



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зайцев, Е. К. Макаров, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков, Задачи управления инвариантами А. М. Ляпунова, *Изв. ИМИ УдГУ*, 2006, выпуск 3, 43–48

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

19 января 2025 г., 17:13:36



УДК 517.934+517.977

© В. А. Зайцев, Е. К. Макаров, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТАМИ А. М. ЛЯПУНОВА¹

Введение

Всякая характеристика линейной системы

$$\dot{x} = D(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

сохраняющаяся при ляпуновских преобразованиях, называется *инвариантом А.М. Ляпунова*². Инвариантами Ляпунова являются, например, такие величины (свойства), как полный спектр показателей Ляпунова, свойства правильности и приводимости, коэффициенты неправильности, центральные, особые и экспоненциальные показатели и многие другие.

Задачи управления ляпуновскими инвариантами, будучи задачами управления на неограниченных интервалах времени, не являются задачами классической математической теории управления. К числу таких задач относится, например, задача стабилизации системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

с помощью линейной обратной связи $u = U(t)x$. Для стационарных систем эта задача стабилизации известна достаточно давно и может рассматриваться как традиционная задача теории автоматического регулирования.

Наш доклад посвящён задачам управления инвариантами Ляпунова и результатам в этом направлении, полученным в Ижевске и Минске [1–25].

§ 1. Билинейные управляемые системы

Билинейной мы называем систему

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t, u)x, \quad \text{где } \mathcal{A}(t, u) = A(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_r A_r(t), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R}^{1+n+r}, \quad (3)$$

с измеримыми по Лебегу и ограниченными на \mathbb{R} коэффициентами $t \mapsto A(t), A_i(t) \in \mathbb{M}(n)$. Здесь $\mathbb{M}(n)$ — пространство квадратных матриц порядка n с нормой, индуцированной евклидовой нормой в \mathbb{R}^n . Управление $t \mapsto u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in \mathbb{R}^r$ называется *допустимым*, если оно измеримо по Лебегу и принимает значения в заранее заданном множестве, расположенном в \mathbb{R}^r . Система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

полученная из (2) с помощью обратной связи $u = U(t)x$, может быть записана в виде (3); если же наблюдению доступны не все координаты x , но только их линейная комбинация $y = C^*(t)x$, то линейное по наблюдаемым параметрам управление $u = U(t)y$ приводит к изучению замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

которая тоже может быть записана в виде (3).

Всякой билинейной системе можно поставить в соответствие так называемую «*большую систему*» [3, 7]

$$\dot{z} = F(t)z + G(t)v, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^r, \quad (6)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

²Любые две системы вида (1), связанные преобразованием Ляпунова, называются *асимптотически эквивалентными*. Все асимптотически эквивалентные системы имеют общую совокупность инвариантов Ляпунова.

наследующую многие свойства системы (3). Здесь матрица $F(t) = A(t) \otimes E - E \otimes A^*(t)$, \otimes — кронекерово (прямое) произведение матриц, $G(t) = (\text{vec } A_1(t), \dots, \text{vec } A_r(t))$, vec — операция, разворачивающая матрицу по строкам в вектор-столбец (в случае системы (5) матрица $G(t)$ имеет вид $B(t) \otimes C(t)$).

Пусть $Z(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{z} = F(t)z$, $\mathfrak{L}_\vartheta(t_0) \doteq \int_{t_0}^{t_0+\vartheta} Z(t_0, t)G(t)\mathbb{R}^r dt$ — пространство управляемости системы (6) на отрезке $I = [t_0, t_0 + \vartheta]$. Система (6) называется *вполне управляемой на I* , если $\mathfrak{L}_\vartheta(t_0) = \mathbb{R}^{n^2}$. Далее, система (6) называется *равномерно вполне управляемой*, если найдутся такие $\vartheta > 0$ и $\alpha > 0$, что для любого $t_0 \geq 0$ она вполне управляема на I и для всякой точки $z_0 \in \mathbb{R}^{n^2}$ среди управлений, переводящих (t_0, z_0) в $(t_0 + \vartheta, 0)$, найдется управление $v(t, t_0, z_0)$, удовлетворяющее неравенству $|v(t, t_0, z_0)| \leq \alpha|z_0|$, $t \in I$. Если «большая система» равномерно вполне управляема, то систему (3) будем называть *равномерно согласованной* [2, 11].

