В. В. Жук, Г. И. Натансон, Полунормы и модули непрерывности функций, заданных на отрезке, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 155–203

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

В. В. Жук, Г. И. Натансон

ПОЛУНОРМЫ И МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Введение

1. Прежде всего хотим отметить наши многолетние плодотворные научные контакты с профессором Н. А. Лебедевым, внесшим, в частности, заметный вклад в излагаемую ниже тему (см. [1–4]). В теории приближения с помощью модулей непрерывности различных порядков принято характеризовать структурные свойства функций и оценивать значения полунорм, возникающих в рамках этой теории. Основным (но далеко не единственным) источником таких задач является вопрос об оценке уклонений методов аппроксимации.

В настоящее время в литературе отсутствует обстоятельное связное изложение свойств модулей непрерывности функций на отрезке в пространствах $L_p[a, b]$. Целью настоящей статьи является восполнение этого пробела и изложение подхода к оценкам полунорм, приводящего к "аккуратным" постоянным в соответствующих неравенствах (см. [5]). Отметим, что известные методы промежуточных приближений (см. [6–8; 9, с. 102–108]) дают существенно завышенные значения указанных постоянных.

2. В §§1–3 настоящей работы подробно и часто в значительно более развитой форме, чем это делалось до сих пор, излагаются практически все известные на настоящий момент фундаментальные свойства модулей непрерывности функций, заданных на конечном отрезке, в пространствах $L_p[a, b]$ при $p \geqslant 1$. Эти соотношения являются результатом деятельности многих математиков и было бы трудно выделить индивидуальный вклад каждого из них. Поэтому мы не станем останавливаться на истории рассматриваемых вопросов, ограничившись указанием лишь на немногочисленные монографии и статьи [10–22], в которых можно найти более подробные библиографические указания, а также ряд свойств модулей непрерывности, не нашедших отражения в данной статье.

В §4 устанавливается общая оценка полунормы, определенной в пространстве $L_p[a,b]$, через модуль непрерывности соответствующего порядка надлежащим образом продолженной функции (теорема 4.3). Упомянутое продолжение осуществляется с по возможности меньшим увеличением значения модуля непрерывности в одной заранее предписанной точке (теорема 4.2).

3. Примем следующие обозначения: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества комплексных, вещественных, неотрицательных вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел; $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; $[a]$, где $a \in \mathbb{R}$, – целая часть числа a. Запись $k = \overline{a,b}$, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \leqslant b$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые; символ $0/0$ понимается как 0, X – промежуток в $\mathbb{R}$. Через $C[a,b]$ обозначаем пространство комплекснозначных функции f, заданных и непрерывных на $[a,b]$ с нормой $\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$; $L_p(X)$ при $1 \leqslant p < \infty$ – пространство измеримых функций $f : X \to \mathbb{C}$, для которых $\|f|X\|_p = (\int_X |f|^p)^{1/p} < \infty$, $L_\infty(X)$ – пространство измеримых функций $f : X \to C$, для которых $\|f|X\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x\in X} |f(x)| < \infty$. Вместо $L_p([a,b])$ пишем $L_p[a,b]$; $\mathbb{L}_p[a,b] = L_p[a,b]$ при $p < \infty$ и $\mathbb{L}_\infty[a,b] = C[a,b]$. Полагаем $VK[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \overset{b}{\underset{a}{V}} ar f \leqslant K\}$, $W_p^{(r)}K(X) = \{f : X \to C : \exists f^{(r-1)}$ – абсолютно непрерывная на X, $\|f^{(r)} \mid X\|_p \leqslant K\}$, $W_p^{(r)}(X) = \bigcup_{K=1}^\infty W_p^{(r)}K(X)$.

Через H_n обозначаем множество алгебраических многочленов степени не выше n; $E_n(f,[a,b])_p = \inf_{T\in H_n} \|f - T \mid [a,b]\|_p$; многочлен $\pi_n(f,[a,b])_p \in H_n$ определяется равенством

$$\|f - \pi_n(f,[a,b])\|_p = E_n(f,X)_p.$$

Если $f \in L(X)$, то $f^{(-r)}$ – ее r-ая первообразная; при $r/2 \in \mathbb{N}$

$$M_r(x) = x^2 \prod_{k=1}^{r/2} (x^2 - k^2).$$

Знаки $\lhd$ и $\rhd$ означают соответственно начало и конец доказательства.

§1. Элементарные свойства модулей непрерывности

1.1. Пусть
$$x_0, x_1, x_2, \ldots \tag{1.1}$$
– конечная или бесконечная последовательность чисел. Положим
$$\begin{aligned}
&\Delta^0 x_k = x_k,\\
&\Delta^1 x_k = \Delta x_k = \Delta^0 x_{k+1} - \Delta^0 x_k = x_{k+1} - x_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta^{r+1} x_k = \Delta^r x_{k+1} - \Delta^r x_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$
Величины $\Delta^r x_k$ называются разностями r-го порядка последовательности (1.1).

Лемма 1.1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*
$$\Delta^r x_k = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} C_r^m x_{k+m}.$$

Доказательство леммы 1 проводится методом математической индукции с использованием формулы $C_r^m + C_r^{m-1} = C_{r+1}^m$.

Определение 1.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in \mathbb{R}$, $x + mh \in X$ при $m = \overline{0, r}$. Величина*
$$\Delta_h^r(f, x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} C_r^m f(x + mh)$$
называется (конечной) разностью r-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Определение 1.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $x+mh-rh/2 \in X$ при $m = \overline{0, r}$. Величина*
$$\delta_h^r(f, x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m C_r^m f(x + rh/2 - mh)$$
называется центральной разностью r-го порядка функции f в точке x с шагом h.

Очевидно, что $\delta_h^r(f, x) = \Delta_h^r(f, x - rh/2)$.

Условимся r-кратный интеграл по множеству $[a,b]\times\ldots\times[a,b]$ (r раз) обозначать $\int_{[a,b]^r}$.

В следующих ниже соотношениях (1.2), (1.3), (1.6–1.9) предполагается, что область определения f содержит точки, участвующие в соответствующих равенствах. Других ограничений на f не налагается (более того, значения f могут принадлежать произвольному векторному пространству).

Лемма 1.2. *Справедливы следующие соотношения.*

a) *Если* $r,s\in\mathbb{Z}_+$, *то*

$$\Delta_h^{r+s}(f)=\Delta_h^r(\Delta_h^s(f)),\quad \delta_h^{r+s}(f)=\delta_h^r(\delta_h^s(f)). \tag{1.2}$$

b) *Если* $r,k\in\mathbb{N}$, *то*

$$\Delta_{kh}^r(f,x)=\sum_{j_1=0}^{k-1}\ldots\sum_{j_r=0}^{k-1}\Delta_h^r\left(f,x+h\sum_{l=1}^{r}j_l\right). \tag{1.3}$$

c) *Если* $r\in\mathbb{N}$, $h>0$, $f\in W_1^{(r)}[x,x+rh]$, *то*

$$\Delta_h^r(f,x)=\int\limits_{[0,h]^r}f^{(r)}\left(x+\sum_{j=1}^{r}t_j\right)dt_1\ldots dt_r. \tag{1.4}$$

d) *Если* $r\in\mathbb{N}$, $h>0$, $f\in W_1^{(r)}[x-rh/2,x+rh/2]$, *то*

$$\delta_h^r(f,x)=\int\limits_{[-h/2,h/2]^r}f^{(r)}\left(x+\sum_{j=1}^{r}t_j\right)dt_1\ldots dt_r. \tag{1.5}$$

Все утверждения леммы 1.2 легко доказываются индукцией по r.

Следствие 1.1. *Если* $r\in\mathbb{N}$, *то*

$$\Delta_{2h}^r(f,x)=\sum_{m=0}^{r}C_r^m\Delta_h^r(f,x+mh). \tag{1.6}$$

Для доказательства (1.6) достаточно положить $k=2$ в (1.3) и заметить что, поскольку $j_l=0$ или 1, число слагаемых в кратной сумме, в которых $\sum_{l=1}^r j_l=m$, равно C_r^m.

