4.$$

Число орбит $\{X\}$ решений уравнения (1) в данном случае совпадает со взвешенным числом разложений $Q \sim X \oplus Y$, где формы X имеют следующие вид и вес.

1. Одномерные формы

$$p^3 X_1 = p^3 A_{p^3}, \omega_1 = 1. \tag{1.6}$$

2. Двумерные формы

$$\begin{aligned} X_{20} &= 1_2^-, pX_{20}, p^2 X_{20}, \omega_{20} = 1; \\ X_{22}^1 &= \pm 1 \oplus p^2(\mp 1), \omega_{22}^1 = (p-1); \\ pX_{22}^\eta &= p(1^{\eta_1} \oplus p^2 \cdot 1^{\eta_2}), \omega_{22}^\eta = (\eta); \\ X_{23} &= 1^\pm \oplus p^3 A_{p^3}, \omega_{23} = (p-1)/2; \\ pX_{2\alpha} &= p(A_{p^3} \oplus p^\alpha \cdot 1^\pm) \text{ для } \alpha \geq 3, \omega_{2\alpha} = (p-1)/2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

3. Трехмерные формы

$$\begin{aligned} pX_{32} &= p(1_2^- \oplus p^2 A_{p^3}), \omega_{32} = 1; \\ X_{33} &= 1_2^- \oplus p^3 A_{p^3}, \omega_{33} = 1; \\ pX_{3\alpha}^1 &= p(A_{p^3} \oplus p^\alpha \cdot 1_2^-) \text{ для } \alpha \geq 2, \omega_{3\alpha} = 1; \\ X_{3\alpha} &= 1_2^- \oplus p^\alpha \cdot 1^\pm \text{ для } \alpha \geq 3, \omega_{3\alpha} = (p-1)/2. \end{aligned} \tag{1.8}$$

4. Четырехмерные формы

$$X_{4\alpha} = 1_2^- \oplus p^\alpha \cdot 1_2^- \text{ для } \alpha \geq 2, \omega_{4\alpha} = 1. \tag{1.9}$$

По виду матриц $Q_G^A(C) \sim Q$ можно судить о количестве возможных минимальных представлений. Для $A = p^2 A_{p^2}$ все 7 видов представлений допускает форма $Q \sim Q_1 \oplus pQ_p \oplus p^2 Q_{p^2} \oplus p^\alpha Q_{p^\alpha}$, где $\dim Q_{p^\alpha} \geq 2, \alpha \geq 3$.

§2. Локальные множители

2.1. Здесь рассмотрим такие формы A и формы Q рода F , которые для нечетного простого p , делящего одновременно a и d , над кольцом целых p -адических чисел \mathbb{Z}_p имеют жордановы разложения

$$\begin{aligned} A &\sim A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu}, \dim A = m; \dim A_1 = m - 1; \nu = 1, 2, 3. \\ Q &\sim Q_1 \oplus p^s Q_{p^s}, \dim Q = n; \dim Q_1 = n - 1; s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для таких форм A и Q найдем локальные множители $\alpha_p(A; Q)$ по формуле [1]

$$\alpha_p(A; Q) = \sum_{\{G\}} c_p(A; Q, G) m_p(G) / \text{std}_p(G), \quad (2.2)$$

где $c_p(A; Q, G)$ – число орбит матриц сцепки C над кольцом \mathbb{Z}_p , $m_p(G)$ – p -масса рода $[G]$, $\text{std}_p(G)$ – стандартная p -масса рода $[G]$. Число орбит матриц сцепки находится по формуле (см. [5])

$$c_p(A; Q, G) = p^{k_{<\alpha}} \frac{o(G_{p^\alpha} / \text{mod } p)}{o(c^\perp(G_{p^\alpha} / \text{mod } p))} \quad (2.3)$$

для $c_\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$, (1.4), (1.7) (эта величина удваивается для (1.8)), и по формуле

$$c_p(A; Q, G) = p^{k_{<\alpha}} \frac{o(G_{p^\alpha} / \text{mod } p)}{p^{k_\alpha - 2} o(J_2^\perp(G_{p^\alpha} / \text{mod } p))} \quad (2.4)$$

для $c_\alpha \equiv 0 \pmod{p}$, (1.5), (1.8) (эта величина удваивается для (1.9)). Здесь $k_{<\alpha} = k_2 + \dots + k_{\alpha-1}$, а формулы порядков ортогональных групп известны (см. [1]).