Основные результаты о локальной управляемости различных ляпуновских инвариантов основаны на следующих двух теоремах.

Т е о р е м а 1. *Если система (3) равномерно согласованна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой измеримой функции $t \mapsto Q(t) \in \mathbb{M}(n)$, удовлетворяющей неравенству $\sup_t |Q(t)| \leq \delta$, найдется допустимое управление $t \mapsto u(t)$, $\sup_t |u(t)| \leq \varepsilon$, при котором система (3) асимптотически эквивалентна системе $\dot{x} = (A(t) + Q(t))x$.*

Для линейной управляемой системы (2) имеет место более сильное утверждение.

Т е о р е м а 2. *Если система (2) равномерно вполне управляема, то существуют такие $\delta > 0$ и $l > 0$, что для любой измеримой функции $t \mapsto Q(t) \in \mathbb{M}(n)$, $\sup_t |Q(t)| \leq \delta$, найдется допустимое управление $t \mapsto U(t) \in \mathbb{M}(m, n)^3$, $\sup_t |U(t)| \leq l \sup_t |Q(t)|$, при котором система (4) асимптотически эквивалентна системе $\dot{x} = (A(t) + Q(t))x$.*

Из этих теорем и асимптотической теории линейных систем следует локальная управляемость центральных и особых показателей, достижимость верхнего центрального показателя и возможность с помощью сколь угодно малого управления $u(t)$ превратить систему (3) в систему с интегральной разделенностью (то есть систему с попарно различными устойчивыми показателями Ляпунова).

§ 2. Управление ляпуновскими инвариантами

Пусть \mathfrak{S}_n — пространство систем вида (1) с измеримыми и ограниченными на \mathbb{R} матрицами D , ℓ — некоторый ляпуновский инвариант, $\ell(\mathfrak{S}_n)$ — множество значений инварианта ℓ , \mathcal{U} — множество допустимых управлений⁴. Определим отображение $\varphi_\ell : \mathcal{U} \rightarrow \ell(\mathfrak{S}_n)$, которое ставит в соответствие всякому допустимому управлению $u(\cdot)$ значение $\ell(A)$ инварианта ℓ системы (3) при $u = u(\cdot)$.

О п р е д е л е н и е 1. Система (3) обладает свойством *глобальной управляемости ляпуновского инварианта ℓ* , если отображение φ_ℓ сюръективно: $\varphi_\ell(\mathcal{U}) = \ell(\mathfrak{S}_n)$.

Если множество $\ell(\mathfrak{S}_n)$ содержится в некотором метрическом пространстве (\mathfrak{X}, ρ) , введем определения локальной, а также пропорциональной локальной и пропорциональной глобальной управляемости этого инварианта.

О п р е д е л е н и е 2. Система (3) обладает свойством *локальной управляемости ляпуновского инварианта ℓ* , если отображение φ_ℓ открыто при $u(t) \equiv 0$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для каждого $\alpha \in \ell(\mathfrak{S}_n)$, удовлетворяющего неравенству $\rho(\ell(A), \alpha) \leq \delta$, существует допустимое управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, что $\sup_t |u(t)| \leq \varepsilon$ и $\varphi_\ell(u) = \alpha$. Определения *пропорциональной локальной* (и *пропорциональной глобальной*) *управляемости инварианта ℓ* дополнительно включают в себя липшицеву оценку $\sup_t |u(t)| \leq k\rho(\ell(A), \alpha)$.

³ $\mathbb{M}(m, n)$ — пространство $(m \times n)$ -матриц.

⁴ Для системы (3) это измеримые и ограниченные на \mathbb{R} функции $t \mapsto u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ со значениями в \mathbb{R}^r , для систем (4) и (5) — матрицы $U(t)$ соответствующих размеров с аналогичными свойствами.

Т е о р е м а 3. Пусть ℓ — произвольный ляпуновский инвариант, множество значений которого содержится в метрическом пространстве.

1) Если система (2) равномерно вполне управляема, то из пропорциональной глобальной управляемости инварианта ℓ для системы

$$\dot{x} = (A(t) + U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

следует его пропорциональная локальная управляемость для системы (4).