Лемма 1.3. *Если* $r \in \mathbb{N}$, *то*

$$2^r \Delta_h^r(f,x) = \Delta_{2h}^r(f,x) - \sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_h^{r+1}(f, x+jh). \tag{1.7}$$

◁ Так как $\sum_{m=0}^{r} C_r^m = 2^r$, то в силу (1.6) имеем

$$\Delta_{2h}^r(f,x) - 2^r \Delta_h^r(f,x) = \sum_{m=0}^{r} C_r^m \Delta_h^r(f(\cdot + mh) - f, x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} C_r^m \Delta_h^r \left(\sum_{j=0}^{m-1} \Delta_h^1(f(\cdot + jh), x) \right) = \sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_h^{r+1}(f, x+jh). \ \triangleright$$

Следствие 1.2. *Если* $r \in \mathbb{N}$, *то*

$$2^r \Delta_h^r(f,x) = \Delta_{2h}^r(f, x-rh) + \sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_h^{r+1}(f, x-(j+1)h). \tag{1.8}$$

◁ Прежде всего отметим, что

$$\Delta_h^r(f,x) = (-1)^r \Delta_{-h}^r(f, x+rh). \tag{1.9}$$

Действительно,

$$\Delta_{-h}^r(f, x+rh) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k f(x+rh-kh) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f(x+kh) = (-1)^r \Delta_h^r(f,x).$$

Сопоставляя (1.7) и (1.9), имеем

$$2^r \Delta_{-h}^r(f, x+rh) =$$

$$= \Delta_{-2h}^r(f, x+2rh) + \sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_{-h}^{r+1}(f, x+jh+(r+1)h).$$

Заменим здесь $-h$ на h:

$$2^r \Delta_h^r(f, x-rh) = \Delta_{2h}^r(f, x-2rh) + \sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_h^{r+1}(f, x-rh-(j+1)h).$$

Осталось переобозначить $x-rh$ через x. ▷

1.2. Определение 1.3. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p[a,b]$. Полагаем*

$$\omega_r(f,h,[a,b])_p = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \|\Delta_t^r(f) \mid [a, b - rt]\|_p, \quad \textit{если} \;\; h \in [0,(b-a)/r],$$
$$\omega_r(f,h,[a,b])_p = \omega_r(f,(b-a)/r,[a,b])_p, \qquad \textit{если} \;\; h > (b-a)/r.$$

Величина $\omega_r(f,h,[a,b])_p$ называется модулем непрерывности порядка r функции f в пространстве $L_p[a,b]$ с шагом h.

Замечание 1.1. В дальнейшем придерживаемся следующего принципа построения обозначений. В тех случаях, когда какие-то параметры фиксированы и нет опасности недоразумений, эти параметры в обозначения не включаются. В соответствии с этим, если, например, фиксировано пространство $L_p[a,b]$, вместо $\omega_r(f,h,[a,b])_p$ пишем $\omega_r(f,h)$.

Замечание 1.2. Нетрудно видеть, что в условиях определения 1.3 при $h \in [0,(b-a)/p]$ будет

$$\omega_r(f,h) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \|\delta_t^r(f) \mid [a + rt/2, b - rt/2]\|.$$

Определение 1.4. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, функция f определена на промежутке X. Полагаем*

$$\omega_r(f,h,X)_M = \sup |\Delta_t^r(f,x)|,$$

где верхняя грань берется по множеству $\{x,t) : 0 \leqslant t \leqslant h, x, x+rt \in X\}$.

Очевидно, что если $f \in C[a,b]$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in [0,(b-a)/r]$, то

$$\omega_r(f,h,[a,b])_\infty = \omega_r(f,h,[a,b])_M.$$

1.3. Приведем ряд свойств модулей непрерывности, введенных в определении 1.3.

М.1. Если $r \in \mathbb{N}$, то $\omega_r(f,0) = 0$.

М.2. Если $0 \leqslant h_1 < h_2$, то $\omega_r(f,h_1) \leqslant \omega_r(f,h_2)$.

М.3. При фиксированном $h \geqslant 0$ отображение, сопоставляющее $f \in L_p[a,b]$ число $\omega_r(f,h,[a,b])_p$, является полунормой в $L_p[a,b]$.

Эти свойства очевидны.

М.4. Если $n \in \mathbb{N}$, то

$$\omega_r(f,nh) \leqslant n^r \omega_r(f,h).$$

◁ Пусть $p \in [1,\infty)$, $nh \leqslant (b-a)/r$. Обозначим $\gamma = t\sum_{l=1}^{r} j_l$, $\sum = \sum_{j_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{j_r=0}^{n-1}$. Тогда, в силу (1.3),

$$\omega_r(f,nh) = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \left(\int\limits_a^{b-rnt} |\Delta_{nt}^r(f,x)|^p\,dx \right)^{1/p} =$$

$$= \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \left(\int\limits_a^{b-rnt} \left|\sum \Delta_t^r(f,x+\gamma)\right|^p dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \sum \left(\int\limits_a^{b-rnt} |\Delta_t^r(f,x+\gamma)|^p\,dx \right)^{1/p}.$$

Замечая, что $0 \leqslant \gamma \leqslant rnt - rt$, найдем

$$\omega_r(f,nh) \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \sum \left(\int\limits_{a+\gamma}^{b+\gamma-rnt} |\Delta_t^r(f,x)|^r\,dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \sum \left(\int\limits_a^{b-rt} |\Delta_t^r(f,x)|^p\,dx \right)^{1/p} = n^r\omega_r(f,h).$$

Если же $nh > (b-a)/r$, то на основании доказанного и свойства М.2

$$\omega_r(f,nh) = \omega_r(f,(b-a)/r) \leqslant n^r\omega(f,(b-a)/(nr)) \leqslant n^r\omega_r(f,h).$$

Случай $p=\infty$ рассматривается аналогично. ▷

М.5. Если $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то

$$\omega_r(f,\lambda h) \leqslant ([\lambda]+1)^r\omega_r(f,h) \leqslant (\lambda+1)^r\omega_r(f,h).$$

Действительно, на основании свойств М.2 и М.4 имеем

$$\omega_r(f,\lambda h) \leqslant \omega_r(f,([\lambda]+1)h) \leqslant ([\lambda]+1)^r\omega_r(f,h).$$

М.6. Если $r > l$, то

$$\omega_r(f,h) \leqslant 2^{r-l}\omega_l(f,h).$$

В частности, $\omega_r(f,h) \leqslant 2^r \omega_0(f,h) = 2^r \|f\|$.

$\lhd$ Ограничимся случаем $1 \leqslant p < \infty$, $l = r-1$. Имеем

$$\omega_r(f,h)_p = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \left(\int\limits_a^{b-rt} |\Delta_t^{r-1}(f,x+t) - \Delta_t^{r-1}(f,x)|^p\,dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant h} \left\{ \left(\int\limits_a^{b-rt} |\Delta_t^{r-1}(f,x+t)|^p\,dx \right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^{b-rt} |\Delta_t^{r-1}(f,x)|^p\,dx \right)^{1/p} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \left(\int\limits_a^{b-(r-1)t} |\Delta_t^{r-1}(f,x)|^p\,dx \right)^{1/p} = 2\omega_{r-1}(f,h)_p. \ \rhd$$

М.7. Пусть $f \in \mathbb{L}[a,b]$. Тогда функция $\omega_r(f)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

$\lhd$ Сначала докажем, что

$$\lim_{h\to 0+} \omega_1(f,h) = 0. \tag{1.10}$$

В случае $p = \infty$ и $f \in C[a,b]$ соотношение (1.10) вытекает из равномерной непрерывности f на отрезке $[a,b]$. Пусть теперь $1 \leqslant p < \infty$ и $g \in C[a,b]$. Тогда

$$\omega_1(g,h)_p \leqslant (b-a)^{1/p} \omega_1(g,h)_\infty. \tag{1.11}$$

В силу плотности множества $C[a,b]$ в пространстве $L_p[a,b]$ при $p < \infty$ для $\varepsilon > 0$ найдется такая $g_\varepsilon \in C[a,b]$, что $\|f - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. По уже доказанному $\omega_1(g_\varepsilon, h)_\infty \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, в силу М.3, М.6 и (1.11) имеем

$$\varlimsup_{h\to 0+} \omega_1(f,h)_p \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{h\to 0+} (\omega_1(f-g_\varepsilon,h)_p + (b-a)^{1/p}\omega_1(g_\varepsilon,h)_\infty) \leqslant 2\|f-g_\varepsilon\|_p < 2\varepsilon.$$

Отсюда, благодаря произвольности $\varepsilon > 0$, заключаем, что $\varlimsup_{h\to 0+} \omega_1(f,h)_p = 0$, т.е. справедливо (1.10).