2.2. Найдем определитель формы G ,

$$|G| = p^{\nu n' + s},$$

и построим все возможные формы G :

$$\begin{aligned} G^I &\sim G_0^I \oplus p^\nu G_{p^\nu}^I \oplus p^{s+\nu} G_{p^{s+\nu}}^I; k_0 = 1, k_\nu = n' - 1, k_{s+\nu} = 1; \\ G^{II} &\sim p^\nu G_{p^\nu}^{II}; k_\nu = n' + 1, s = \nu = 1, 2, 3; \\ G^{III} &\sim p^2 G_{p^2}^{III} \oplus p^s G_{p^s}^{III}; k_2 = n', k_s = 1; s > 3, \nu = 2; \\ G^{IV} &\sim p^2 G_{p^2}^{IV} \oplus p^3 G_{p^3}^{IV}; k_2 = 1, k_3 = n', s = 2, \nu = 3; \\ G^V &\sim p^2 G_{p^2}^V \oplus p^3 G_{p^3}^V \oplus p^{s+1} G_{p^{s+1}}^V; k_2 = k_4 = 1, k_3 = n' - 1, s \geq 3, \nu = 3. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.3. Построим формы расширения $Q_G^A(C)$ (1.1) для различных случаев.

При $C = (C_{0, \text{fix}} 0 \dots 0)$, $\nu = 1, 2, 3$; $s \geq 1$

$$Q_{G^I}^A(C) \sim 1_2^- \oplus G_{p^\nu}^I \oplus p^s G_{p^{s+\nu}}^I. \quad (2.6)$$

При $C_1 = (0 \dots 0)$, $\nu = s = 1, 2, 3$

$$Q_{G^{II}}^A(C_1) \sim A \oplus G_{p^\nu}^{II}. \quad (2.7)$$

При $C_2 = (p 0 \dots 0)$, $\nu = s = 2$; $c_\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$Q_{G^{II}}^A(C_2) \sim 1^{\eta_1} \oplus p^2 \cdot 1^{\eta_2} \oplus a_p \cdot c^\perp(G_{p^2}^{II}). \quad (2.8)$$

При $C_3 = (p^2 0 \dots 0)$, $\nu = s = 3$; $c_\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$Q_{G^{II}}^A(C_3) \sim A \oplus 1^\pm \oplus a_p \cdot c^\perp(G_{p^3}^{II}). \quad (2.9)$$

При $C_2 = (p 0 \dots 0)$, $C_3 = (p^2 0 \dots 0)$, $\nu = s = i$, $i = 2, 3$; $c_\alpha \equiv 0 \pmod{p}$

$$Q_{G^{II}}^A(C_i) \sim 1_2^- \oplus A \oplus a_p \cdot J_2^\perp(G_{p^\nu}^{II}). \quad (2.10)$$

При $C = (p 0 \dots 0)$, $\nu = 2$, $s > 3$

$$Q_{G^{III}}^A(C) \sim A_{p^2} \oplus p^s \cdot 1^\pm \oplus G_{p^2}^{III}. \quad (2.11)$$

При $C = (pC'_2 0 \dots 0)$, $C'_{2, \text{fix}} = 1 + pC''_2$; $\nu = 3$, $s = 2$

$$Q_{G^{IV}}^A(C) \sim \pm 1 \oplus p^2(\mp 1) \oplus G_{p^3}^{IV}. \quad (2.12)$$

При $C = (p p^2 0 \dots 0)$, $\nu = 3$, $s \geq 3$

$$Q_{G^V}^A(C) \sim 1_2^- \oplus p^s \cdot 1^\pm \oplus G_{p^3}^V. \quad (2.13)$$