2) Если система (3) равномерно согласованна, то из пропорциональной глобальной управляемости инварианта ℓ для системы (7) следует его локальная управляемость для системы (3).

Т е о р е м а 4. Если система $\dot{x} = A(t)x$ правильная или диагонализируемая или имеет устойчивые показатели Ляпунова, то система (7) обладает свойством пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Т е о р е м а 5. Пусть выполнено условие теоремы 4. Тогда:

1) если система (2) равномерно вполне управляема, то система (4) обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова;

2) если система (3) равномерно согласованна, то она обладает свойством локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

О п р е д е л е н и е 3. Система (4) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости, если для произвольной системы (1) из множества \mathfrak{S}_n найдется допустимое управление такое, что система (4) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (1).

Т е о р е м а 6. Пусть (2) — система с T -периодическими коэффициентами. Тогда система (4) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости в том и только в том случае, если система (2) вполне управляема.

Т е о р е м а 7. Пусть $n = 2$. Если система (2) равномерно вполне управляема, то замкнутая система (4) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.

Т е о р е м а 8. Если система (2) равномерно вполне управляема, а функция $t \rightarrow B(t)$ кусочно равномерно непрерывна на \mathbb{R} , то полный спектр показателей Ляпунова системы (4) глобально управляем.

Пусть \mathcal{J} — совокупность ляпуновских инвариантов, которые для треугольных систем определяются системами их диагонального приближения⁵.

Т е о р е м а 9. Если система (2) равномерно вполне управляема, а функция $t \rightarrow B(t)$ кусочно равномерно непрерывна на \mathbb{R} , то система (4) обладает свойством одновременной глобальной управляемости ляпуновских инвариантов, принадлежащих множеству \mathcal{J} .

Т е о р е м а 10. Если система (2) равномерно вполне управляема, то система (4) равномерно стабилизируема, то есть для каждого $\gamma > 0$ найдется допустимое управление $U(t)$, что старший показатель системы (4) удовлетворяет неравенству $\lambda_n(A + BU) < -\gamma$.

§ 3. Модальное управление

Будем говорить, что стационарная система

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

обладает модальным управлением, если для любого многочлена $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ существует матрица $U \in \mathbb{M}(m, k)$ такая, что характеристический многочлен системы (8) совпадает с $p(\lambda)$. Матрица U называется модальным управлением. Если система (8) обладает модальным управлением, то она обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова, причем U может быть выбрано из класса постоянных управлений.

⁵Множеству \mathcal{J} принадлежат такие инварианты преобразований Ляпунова, как центральные, особые и экспоненциальные показатели, свойство правильности.

есть $p(\Omega) = \Sigma$ и $pg^t = f^tp$). Если (Ω, g^t) — расширение динамической системы (Σ, f^t) и задано семейство (S, Σ) , где $S \in \mathfrak{S}$, то для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $\omega \in p^{-1}(\sigma)$ определена непрерывная и ограниченная на Ω функция $\omega \rightarrow \mathcal{S}(\omega) \doteq S(p(\omega)) = S(\sigma)$. Построенная так функция $\mathcal{S} \doteq (\mathcal{A}, \mathcal{B}): \Omega \rightarrow \mathbb{M}(n, n+m)$ порождает семейство (\mathcal{S}, Ω) систем (\mathcal{S}, ω) вида

$$\dot{x} = \mathcal{A}(g^t\omega)x + \mathcal{B}(g^t\omega)u, \quad (t, \omega, x, u) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Это новое семейство (\mathcal{S}, Ω) (назовем его *псевдорасширением* семейства (S, Σ)) фактически является другой записью семейства (S, Σ) . Действительно, для каждого $\sigma \in \Sigma$ все системы (\mathcal{S}, ω) на слое $\gamma(\sigma) \doteq \{\omega \in \Omega: p(\omega) = \sigma\}$ совпадают с системой (S, σ) . Поэтому для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех $\omega \in \gamma(\sigma)$ матрица Коши $\mathcal{X}(t, s, \omega)$ системы (\mathcal{A}, ω) совпадает с $X(t, s, \sigma)$. Следовательно, имеет место равенство $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \omega) = \mathcal{L}(S, \sigma)$.