Установим, что при $h_1 < h_2$ выполняется неравенство

$$\omega_r(f,h_2) - \omega_r(f,h_1) \leqslant 2^r \omega_1(f, r(h_2-h_1)). \tag{1.12}$$

Можно считать, что $h_2 \leqslant (b-a)/r$. Взяв $\varepsilon > 0$, найдем такое $t \in (0, h_2]$, что $\omega_r(f, h_2) \leqslant \|\Delta_t^r(f)\|_t + \varepsilon$, где $\|\cdot\|_t = \|\cdot \mid [a, b-rt]\|_p$. Тогда при $1 \leqslant p < \infty$

$$\omega_r(f,h_2) - \omega_r(f,h_1) - \varepsilon \leqslant \|\Delta_t^r(f)\|_t - \omega_r(f,h_1) \leqslant$$

$$\leqslant \|\Delta_t^r(f)\|_t - \|\Delta_{th_1/h_2}^r(f)\|_{th_1/h_2} \leqslant \|\Delta_t^r(f)\|_t - \|\Delta_{th_1/h_2}^r(f)\|_t \leqslant$$

$$\leqslant \|\Delta_t^r(f) - \Delta_{th_1/h_2}^r(f)\|_t =$$

$$= \left\| \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} C_r^m (f(\cdot + mt) - f(\cdot + mth_1/h_2)) \right\|_t \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{r} C_r^m \left(\int\limits_a^{b-rt} |f(x+mt) - f(x+mth_1/h_2)|^p \, dx \right)^{1/p} =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} C_r^m \left(\int\limits_{a+mth_1/h_2}^{b-rt+mth_1/h_2} |f(x+mt(1-h_1/h_2)) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{r} C_r^m \left(\int\limits_a^{b-mt(1-h_1/h_2)} |\Delta_{mt(1-h_1/h_2)}^1(f,x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{r} C_r^m \omega_1(f, mh_2(1-h_1/h_2)) \leqslant 2^r \omega_1(f, r(h_2-h_1)).$$

Устремляя ε к нулю, приходим к (1.12), когда $p < \infty$. Для пространства $C[a,b]$ неравенство (1.12) устанавливается аналогично. Осталось сопоставить (1.10) и (1.12). $\triangleright$

Нам понадобится следующее хорошо известное неравенство (так называемое обобщенное неравенство Минковского). Если $1 \leqslant p < \infty$, функция $f(x,y)$ суммируема на $[a,b] \times [c,d]$, то

$$\left(\int\limits_a^b \left| \int\limits_c^d f(x,y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leqslant \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b |f(x,y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy. \qquad (1.13)$$

M.8. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l < r$, $f \in W_r^{(r-l)}[a,b]$. Тогда

$$\omega_r(f,h)_p \leqslant h^{r-l} \omega_l(f^{(r-l)}, h)_p.$$

В частности, при $l=0$ имеем

$$\omega_r(f,h)_p \leqslant h^r\|f^{(r)}\|_p. \tag{1.14}$$

$\lhd$ Будем считать $1\leqslant p<\infty$ (случай $p=\infty$ рассматривается аналогично). Достаточно установить, что для $f\in W_p^{(1)}[a,b]$, $t\in[0,(b-a)/r]$ справедливо неравенство

$$\|\Delta_t^r(f)\mid[a,b-rt]\|_p \leqslant t\|\Delta_t^{r-1}(f')\mid[a,b-(r-1)t]\|. \tag{1.15}$$

Ясно, что

$$\Delta_t^r(f,x)=\Delta_t^{r-1}\left(\int\limits_0^t f'(\cdot+u)du,x\right)=$$

$$=\int\limits_0^t \Delta_t^{r-1}(f'(\cdot+u),x)du=\int\limits_0^t \Delta_t^{r-1}(f',x+u)du. \tag{1.16}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, находим

$$\|\Delta_t^r(f)\mid[a,b-rt]\|_p\leqslant\int\limits_0^t\left(\int\limits_a^{b-rt}|\Delta_t^{r-1}(f',x+u)|^p dx\right)^{1/p} du=$$

$$=\int\limits_0^t\left(\int\limits_{a+u}^{b-rt+u}|\Delta_t^{r-1}(f',x)|^p dx\right)^{1/p} du\leqslant t\left(\int\limits_a^{b-(r-1)t}|\Delta_t^{r-1}(f',x)|^p dx\right)^{1/p},$$

что и есть неравенство (1.15). $\rhd$

M.9. Если $f\in VM[a,b]$, то $\omega_1(f,h)_1\leqslant Mh$.

$\lhd$ При $0<t\leqslant h\leqslant b-a$ имеем

$$\|\Delta_t^1(f)\mid[a,b-t]\|_1=\int\limits_a^{b-t}|f(x+t)-f(x)|dx\leqslant\int\limits_a^{b-t}\operatorname*{Var}_x^{x+t} f\,dx=$$

$$=\int\limits_a^{b-t}\left(\operatorname*{Var}_a^{x+t} f-\operatorname*{Var}_a^{x} f\right)dx=\int\limits_{a+t}^{b}\operatorname*{Var}_a^{x} f\,dx-\int\limits_a^{b-t}\operatorname*{Var}_a^{x} f\,dx=$$

$$=\int\limits_{b-t}^{b}\operatorname*{Var}_a^{x} f\,dx-\int\limits_a^{a+t}\operatorname*{Var}_a^{x} f\,dx\leqslant\int\limits_{b-t}^{b}\operatorname*{Var}_a^{b} f\,dx=t\operatorname*{Var}_a^{b} f. \quad \rhd$$

М.10. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $f \in W_p^{(1)}[a,b]$. Тогда

$$\omega_r(f,h)_q \leqslant h^{1-1/p+1/q}\omega_{r-1}(f',h)_p.$$

$\triangleleft$ Можно считать $h \in (0,(b-a)/r)]$. Пусть сначала $q=\infty$. В силу (1.16) и неравенства Гельдера для интегралов, при $x \in [a,b-rh]$ имеем

$$|\Delta_h^r(f,x)| \leqslant \int\limits_0^h |\Delta_h^{r-1}(f',x+u)|du \leqslant$$

$$\leqslant h^{1-1/p}\left(\int\limits_0^h |\Delta_h^{r-1}(f',x+u)|^p du\right)^{1/p} =$$

$$= h^{1-1/p}\left(\int\limits_x^{x+h} |\Delta_h^{r-1}(f',u)|^p du\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant h^{1-1/p}\left(\int\limits_a^{b-(r-1)h} |\Delta_h^{r-1}(f')|^p\right)^{1/p} \leqslant h^{1-1/p}\omega_{r-1}(f',h)_p.$$

Отсюда

$$\omega_r(f,h)_\infty \leqslant h^{1-1/p}\omega_{r-1}(f',h)_p. \tag{1.17}$$

Если $q<\infty$, то используя (1.17) и свойство М.8, получаем

$$\|\Delta_h^r(f) \mid [a,b-rh]\|_q = \left(\int\limits_a^{b-rh} |\Delta_h^r(f)|^{q-p}|\Delta_n^r(f)|^p\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \omega_r(f,h)_\infty^{(q-p)/q}\cdot\omega_r(f,h)_p^{p/q} \leqslant h^{(1-1/p)(q-p)/q}\times$$

$$\times\omega_{r-1}(f',h)_p^{(q-p)/q}h^{p/q}\omega_{r-1}(f',h)_p^{p/q} = h^{1-1/p+1/q}\omega_{r-1}(f',h)_p. \quad \triangleright$$

М.11. Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p[a,b]$, то

$$\underline{\lim}_{h\to 0+}\frac{\omega_r(f,h)_p}{h^r} = \overline{\lim}_{h\to 0+}\frac{\omega_r(f,h)_p}{h^r} = \sup_{h>0}\frac{\omega_r(f,h)_p}{h^r}.$$

◁ При $0 < h_1 < h_2$ имеем

$$\omega_r(f, h_2) \leqslant \left(\frac{h_2}{h_1} + 1\right)^r \omega_r(f, h_1)$$

или

$$\frac{\omega_r(f, h_2)}{(h_1 + h_2)^r} \leqslant \frac{\omega_r(f, h_1)}{h_1^r}.$$

Отсюда вытекает, что при любом $h_2 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{\omega_r(f, h_2)}{h_2^r} \leqslant \varliminf_{h_1 \to 0+} \frac{\omega_r(f, h_1)}{h_1^r},$$

т.е.

$$\sup_{h>0} \frac{\omega_r(f, h)}{h^r} \leqslant \varliminf_{h \to 0+} \frac{\omega_r(f, h)}{h^r}.$$

С другой стороны,

$$\varlimsup_{h \to 0} \frac{\omega_r(f, h)}{h^r} \leqslant \sup_{h>0} \frac{\omega_r(f, h)}{h^r}. \quad ▷$$

М.12. Если $f \in L_p[a, b]$ и $\varliminf_{h \to 0+} \frac{\omega_r(f,h)_p}{h^r} = 0$, то $\omega_r(f, h)_p \equiv 0$. Это свойство очевидно в силу М.11.