Эквивалентность форм $Q_G^A(C)$ исходной матрице Q означает совпадение знаков и размерностей соответствующих блоков жорданова разложения. Для существования форм (2.6), (2.10), (2.13) необходимо, чтобы $\dim Q_1 \geq m+1$, а если $\dim Q_1 = m+1$, то должно выполняться равенство $\left(\frac{-1}{p}\right) = \varepsilon_1(Q)\varepsilon_1(A)$. Для того, чтобы формы (2.7), (2.9), (2.10) были эквивалентны заданной форме Q , необходимо совпадение знаков $\varepsilon_{p^\nu}(A) = \varepsilon_{p^s}(Q)$.

2.4. Для вычисления локальных множителей (2.2) осталось найти число орбит матриц цепки C , так как, зная все формы G , по формулам из [1] все остальные множители находятся прямым вычислением.

Для (2.6) $c_p(A; Q, G^I) = 2$; для (2.7) и (2.12) $c_p(A; Q, G^{II}) = 1$. По (2.3) найдем количество орбит матриц C для (2.8), (2.9), (2.11), (2.13)

$$\begin{aligned} c_p(A; Q, G^{II}) &= p^{n'/2}(p^{n'/2} + \varepsilon); \\ c_p(A; Q, G^{III}) &= p^2; \\ c_p(A; Q, G^V) &= 4p^{n'}; \end{aligned}$$

$\varepsilon = \left(\frac{(-1)^{n'/2}}{p} \right) \left(\frac{|c^\perp(G_{p^2})|}{p} \right)$. Для (2.10) находим число матриц C по (2.4):

$$c_p(A; Q, G^{II}) = p^{n'} - 1.$$

Отсюда и по (2.2) находим локальные множители.

$$\alpha_p(A; Q, G^I) = p^{(s+\nu-2)n'/2}(p^{n'} - 1)/2. \quad (2.14)$$

$$\alpha_p(A; Q, G^{II}, C_1) = 1; \quad (2.15)$$

$$\alpha_p(A; Q, G^{II}, C_i) = (p^{n'} - 1), \quad (2.16)$$

если $c_\alpha \equiv 0 \pmod{p}$, $i = 2, 3$;

$$\alpha_p(A; Q, G^{II}, C_i) = p^{n'/2}(p^{n'/2} + \varepsilon), \quad (2.17)$$

если $c_\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$, где при $i=2$ $\varepsilon = \left(\frac{(-1)^{n'/2} a_p}{p} \right) \varepsilon_1(Q) \varepsilon_{p^2}(Q) \varepsilon_1(A)$,

если $\eta_1 = \eta_2$ (то есть $\left(\frac{-1}{p} \right) \varepsilon_{p^2}(A) = \varepsilon_{p^2}(Q)$), и ε умножается на (-1) в противном случае (то есть если $\eta_1 \neq \eta_2$); при $i = 3$ $\varepsilon = \left(\frac{(-1)^{n'/2}}{p} \right) \varepsilon_1(Q) \varepsilon_1(A)$.

$$\alpha_p(A; Q, G^{III}) = p^2 \cdot p^{(s-3)n'/2}(p^{n'/2} + \varepsilon_1)/2, \quad (2.18)$$

где $\varepsilon_1 = \left(\frac{-1}{p} \right)^{n'/2} \varepsilon_1(Q) \varepsilon_1(A) \varepsilon_{p^s}(A)$.

$$\alpha_p(A; Q, G^{IV}) = (p^{n'/2} + \varepsilon_2)/2, \quad (2.19)$$

где $\varepsilon_2 = -\left(\frac{-1}{p}\right)^{n'/2} \varepsilon_1(Q)\varepsilon_1(A)\varepsilon_{p^2}(Q)$.