Т е о р е м а 12. *Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с компактным фазовым пространством Σ и любого регулярного семейства (S, Σ) систем вида (9), где $S \in \mathfrak{S}$, найдется такое расширение (Ω, g^t) с компактным фазовым пространством Ω , что отвечающее ему псевдорасширение (\mathcal{S}, Ω) семейства (S, Σ) , обладает каноническим представителем (\mathcal{C}, Ω) .*

В силу теоремы 12, псевдорасширение (\mathcal{S}, Ω) семейства (S, Σ) (удовлетворяющего условиям теоремы 12) приводимо стационарным перроновским преобразованием $x = P(g^t\omega)y$ к каноническому семейству (\mathcal{C}, Ω) .

Для формулировки следующего утверждения напомним, что фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, f^t) называется *минимальным* (относительно потока f^t), если оно замкнуто и для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $f^t\Sigma = \Sigma$.

Т е о р е м а 13. *Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с минимальным (относительно f^t) компактным фазовым пространством Σ и любого семейства (S, Σ) систем вида (9), где $S \in \mathfrak{S}$, найдется такое расширение (Ω, g^t) с минимальным (относительно g^t) компактным фазовым пространством Ω , что отвечающее ему псевдорасширение (\mathcal{S}, Ω) семейства (S, Σ) обладает каноническим представителем (\mathcal{C}, Ω) .*

Из теоремы 13 следует, в частности, что если размерность пространства управляемости системы (2) равна $r \leq n$ и матрицы $A(t)$ и $B(t)$ рекуррентны, то система (2) приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к системе $\dot{y} = F(t)y + G(t)u$ с рекуррентными $F(t)$ и $G(t)$, причем $F(t)$ — верхняя треугольная, а последние $n - r$ строк матрицы $G(t)$ равны нулю.

Список литературы

1. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
2. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.
3. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1949–1957.
4. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 228–238.
5. Попова С. Н., Тонков Е. Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 723–724.
6. Тонков Е. Л. Задачи управления показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1682–1686.
7. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.

8. Макаров Е. К., Попова С. Н. О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова систем с некротными показателями // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 495–499.
9. Макаров Е. К., Попова С. Н. К методу поворотов для линейных управляемых систем // Доклады НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 6. С. 13–16.
10. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.
11. Зайцев В. А., Тонков Е. Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2(441). С. 60–67.
12. Зайцев В. А. Об управлении показателями Ляпунова и о λ -приводимости // Вестник Удмуртского университета. 2000. № 1. С. 35–44.
13. Зайцев В. А. Согласованность, достижимость и управление показателями Ляпунова: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Ижевск, 2000. 102 с.
14. Тонков Е. Л. Ляпуновская приводимость линейной системы, стабилизация и управление показателями Изובה // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск, 2000. Т. 4. С. 146–155.
15. Tonkov E. L. Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.
16. Макаров Е. К. Асимптотические инварианты линейных дифференциальных систем: Дис... док. физ.-мат. наук: 01.01.02. Минск, 2001. 207 с.
17. Попова С. Н. Об эквивалентности локальной достижимости и полной управляемости линейных систем // Известия вузов. Математика. 2002. № 6(481). С. 50–53.
18. Зайцев В. А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Серия «Математика». 2003. С. 31–62.
19. Макаров Е. К., Попова С. Н. О достаточных условиях локальной пропорциональной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 217–226.
20. Попова С. Н. К свойству локальной достижимости линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.
21. Попова С. Н. К свойству пропорциональной управляемости ляпуновских инвариантов линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1578–1579.
22. Попова С. Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.
23. Попова С. Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
24. Попова С. Н. Одновременная локальная управляемость спектра и коэффициента неправоильности Ляпунова правильных систем // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 3. С. 425–428.
25. Попова С. Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: Дис... док. физ.-мат. наук: 01.01.02. Екатеринбург, 2004. 264 с.

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: vaz@verba.udm.ru

Макаров Евгений Константинович
Ин-т математики НАН Беларуси,
Беларусь, Минск
e-mail: jcm@im.bas-net.by

Попова Светлана Николаевна
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: ps@uni.udm.ru

Тонков Евгений Леонидович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: eltonkov@udm.ru