М.13. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in W_p^{(r)}[a, b]$. Тогда

$$\|f^{(r)}\|_p = \lim_{h \to 0+} \frac{\omega_r(f, h)_p}{h^r}.$$

◁ Существование предела и неравенство

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\omega_r(f, h)}{h^r} \leqslant \|f^{(r)}\|_p$$

следует из свойств М.11 и М.8. Далее, полагая $\| \cdot \|_h = \|\cdot \mid [a, b - rh]\|$, при $1 \leqslant p < \infty$ в силу (1.4) имеем

$$\|f^{(r)}\|_h \leqslant \left\| f^{(r)} - \frac{\Delta_h^r(f)}{h^r} \right\|_h + \left\| \frac{\Delta_h^r(f)}{h^r} \right\|_h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h^r} \int\limits_{[0,h]^r} \left\| f^{(r)} - f^{(r)} \left(\cdot + \sum_{j=1}^r t_j \right) \right\|_h dt_1 \ldots dt_r + \frac{\omega_r(f, h)}{h^r} \leqslant$$

$$\leqslant \omega_1(f^{(r)}, rh) + \frac{\omega_r(f,h)}{h^r} \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} \varlimsup_{h\to 0+} \frac{\omega_r(f,h)}{h^r}.$$

При $p = \infty$ почти везде на $[a, b]$ имеем

$$|f^{(r)}(x)| = \lim_{h\to 0+} \frac{|\Delta^r(f,x)|}{h^r} \leqslant \varlimsup_{h\to 0+} \frac{\omega_r(f,h)}{h^r}. \quad \triangleright$$

1.4. Понятие модуля непрерывности модифицировалось многими авторами в различных направлениях. Так, например, в работе Н. А. Лебедева [1] (см. [4], с. 100–101) рассматривается комплексная функция f, заданная и непрерывная на ограниченном замкнутом множестве $\overline{B} \subset \mathbb{C}$. Для нее обычным образом вводится модуль непрерывности

$$\omega(f,\delta) = \sup_{|z'-z''|\leqslant\delta} |f(z') - f(z'')|, \quad z' \in \overline{B}, \quad z'' \in \overline{B}$$

и определяется функция

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{y\geqslant 0\\ 0\leqslant x\leqslant\delta}} \left\{ \frac{x}{x+y}\omega(f,\delta+y) + \frac{y}{x+y}\omega(f,\delta-x) \right\}, \quad \delta \geqslant 0,$$

причем выражение в фигурных скобках при $x = 0$, $y = 0$ полагается равным $\omega(f,\delta)$.

Функция $\omega_f(\delta)$ обладает следующими легко доказываемыми свойствами:

1) $0 \leqslant \omega(f,\delta) \leqslant \omega_f(\delta)$, $\delta \geqslant 0$;

2) $\omega_f(0) = 0$;

3) Функция $\omega_f(\delta)$ определена и непрерывна при $\delta \geqslant 0$;

4) Функция $\omega_f(\delta)$ не убывает при $\delta \geqslant 0$;

5) $\omega_f(\delta) \leqslant \omega(f,d)$, $\delta \geqslant 0$, где d – диаметр множества $\overline{B}$;

6) $\omega_f\left(\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\right) \geqslant \frac{1}{2}(\omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2))$, $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$.

В [1] доказывается следующее интересное утверждение.

Пусть $\overline{B}$ – замкнутое ограниченное множество точек комплексной плоскости z; $f(z)$ – функция непрерывная на $\overline{B}$. Существует функция $f_*(z)$, заданная на всей комплексной плоскости z и такая, что

a) $f_*(z) = f(z)$ при $z \in \overline{B}$;

b) $\omega_{f_*}(\delta) = \omega_f(\delta)$, $\delta > 0$;

c) $f_*(z) \in G_f$ при всяком z, где G_f – выпуклая оболочка множества точек $w = f(z)$ для всевозможных $z \in \overline{B}$.

Пусть g – фиксированная неотрицательная функция, имеющая период 2π и такая, что $0 < \int_{-\pi}^{\pi} g = 2l < \infty$. Положим

$$g(t_1, t_2) = \left| \int_{t_1}^{t_2} g \right|.$$

Под классом $C_{2\pi}(g)$ понимаем класс 2π-периодических функций $f \in C(\mathbb{R})$ таких, что $f(t) = \text{const}$ на всяком интервале (α, β), для которого $\int_{\alpha}^{\beta} g = 0$. В [3] для любой функции $f \in C_{2\pi}(g)$ введен обобщенный модуль непрерывности

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f, g) = \sup_{g(t_1,t_2) \leqslant \delta} |f(t_1) - f(t_2)|, \quad \delta \geqslant 0.$$

Легко видеть, что

1) $\omega(0+) = \omega(0) = 0$;

2) $\omega(\delta_2) \leqslant \omega(\delta_1)$, $\delta_2 \leqslant \delta_1$;

3) $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$, $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$;

4) $|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \omega(g(t_1, t_2)) \leqslant \left(1 + \frac{1}{\delta} g(t_1, t_2)\right) \omega(\delta)$, $\delta > 0$.

При $g(t) \equiv 1$ получаем обычный модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$.

Положим $x = x(t) = \frac{\pi}{l} \int_0^t g(\tau) d\tau$, $t = t(x)$ – обратная для $x = x(t)$ функция. Пусть $\widehat{f}(x) = f(t(x))$. Нетрудно видеть, что при $\delta \geqslant 0$ имеем

$$\omega(\delta, f, g) = \omega\left(\widehat{f}, \frac{\pi}{l}\,\delta\right).$$

Обозначим через Ω класс возрастающих функций $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям: a) $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$ (полуаддитивность); b) $\omega(0) = \lim_{t \to 0+} \omega(t) = 0$. Подкласс класса Ω, состоящий из выпуклых вверх функций, обозначим через Ω^*.

Отметим некоторые свойства функций класса Ω.

C.1. Если $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$, то $\omega(nt) \leqslant n\omega(t)$.

Это свойство – очевидное следствие полуаддитивности.

C.2. Функция класса Ω равномерно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

$\lhd$ Пусть $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$. Непосредственным следствием полуаддитивности является неравенство $|\omega(t_2) - \omega(t_1)| \leqslant \omega(|t_2 - t_1|)$.

Поэтому непрерывность функции ω в точке 0 влечет ее равномерную непрерывность на $\mathbb{R}_+$. $\rhd$

C.3. Если возрастающая функция $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $\omega(0) = \lim_{t \to 0+} \omega(t) = 0$, причем функция $\omega(t)/t$ убывает на $(0, \infty)$, то $\omega \in \Omega$.

$\lhd$ Достаточно установить полуаддитивность функции ω. Так как $\omega(t)/t$ убывает, то при любых положительных t_1 и t_2

$$\omega(t_1+t_2) = t_1\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2} + t_2\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2} \leqslant$$

$$\leqslant t_1\frac{\omega(t_1)}{t_1} + t_2\frac{\omega(t_2)}{t_2} = \omega(t_1)+\omega(t_2). \quad \rhd$$

С.4. Если $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная, выпуклая вверх, возрастающая функция, причем $\omega(0)=0$, то $\omega\in\Omega$.

$\lhd$ Достаточно установить убывание функции $\omega(t)/t$. Пусть $0 < t_1 < t_2$. Пользуясь определением выпуклой вверх функции, имеем

$$\frac{t_1}{t_2}\omega(t_2) = \frac{t_1}{t_2}\omega(t_2) + \frac{t_2-t_1}{t_2}\omega(0) \leqslant \omega(t_1),$$

т.е. $\frac{\omega(t_2)}{t_2} \leqslant \frac{\omega(t_1)}{t_1}$. $\rhd$

С.5. Пусть $\omega\in\Omega$ таково, что $\underline{\lim}_{t\to 0+}\frac{\omega(t)}{t} = 0$. Тогда $\omega(t)\equiv 0$.

$\lhd$ Пусть $0<t_1<t_2$. Тогда в силу С.1 имеем

$$\omega(t_2) = \omega\left(\frac{t_2}{t_1}\,t_1\right) \leqslant \left(\left[\frac{t_2}{t_1}\right]+1\right)\omega(t_2) \leqslant 2\frac{t_2}{t_1}\,\omega(t_1),$$

т.е. $\frac{\omega(t_2)}{t_2} \leqslant 2\frac{\omega(t_1)}{t_1}$. Отсюда

$$\frac{\omega(t_2)}{t_2} \leqslant 2\underline{\lim}_{t_1\to 0+}\frac{\omega(t_1)}{t_1} = 0.$$

Значит, $\omega(t_2)=0$. $\rhd$

С.6. Если $f\in\mathbb{L}[a,b]$, то $\omega_1(f)\in\Omega$.

$\lhd$ В силу М.1, М.2 и М.7, достаточно установить полуаддитивность $\omega_1(f)$. Ограничимся случаем $\mathbb{L}[a,b] = L_p[a,b]$, где $1\leqslant p<\infty$ (при $\mathbb{L}[a,b]=C[a,b]$ рассуждения лишь упрощаются).