$$\alpha_p(A; Q, G^V) = p^{n'(s-1)/2}(p^{n'} - 1). \tag{2.20}$$

2.5. Для того, чтобы получить окончательную формулу для $\alpha_p(A; Q)$ необходимо засчитать каждое минимальное представление соответствующее ω число раз. Для (2.6), (2.7), (2.10) $\omega = 1$; для (2.9), (2.11), (2.13) $\omega = (p-1)/2$; для (2.12) $\omega = (p-1)$ и для (2.8) $\omega = (\eta)$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. Пусть $A \sim A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu}$, $Q \sim Q_1 \oplus p^s Q_{p^s}$, и $\dim Q_{p^s} = \dim A_{p^\nu} = 1$, тогда множитель ветвления $\alpha_p(A; Q)$ для нечетного p , делящего a и d одновременно, вычисляется по следующим формулам.

1. Если $s = \nu = 1$, то

$$\alpha_p(A; Q) = (p^{n'} + \varepsilon_p(A)\varepsilon_p(Q))/2. \tag{2.21}$$

2. Если $s \geq 2, \nu = 1$, то

$$\alpha_p(A; Q) = p^{(s-1)n'/2}(p^{n'} - 1)/2. \tag{2.22}$$

3. Если $s = 1, \nu = 2$, то

$$\alpha_p(A; Q) = p^{n'/2}(p^{n'} - 1)/2. \tag{2.23}$$

4. Если $s = \nu = 2$, то

$$\alpha_p(A; Q) = p^{n'}(p^{n'} - 1)/2 + p^{n'/2}(p^{n'/2} + \varepsilon)(\eta) + p^{n'}, \tag{2.24}$$

где последнее слагаемое не равно нулю, если $\varepsilon_{p^2}(A) = \varepsilon_{p^2}(Q)$; знак ε берется из (2.17).

5. Если $s \geq 3, \nu = 2$, то

$$\alpha_p(A; Q) = (p^{sn'/2}(p^{n'} - 1) + p^2 \cdot p^{(s-3)n'/2}(p-1)/2(p^{n'/2} + \varepsilon_1))/2, \tag{2.25}$$

где знак ε_1 берется из (2.18).

6. Если $s = 1, \nu = 3$, то

$$\alpha_p(A; Q) = p^{n'}(p^{n'} - 1)/2 \tag{2.26}$$

7. Если $s = 2, \nu = 3$, то

$$\alpha_p(A; Q) = (p^{3n'/2}(p^{n'} - 1) + (p-1)(p^{n'/2} + \varepsilon_2))/2, \tag{2.27}$$

где знак ε_2 берется из (2.19).

8. Если $s = \nu = 3$, то

$$\alpha_p(A; Q) = p^{n'}(p^{n'} - 1)(p^{n'} + p - 1)/2 + (p^{n'/2}(p - 1)(p^{n'/2} + \varepsilon) + 2p^{n'})/2, \quad (2.28)$$

где последнее слагаемое не равно нулю, если $\varepsilon_{p^3}(A) = \varepsilon_{p^3}(Q)$; знак ε из берется (2.16).

9. Если $s > 3$, $\nu = 3$, то

$$\alpha_p(A; Q) = p^{(s-1)n'/2}(p^{n'} - 1)(p^{n'} + p - 1)/2. \quad (2.29)$$

§3. ФОРМУЛЫ ВЕСА ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ ФОРМ

3.1. Чтобы получить конкретные квадратичные формы, можно применить метод специализации квадратичных диофантовых систем. Пусть $\{X\}$ – орбиты всех примитивных представлений одноклассной формы A' одноклассной формой Q' , и пусть существует ортогональное дополнение $K_i \perp X_i$ из некоторого рода $[K]$. Тогда классы $\{K_i\}$, содержащиеся в $[K]$, образуют весь род. Для приложений формул, полученных в §2, удобно полагать $A' = a$ – число, $Q' = 1_n$ – единичная матрица размерности n . Полученный в результате ортогонального дополнения род форм имеет размерность $n - 1$ и определитель a .