Пусть $h_1+h_2\leqslant b-a$, $t_1\leqslant h_1$, $t_2\leqslant h_2$. Так как

$$\Delta^1_{t_1+t_2}(f,x) = \Delta^1_{t_1}(f,x) + \Delta^1_{t_2}(f,x+t_1),$$

то

$$\left(\int\limits_a^{b-t_1-t_2} |\Delta^1_{t_1+t_2}(f,x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_a^{b-t_1-t_2} |\Delta^1_{t_1}(f,x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^{b-t_1-t_2} |\Delta^1_{t_2}(f,t+x_1)|^p dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_a^{b-t_1} |\Delta^1_{t_1}(f)|^p \right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^{b-t_2} |\Delta^1_{t_2}(f)|^p \right)^{1/p} \leqslant \omega_1(f,h_1)+\omega_1(f,h_2),$$

отсюда $\omega_1(f,h_1+h_2) \leqslant \omega_1(f,h_1)+\omega_1(f,h_2)$. Если же $h_1+h_2 > b-a$, но $h_1 \leqslant b-a$, то

$$\omega_1(f,h_1+h_2) = \omega_1(f,b-a) = \omega_1(f,h_1+b-a-h_1)$$

и рассуждение сводится к доказанному выше. $\triangleright$

Нам понадобится следующий результат К. Каратеодори.

Теорема 1.1. *Если $E \subset \mathbb{R}^n$, то каждый элемент x выпуклый оболочки множества E представим в виде $x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k$, где $x_k \in E$, $\alpha_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$.*

Установим один общий результат, полезный, в частности, при изучении модулей непрерывности.

Теорема 1.2. *Пусть функция $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ возрастает, непрерывна, $g(0) = 0$. Пусть далее существует такая выпуклая вверх функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что при всех $x, \lambda \in \mathbb{R}_+$ справедливо неравенство $g(\lambda x) \leqslant \varphi(\lambda) g(x)$. Тогда найдется функция $\psi \in \Omega^*$, удовлетворяющая при всех $x, \lambda \in \mathbb{R}_+$ соотношению*

$$g(\lambda x) \leqslant \psi(\lambda x) \leqslant \varphi(\lambda) g(x). \tag{1.18}$$

$\triangleleft$ Обозначив через E выпуклую оболочку множества $\{0 \leqslant x < +\infty, 0 \leqslant y \leqslant g(x)\} \subset \mathbb{R}^2$, положим $\psi(x) = \sup\{y : (x,y) \in E\}$. Ясно, что $g(x) \leqslant \psi(x)$, ψ – выпукла вверх. Так как $g(x) \leqslant \varphi(x) g(1)$, а ψ – наименьшая выпуклая вверх мажоранта g, то $\psi(x) \leqslant \varphi(x) g(1)$. Отсюда следует конечность ψ. Из неотрицательности и выпуклости вверх функции ψ вытекает ее возрастание. Будем считать, что $g \not\equiv 0$ (в противном случае доказываемое утверждение тривиально). Тогда $g(x) > 0$ для любого $x > 0$. В самом деле, предположив, что $g(x_0) = 0$ при некотором $x_0 > 0$, в силу условия теоремы получим для любого $x > 0$

$$0 \leqslant g(x) = g\left(\frac{x}{x_0} x_0\right) \leqslant \varphi\left(\frac{x}{x_0}\right) g(x_0) = 0.$$

Фиксируем λ, $x > 0$. Ясно, что $\psi(\lambda x) > 0$ и $\{(\lambda x, y) : 0 \leqslant y < \psi(\lambda x)\} \subset E$. Значит, для $\varepsilon \in (0, \psi(\lambda x))$ либо $\psi(\lambda x) - \varepsilon \leqslant g(\lambda x) \leqslant \varphi(\lambda) g(x)$, либо точка $(\lambda x, \psi(\lambda x) - \varepsilon)$ принадлежит некоторому треугольнику с вершинами (x_i, y_i), где $0 \leqslant y_i \leqslant g(x_i)$ $(i = \overline{1,3})$. Будем считать, что (x_1, y_1), (x_2, y_2) – концы той стороны этого треугольника, которая лежит над точкой $(\lambda x, \psi(\lambda x) - \varepsilon)$, т.е. $\lambda x \in [x_1, x_2]$ и

$$\psi(\lambda x) - \varepsilon \leqslant \frac{x_2 - \lambda x}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{\lambda x - x_1}{x_2 - x_1} y_2.$$

Отсюда

$$\psi(\lambda x) - \varepsilon \leqslant \frac{x_2 - \lambda x}{x_2 - x_1} g(x_1) + \frac{\lambda x - x_1}{x_2 - x_1} g(x_2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x_2 - \lambda x}{x_2 - x_1} \varphi\left(\frac{x_1}{x}\right) g(x) + \frac{\lambda x - x_1}{x_2 - x_1} \varphi\left(\frac{x_2}{x}\right) g(x) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi\left(\frac{x_2 - \lambda x}{x_2 - x_1} \frac{x_1}{x} + \frac{\lambda x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x_2}{x}\right) g(x) = \varphi(\lambda) g(x).$$

Тем самым ввиду произвольности ε неравенства (1.18) доказаны. Из (1.18) следует, что $\lim_{x \to 0+} \psi(x) = \psi(0) = 0$. Непрерывность функции ψ в остальных точках вытекает из выпуклости этой функции. $\rhd$

M.14. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{L}[a, b]$. Тогда существует такая функция $\omega \in \Omega^*$ (зависящая от f и $\mathbb{L}$), что для всех $h, \lambda \in \mathbb{R}_+$ справедливы неравенства

$$\omega_r(f, \lambda h) \leqslant \omega((\lambda h)^r) \leqslant (\lambda + 1)^r \omega_r(f, h).$$

$\lhd$ Так как по свойству M.5 имеем

$$\omega_r(f, (\gamma t)^{1/r}) \leqslant (\gamma^{1/r} + 1)^r \omega_r(f, t^{1/r})$$

и функция $(\gamma^{1/r} + 1)^r$ выпукла вверх, то по теореме 1.2 найдется $\omega \in \Omega^*$, такая что для всех $t, \gamma \in \mathbb{R}_+$ будет

$$\omega_r(f, (\gamma t)^{1/r}) \leqslant \omega(\gamma t) \leqslant (\gamma^{1/r} + 1)^r \omega_r(f, t^{1/r}).$$

Осталось положить $h = t^{1/r}$, $\lambda = \gamma^{1/r}$. $\rhd$

Замечание 1.3. Нетрудно видеть, что свойства M.1, M.2, M.4–M.6, M.11, M.12 распространяются на случай модуля непрерывности $\omega_r(f, h, X)_M$. При этом в M.6 $\|f\|$ заменяется на $\omega_0(f, h, X)_M$. Если функция f равномерно непрерывна на промежутке X, то для $\omega_r(f, h, X)_M$ выполняются утверждения M.7, M.14, C.6.

§2. Оценки модулей непрерывности низших порядков через высшие

2.1. В силу свойства М.6 модуль непрерывности большего порядка оценивается через модуль непрерывности меньшего порядка. В этом параграфе рассматривается обратная задача.

Теорема 2.1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, функция f задана на промежутке X,*

$$0 < h \leqslant A \leqslant \frac{\operatorname{mes} X}{3r}.$$

Тогда

$$\omega_r(f,h,X)_M \leqslant \frac{r^2}{2(1-2^{-r})}\, h^r \int\limits_h^A \frac{\omega_{r+1}(f,t,X)_M}{t^{r+1}}\,dt + \frac{h^r}{A^r}\,\omega_r(f,2A,X)_M. \tag{2.1}$$

$\lhd$ Ограничимся рассмотрением случая $X = [a,b]$. Пусть $0 < u \leqslant t \leqslant A$. В случае $x + ru/2 < (a+b)/2$ будет $x + 2ru \leqslant b$ и потому применима формула (1.7), из которой следует

$$|\Delta_u^r(f,x)| \leqslant \frac{1}{2^r}|\Delta_{2u}^r(f,x)| + \frac{1}{2^r}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} |\Delta_u^{r+1}(f,x+ju)|. \tag{2.2}$$

Значит,

$$|\Delta_u^r(f,x)| \leqslant \frac{1}{2^r}\omega_r(2t) + \frac{1}{2^r}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \omega_{r+1}(t).$$

Но $\sum_{m=1}^r mC_r^m = r2^{r-1}$. Поэтому для рассматриваемых x

$$|\Delta_u^r(f,x)| \leqslant \frac{\omega_r(2t)}{2^r} + \frac{r}{2}\,\omega_{r+1}(t). \tag{2.3}$$

В случае $x + ru/2 > (a+b)/2$ будет $x - ru > a$ и потому применима формула (1.8), из которой следует

$$|\Delta_u^r(f,x)| \leqslant \frac{1}{2^r}|\Delta_{2u}^r(f,x-ru)| + \frac{1}{2^r}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} |\Delta_u^{r+1}(f,x-(j+1)u)|. \tag{2.4}$$

Значит, и в этом случае имеет место (2.3). Переходя в (2.3) к верхней грани, находим

$$\omega_r(t) - \frac{1}{2^r}\,\omega_r(2t) \leqslant \frac{r}{2}\,\omega_{r+1}(t). \tag{2.5}$$

(Можно считать, что при рассматриваемых t величина $\omega_r(t)$ конечна, ибо в противном случае $\omega_r(2A) = \infty$ и (2.1) очевидно.) Из (2.5) вытекает

$$\int_h^A \frac{\omega_r(t) - 2^{-r}\omega_r(2t)}{t^{r+1}}\,dt \leqslant \frac{r}{2}\int_h^A \frac{\omega_{r+1}(t)}{t^{r+1}}\,dt.$$

Так как

$$\int_h^A \frac{\omega_r(t) - 2^{-r}\omega_r(2t)}{t^{r+1}}\,dt = \int_h^{2h} \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}}\,dt - \int_A^{2A} \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}}\,dt,$$

то

$$\int_h^{2h} \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}}\,dt \leqslant \frac{r}{2}\int_h^A \frac{\omega_{r+1}(t)}{t^{r+1}}\,dt + \int_A^{2A} \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}}\,dt.$$

Но

$$\int_h^{2h} \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}}\,dt \geqslant \omega_r(h)\int_h^{2h} \frac{dt}{t^{r+1}} = \frac{\omega_r(h)}{rh^r}\left(1 - \frac{1}{2^r}\right),$$

$$\int_A^{2A} \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}}\,dt \leqslant \frac{\omega_r(2A)}{rA^r}\left(1 - \frac{1}{2^r}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\omega_r(h)}{h^r} \leqslant \frac{r^2}{2(1-2^{-r})}\int_h^A \frac{\omega_{r+1}(t)}{t^{r+1}}\,dt + \frac{\omega_r(2A)}{A^r}. \qquad \triangleright$$

Замечание 2.1. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{при} \quad x \in [a, (a+b)/2], \\ 1/2 & \text{при} \quad x \in ((a+b)/2, b] \end{cases}$$

в условиях теоремы 2.1 неравенство (2.1) при $r=1$ превращается в равенство.

Замечание 2.2. Если $r\in\mathbb{N}$, $f\in L_\infty[a,b]$, $0<h\leqslant A\leqslant (b-a)/(3r)$, то

$$\omega_r(f,h)_\infty\leqslant \frac{r^2h^r}{2(1-2^{-r})}\int\limits_h^A \frac{\omega_{r+1}(f,t)_\infty}{t^{r+1}}\,dt+\frac{h^r}{A^r}\,\omega_r(f,2A)_\infty.$$

$\lhd$ Из соотношений (2.2) и (2.4) соответственно получаем

$$\left\|\Delta_u^r(f)\right|\left[a,\frac{a+b}{2}-\frac{ru}{2}\right]\Big\|_\infty\leqslant\frac{1}{2^r}\,\omega_r(f,2t)_\infty+\frac{r}{2}\,\omega_{r+1}(f,t)_\infty,$$

$$\left\|\Delta_u^r(f)\right|\left[\frac{a+b}{2}-\frac{ru}{2},b-ru\right]\Big\|_\infty\leqslant\frac{1}{2^r}\,\omega_r(f,2t)_\infty+\frac{r}{2}\,\omega_{r+1}(f,t)_\infty.$$

Так как ($c=(a+b)/2$)

$$\|g,[a,b-ru]\|_\infty=\max\left\{\left\|g\right|\left[a,c-\frac{ru}{2}\right]\Big\|_\infty,\left\|g\right|\left[c-\frac{ru}{2},b-ru\right]\Big\|_\infty\right\},$$

то

$$\omega_r(f,t)_\infty=\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\|\Delta_u^r(f)\mid[a,b-ru]\|_\infty\leqslant\frac{1}{2^r}\omega_r(f,2t)_\infty+2\omega_{r+1}(f,t)_\infty.$$

Далее рассуждаем также, как и в доказательстве теоремы 2.1. $\rhd$

Теорема 2.2. *Пусть $r,j\in\mathbb{N}$, функция f задана на промежутке X, $0<h\leqslant A\leqslant\frac{\operatorname{mes}X}{3(r+j-1)}$. Тогда*

$$\omega_r(f,h,X)_M\leqslant C(r,j)h^r\int\limits_h^A\frac{\omega_{r+j}(f,t,X)_M}{t^{r+1}}dt+B(r,j)\frac{h^r}{A^r}\omega_r(f,2A,X)_M,\tag{2.6}$$

где $C(r,j)$ и $B(r,j)$ зависят только от r и j.

$\lhd$ Проведем индукцию по j. Случай $j=1$ рассмотрен в теореме 2.1. При этом $C(r,1)=r^2/(2(1-2^{-r}))$, $B(r,1)=1$. Предположим, что при некотором j справедливо (2.6). Если $A\leqslant\frac{\operatorname{mes}X}{3(r+j)}$, то по теореме 2.1 при $0<t\leqslant A$ имеем

$$\omega_{r+j}(t)\leqslant C(r+j,1)t^{r+j}\int\limits_t^A\frac{\omega_{r+j+1}(u)}{u^{r+j+1}}du+\frac{t^{r+j}}{A^{r+j}}\omega_{r+j}(2A).$$

Подставляя это в (2.6), получим

$$\frac{\omega_r(h)}{h^r} \leqslant$$

$$\leqslant C(r,j) \int\limits_h^A \left(C(r+j,1) t^{r+j} \int\limits_t^A \frac{\omega_{r+j+1}(u)}{u^{r+j+1}} du + \frac{t^{r+j}}{A^{r+j}} \omega_{r+j}(2A) \right) \frac{dt}{t^{r+1}} +$$

$$+ B(r,j) \frac{\omega_r(2A)}{A^r} = C(r,j) C(r+j,1) \int\limits_h^A \int\limits_t^A \frac{\omega_{r+j+1}(u)}{u^{r+j+1}} du t^{j-1} dt +$$

$$+ C(r,j) \int\limits_h^A \frac{\omega_{r+j}(2A)}{A^{r+j}} t^{j-1} dt + B(r,j) \frac{\omega_r(2A)}{A^r} =$$

$$= C(r,j) C(r+j,1) \int\limits_h^A \frac{\omega_{r+j+1}(u)}{u^{r+j+1}} \frac{u^j - h^j}{j} du +$$

$$+ C(r,j) \frac{A^j - h^j}{j} \frac{\omega_{r+j}(2A)}{A^{r+j}} + B(r,j) \frac{\omega_r(2A)}{A^r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(r,j) C(r+j,1)}{j} \int\limits_h^A \frac{\omega_{r+j+1}(t)}{t^{r+1}} dt + \left(\frac{2^j C(r,j)}{j} + B(r,j) \right) \frac{\omega_r(2A)}{A^r}.$$

Осталось положить $C(r,j+1) = C(r,j)C(r+j,1)/j$, $B(r,j+1) = \frac{2^j C(r,j)}{j} + B(r,j)$. ▷

Замечание 2.3. Из доказательства теоремы 2.2 нетрудно усмотреть, что можно взять

$$C(r,j) = \frac{1}{(j-1)! 2^j} \left(\frac{(r+j-1)!}{(r-1)!} \right)^2 \prod_{k=0}^{j-1} (1 - 2^{-r-k})^{-1},$$

$$B(r,j) = 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} \right)^2 \prod_{\gamma=0}^{k-1} (1 - 2^{-r-\gamma})^{-1}.$$

Замечание 2.4. Если $r, j \in \mathbb{N}$, $f \in L_\infty[a,b]$, $0 < h \leqslant A \leqslant \frac{b-a}{3(r+j-1)}$, то

$$\omega_r(f,h)_\infty \leqslant C(r,j)h^r \int\limits_h^A \frac{\omega_{r+j}(f,t)_\infty}{t^{r+1}}\,dt + B(r,j)\frac{h^r}{A^r}\omega_r(f,2A)_\infty,$$

где постоянные $C(r,j)$, $B(r,j)$ те же, что в замечании 2.3.

Доказательство замечания 2.4 аналогично доказательству теоремы 2.2, но здесь вместо теоремы 2.1 используется замечание 2.2.