Четырёхклассный род $F_2 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, полученный специализацией $A' = 27$, $Q' = 1_6$, задаётся формами вида

$$Q_1 = 1_3 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 10 & 0 \\ 4 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = 1 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 6 \\ -1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Инварианты рода F_2 равны $d = 27$, $3_{F_2} = 1^{-4}27^{-1}$, $2_{F_2} = 1_{1,3}^{-5}$. Вес примитивных представлений бинарной формы $A \sim A_1 \oplus 3^\nu A_{3^\nu}$ уровня $a = 3^\nu \cdot a_{3^\nu}$ определяется соотношением (2)

$$pn(A; F_2) = \frac{1}{6} \alpha_2(A; Q) \alpha_3(A; Q) \prod_{p^s \parallel a} p^{s-1} \left(p + \varepsilon_1(A) \left(\frac{3}{p} \right) \right),$$

где локальный множитель $\alpha_3(A; Q)$ вычисляется по формуле

$$\alpha_3(A; Q) = \left(27 + \left(\frac{a_3}{3} \right) \right) / 2,$$

если $a = a_3$ не делится на 3. Если $a = 3^\nu a_{3^\nu}$, то возникает ветвление представлений и при $\nu = 1$ по (2.22)

$$\alpha_3(A; Q) = 3^2(3^2 - 1)/2 = 36;$$

количество представлений формы A родом F_2 увеличивается. Если же $\nu = 2$, то множитель ветвления вычисляется по формуле (2.27) и равен

$$\alpha_3(A; Q) = 108 + 9(3 - \varepsilon_1(A))/2.$$

При $\nu = 3$ множитель ветвления находится по (2.28) и равен

$$\alpha_3(A; Q) = 3^2(3^2 - 1)(3^2 + 3 - 1)/2 = 396,$$

если $\varepsilon_{27}(A) = -1$, и

$$\alpha_3(A; Q) = 405 + 3(3 + \varepsilon_1(A)),$$

если $\varepsilon_{27}(A) = +1$. Множитель $\alpha_2(A; Q)$ вычисляется по формулам из [1] и равен для четного a

$$\alpha_2(A; Q) = (4 + \varepsilon_2)/8,$$

где $\varepsilon_2 = \left(\frac{a_2(3 - t(A))}{2} \right)$; для нечетного a

$$\alpha_2(A; Q) = (1 \pm 2^{-1})/4 \text{ при } \text{oct} \equiv \pm 1 \text{ или } \pm 3 \pmod{8},$$

где $\text{oct} \equiv 3 - t(A) \pmod{8}$ при $\left(\frac{a_2}{2} \right) = -1$; $\text{oct} \equiv 7 - t(A) \pmod{8}$ при $\left(\frac{a_2}{2} \right) = +1$.

Сравнение множителя без ветвления $\alpha_p(A; Q) = (p^{sn'/2} \pm 1)$ и ветвящихся множителей (2.22), (2.24)–(2.29) показывает, что при появлении общих делителей p у определителя d и уровня a возникает рост примитивных представлений формы A родом F . Усложняется структура множителей ветвления в связи с появлением различных форм G из ортогонального дополнения к A . Нахождение этих множителей стало возможным благодаря выявлению всех минимальных представлений (1.2)–(1.9) формы A родом F .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Журавлев, *Представление формы родом квадратичных форм*, Алгебра и анализ **8**, No. 1 (1996), 21–112.
2. А. В. Хорошева, *Представление чисел кватернарными квадратичными формами*, VII международная конференция. Математика. Экономика. Экология. Образование. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону (1999), 109–110.
3. А. В. Хорошева, *Представление чисел родом одноклассных кватернарных форм*, Вестник Владимирск. гос. пед. ун-та, No. 5 (2000), 338–346.
4. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решётки и группы*, М., 1990.
5. В. Г. Журавлев, *Орбиты представлений чисел локальными квадратичными формами*, Тр. Мат. ин-та РАН **218** (1997), 151–164.
6. Дж. Касселс, *Рациональные квадратичные формы*, М., 1982.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 24 августа 2000 г.