Теорема 2.3. *Если функция f задана и локально ограничена на промежутке X (т.е. ограничена в некоторой окрестности каждой точки X), то соотношение $\lim_{h\to 0+}\omega_r(f,h,X)_M = 0$, где $r \in \mathbb{N}$, влечет непрерывность f на X. Если кроме того промежуток X конечен, то f равномерно непрерывна на X.*

$\lhd$ В случае $r = 1$ доказываемые утверждения очевидны. Поэтому будем считать $r > 1$. Пусть $x_0 \in X$, отрезок $[\alpha,\beta] \subset X$ таков, что $x_0 \in [\alpha,\beta]$ и f ограничена на $[\alpha,\beta]$. Так как

$$\gamma_r(h) = \omega_r(h,[\alpha,\beta]) \leqslant \omega_r(h,X),$$

то $\gamma_r(h) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0$. В силу теоремы 2.2 при достаточно малых h имеем

$$\gamma_1(h) \leqslant C(1,r-1)h\int\limits_h^{\sqrt{h}}\frac{\gamma_r(t)}{t^2}\,dt + B(1,r-1)\sqrt{h}\,\gamma_1(2\sqrt{h}) \leqslant$$

$$\leqslant C(1,r-1)\gamma_r(\sqrt{h}) + B(1,r-1)\sqrt{h}\,2\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)| \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Тем самым первое утверждение теоремы 2.3 доказано.

Пусть теперь $a = \inf X$, $b = \sup X$ конечны. Так как

$$\omega_r(h) = \omega_r(f,h,X)_M \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0,$$

то найдется такое $h_0 > 0$, что $\omega_r(h_0) \leqslant 1$. Тогда при всех $h > 0$ будет

$$\omega_r(h) \leqslant \omega_r\left(\frac{b-a}{r}\right) \leqslant \left(\frac{b-a}{rh_0}+1\right)^r.$$

Положим $\delta = \frac{b-a}{r+1}$. По лемме Бореля–Лебега о покрытиях, функция f ограничена на $X_1 = [a+\delta, b-\delta]$, т.е. $\sup_{x\in X_1} |f(x)| = M < \infty$. Если $x \in (b-\delta, b)$, $\gamma = (x-a-\delta)/r$, то при $m = \overline{0, r-1}$ точки $a+\delta+m\gamma \in X_1$. Следовательно,

$$|f(x)| = |\Delta_\gamma^r(f, a+\delta) - \sum_{m=0}^{r-1} (-1)^{r-m} C_r^m f(a+\delta+m\gamma)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{b-a}{rh_0} + 1\right)^r + (2^r - 1)M.$$

Случай $x \in (a, a+\delta)$ рассматривается аналогично. Значит, функция f ограничена на X. Рассуждая теперь также как и при доказательстве первого утверждения, получаем соотношение $\lim_{h\to 0+} \omega_1(h) = 0$, равносильное равномерной непрерывности f на X. $\triangleright$

Лемма 2.1. *Пусть $g \in L_1[\alpha, \beta]$, $g \geqslant 0$, $u \in (0, \beta-\alpha)$. Тогда найдется такое $\gamma \in [\alpha+u, \beta]$, что*

$$\int_{\gamma-u}^{\gamma} g \leqslant \frac{u}{\beta-\alpha-u} \int_\alpha^\beta g.$$

$\triangleleft$ Пусть $n = \left[\frac{\beta-\alpha}{u}\right]$, $x_k = \alpha + k\frac{\beta-\alpha}{n}$. Тогда $\int_\alpha^\beta g = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} g$ и найдется такое m, что

$$\int_{x_{m-1}}^{x_m} g \leqslant \frac{1}{n} \int_\alpha^\beta g = \frac{1}{[(\beta-\alpha)/u]} \int_\alpha^\beta g \leqslant \frac{u}{\beta-\alpha-u} \int_\alpha^\beta g.$$

С другой стороны, $x_m - x_{m-1} \geqslant u$. Поэтому

$$\int_{x_m-u}^{x_m} g \leqslant \frac{u}{\beta-\alpha-u} \int_\alpha^\beta g. \quad \triangleright$$

Теорема 2.4. *Пусть $r, j \in \mathbb{N}$, $s = r+j-1$, $f \in L_p[a,b]$, где $1 \leqslant p < \infty$,*

$$0 < h \leqslant A \leqslant \frac{b-a}{s(3+(3/2)^s 4s/p)}.$$

Тогда

$$\omega_r(f,h)_p \leqslant h^r \left(C_1(r,j) \int\limits_h^A \frac{\omega_{r+j}(f,t)_p}{t^{r+1}} dt + B_1(r,j) \frac{\omega_r(f,2A)_p}{A^r} \right),$$

где $C_1(r,j)$, $B_1(r,j)$ *зависят только от* r *и* j.

$\lhd$ Рассмотрим сначала случай $j=1$. Считая $0<u\leqslant t\leqslant A$, положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^r}|\Delta_{2u}^r(f,x)|,$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2^r}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} |\Delta_u^{r+1}(f,x+ju)|,$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2^r}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} |\Delta_u^{r+1}(f,x+ru-(j+1)u)|.$$

Пользуясь леммой 2.1, подберем такое $c\in[a+ru,b-2ru]$, что

$$\int\limits_{c-ru}^{c} (\varphi+\psi_1+\psi_2)^p \leqslant \frac{ru}{b-a-3ru} \int\limits_a^{b-2ru} (\varphi+\psi_1+\psi_2)^p. \tag{2.7}$$

Неравенства (2.2) и (2.4) можно записать в виде

$$|\Delta_u^r(f,x)| \leqslant \begin{cases} \varphi(x)+\psi_1(x), & \text{если} \quad x\in[a,c], \\ \varphi(x-ru)+\psi_2(x-ru), & \text{если} \quad x\in(c,b-ru]. \end{cases}$$

Имеем

$$\left(\int\limits_a^{b-ru} |\Delta_u^r(f)|^p \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_a^{c} (\varphi+\psi_1)^p + \int\limits_c^{b-ru} (\varphi(\cdot-ru)+\psi_2(\cdot-ru))^p \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\left(\int\limits_a^{c} (\varphi+\psi_1+\psi_2)^p + \int\limits_{c-ru}^{b-2ru} (\varphi+\psi_1+\psi_2)^p \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_a^{b-2ru} (\varphi + \psi_1 + \psi_2)^p + \int\limits_{c-ru}^{c} (\varphi + \psi_1 + \psi_2)^p \right)^{1/p}.$$

Учитывая (2.7), находим

$$\left(\int\limits_a^{b-ru} |\Delta_u^r(f)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\left(1 + \frac{ru}{b-a-3ru}\right) \int\limits_a^{b-2ru} (\varphi + \psi_1 + \psi_2)^p \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{ru}{p(b-a-3ru)}\right) \left(\left(\int\limits_a^{b-2ru} \varphi^p \right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_a^{b-2ru} \psi_1^p \right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^{b-2ru} \psi_2^p \right)^{1/p} \right).$$

Нетрудно видеть, что каждое из двух последних слагаемых не превосходит $r\omega_{r+1}(f,t)/2$. Значит,

$$\left(\int\limits_a^{b-ru} |\Delta_u^r(f)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(1 + \frac{rt}{p(b-a-3rt)}\right) \left(\frac{1}{2^r}\omega_r(f,2t) + r\omega_{r+1}(f,t) \right).$$

Переходя в левой части к верхней грани, деля на t^{r+1} и интегрируя по отрезку $[h,A]$, получаем

$$\int\limits_h^A \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}} dt \leqslant \frac{1}{2^r} \int\limits_h^A \frac{\omega_r(2t)}{t^{r+1}} dt + \frac{r}{2^r p(b-a-3rA)} \int\limits_h^A \frac{\omega_r(2t)}{t^r} dt +$$

$$+ r \left(1 + \frac{rA}{p(b-a-3rA)}\right) \int\limits_h^A \frac{\omega_{r+1}(t)}{t^{r+1}} dt.$$

Затем

$$\int\limits_h^A \frac{\omega_r(2t)}{t^r} dt \leqslant \omega_r(h) \int\limits_h^A \frac{(2t/h+1)^r}{t^r} dt \leqslant \frac{3^r A}{h^r} \omega_r(h).$$

Кроме того,

$$\int_h^A \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}}dt - \frac{1}{2^r}\int_h^A \frac{\omega_r(2t)}{t^{r+1}}dt =$$

$$= \left(\int_h^{2h} - \int_A^{2A}\right) \frac{\omega_r(t)}{t^{r+1}}dt \geqslant \frac{1}{r}\left(\frac{\omega_r(h)}{2h^r} - \frac{\omega_r(2A)}{A^r}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{2r} - \frac{3^r rA}{2^r p(b-a-3rA)}\right)\frac{\omega_r(h)}{h^r} \leqslant$$

$$\leqslant r\left(1 + \frac{rA}{p(b-a-3rA)}\right)\int_h^A \frac{\omega_{r+1}(t)}{t^{r+1}}dt + \frac{\omega_r(2A)}{rA^r}.$$

Так как в рассматриваемом случае $s = r$, т.е. $A \leqslant \frac{b-a}{r/3+(3/2)^r 4r/p}$, то $\frac{3^r rA}{2^r p(b-a-3rA)} \leqslant \frac{1}{4r}$ и потому

$$\frac{\omega_r(h)}{h^r} \leqslant 4r^2\left(1 + \frac{1}{4r}\left(\frac{2}{3}\right)^r\right)\int_h^A \frac{\omega_{r+1}(t)}{t^{r+1}}dt + 4\frac{\omega_r(2A)}{A^r},$$

что и составляет утверждение теоремы 2.4 при $j = 1$.

Остальная часть доказательства аналогична доказательству теоремы 2.2.

Замечание 2.5. Из доказательства теоремы 2.4 нетрудно усмотреть, что можно взять

$$C_1(r,j) = \frac{4^j}{(j-1)!}\left(\frac{(r+j-1)!}{(r-1)!}\right)^2 \prod_{k=0}^{j-1}\left(1 + \frac{1}{4(r+k)(3/2)^{r+k}}\right),$$

$$B_1(r,j) = 4 + \sum_{k=1}^{j-1}\frac{8^k}{k!}\left(\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!}\right)^2 \prod_{\gamma=0}^{k-1}\left(1 + \frac{1}{4(r+\gamma)(3/2)^{r+\gamma}}\right).$$

Следствие 2.1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in W_p^{(r)}[a,b]$. *Тогда*

$$\|f^{(r)}\|_p \leqslant K(r) \left(\int\limits_0^{(b-a)/(r+1)} \frac{\omega_{r+1}(f,t)_p}{t^{r+1}} dt + \frac{\|f\|_p}{(b-a)^r} \right),$$

где $K(r)$ *зависит только от* r.

Это утверждение получается сопоставлением теоремы 2.4 (при $j=1$) и замечания 2.2 со свойством М.13.

§3. Оценки модулей непрерывности производных через модули непрерывности функции

Лемма 3.1. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$, $x \in [a,b]$, $h \neq 0$ *таково, что* $x + rh \in [a,b]$, $h_k = \frac{h}{2^{k+1}}$. *Тогда, если существует* $f^{(r)}(x)$, *то*

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{h^r}\Delta_h^r(f,x) - \frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{h_k^r}\Delta_{h_k}^{r+1}(f, x + jh_k).$$

$\lhd$ В силу (1.7) при $k \in \mathbb{Z}_+$, имеем:

$$\Delta_{h_{k-1}}^r(f,x) - 2^r\Delta_{h_k}^r(f,x) = \sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_{h_k}^{r+1}(f, x + jh_k).$$

Умножая эти равенства на 2^{kr} и складывая, получаем

$$\Delta_h^r(f,x) - 2^{r(n+1)}\Delta_{h_n}^r(f,x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{kr} \sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_{h_k}^{r+1}(f, x + jh_k),$$

и потому

$$\frac{1}{h_n^r}\Delta_{h_n}^r(f,x) = \frac{1}{h^r}\Delta_h^r(f,x) - \frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{h_k^r}\Delta_{h_k}^{r+1}(f, x + jh_k).$$

Осталось заметить, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n^r}\Delta_{h_n}^r(f,x) = f^{(r)}(x). \quad \rhd$$

Следствие 3.1. *Пусть* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$, $h \neq 0$, $x, x + (r+1)h \in [a,b]$, $h_k = \frac{h}{2^{k+1}}$. *Тогда, если существуют* $f^{(r)}(x)$, $f^{(r)}(x+h)$, *то*

$$\Delta_h^1(f^{(r)}, x) = \frac{1}{h^r}\Delta_h^{r+1}(f,x) -$$

$$-\frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{h_k^r}\big(\Delta_{h_k}^{r+1}(f, x+h+jh_k) - \Delta_{h_k}^{r+1}(f, x+jh_k)\big), \quad (3.1)$$

$$|\Delta_h^1(f^{(r)}, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|h|^r}\omega_{r+1}(f, |h|, [a,b])_M + r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|h_k|^r}\omega_{r+1}(f, |h_k|, [a,b])_M. \quad (3.2)$$

Лемма 3.2. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $h_k = \frac{h}{2^{k+1}}$, *неотрицательная возрастающая функция* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такова, что* $g(nx) \leqslant n^{r+1}g(x)$ *при* $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\int_0^h \frac{g(t)}{t^{r+1}}\,dt \leqslant \frac{2^r-1}{r}\left(\frac{g(h)}{h^r} + r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(h_k)}{h_k^r}\right) \leqslant (r+1)2^r\int_0^h \frac{g(t)}{t^{r+1}}dt. \quad (3.3)$$

$\lhd$ Имеем

$$\int_0^h \frac{g(t)}{t^{r+1}}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{h_k}^{h_{k-1}}\frac{g(t)}{t^{r+1}}dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} g(h_{k-1})\int_{h_k}^{h_{k-1}}\frac{dt}{t^{r+1}} = \frac{2^r-1}{r}\left(\frac{g(h)}{h^r} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(h_k)}{h_k^r}\right).$$

Отсюда следует левое неравенство в (3.3). С другой стороны,

$$\int_0^h \frac{g(t)}{t^{r+1}}dt \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} g(h_k)\int_{h_k}^{h_{k-1}}\frac{dt}{t^{r+1}} = \frac{2^r-1}{r2^r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(h_k)}{h_k^r}.$$

Значит,

$$\frac{2^r-1}{r}\, r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(h_k)}{h_k^r} \leqslant r2^r\int_0^h \frac{g(t)}{t^{r+1}}\,dt. \quad (3.4)$$

Далее, при $t \in (0,h]$ будет $g(h) = g\left(\frac{h}{t}t\right) \leqslant \left(\frac{h}{t}+1\right)^{r+1} g(t)$, т.е. $\frac{g(h)}{(h+t)^{r+1}} \leqslant \frac{g(t)}{t^{r+1}}$. Следовательно,

$$\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2^r}\right)\frac{g(h)}{h^r} = \int\limits_0^h \frac{g(h)}{(t+h)^{r+1}}dt \leqslant \int\limits_0^h \frac{g(t)}{t^{r+1}}dt.$$

Отсюда

$$\frac{2^r-1}{r}\frac{g(h)}{h^r} \leqslant 2^r \int\limits_0^h \frac{g(t)}{t^{r+1}}dt. \qquad (3.5)$$

Складывая (3.4) и (3.5), получаем требуемое. $\triangleright$

Определение 3.1. *Для $f \in L_1[a,b]$, $h \in (0, b-a]$, $x \in [a,b]$ полагаем*

$$U_h(f,x,[a,b]) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f\left(x - h\frac{x-a}{b-a} + t\right)dt.$$

Лемма 3.3. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p[a,b]$, $h \in (0,b-a]$, $\eta = 1-\frac{h}{b-a}$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда*

1) *$U_h(f)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $U_h'(f) \in L_p[a,b]$.*
2) *$\lim_{h\to 0+} U_h(f,x) = f(x)$ почти везде на $[a,b]$.*
3) *$\|f - U_h(f)\|_p \leqslant 2^{1/p}\omega_1(f,h)_p$.*
4) *$\|U_h'(f)\|_p \leqslant \frac{\eta^{1-1/p}}{h}\omega_1(f,h)_p \leqslant \frac{1}{h}\omega_1(f,h)_p$.*
5) *Если $t \geqslant 0$, то*

$$\omega_r(U_h(f),t)_p \leqslant \eta^{-1/p}\omega_r(f,\eta t)_p.$$

6) *Если $f \in W_1^{(r)}[a,b]$, то почти везде на $[a,b]$*

$$U_h'(f^{(r)},x) = \eta^{-r}U_h^{(r+1)}(f,x).$$

$\triangleleft$ Положим $\gamma = x - h\frac{x-a}{b-a}$, $\alpha(x,t) = |\Delta_t^1(f,x)|^p$, $F(y) = \int_a^y f$. Имеем

$$U_h(f,x) = \frac{F(\gamma+h)-F(\gamma)}{h}. \qquad (3.6)$$

Отсюда вытекает абсолютная непрерывность $U_h(f)$. Далее

$$\|U_h'(f)\|_p^p = \int\limits_a^b \alpha(\gamma,h)\left(\frac{\eta}{h}\right)^p dx =$$

$$= \frac{\eta^{p-1}}{h^p} \int_a^{b-h} \alpha(u,h)du \leqslant \frac{\eta^{p-1}}{h^p} \omega_1^p(f,h)_p < \infty.$$

Тем самым доказаны включение $U_h'(f) \in L_p$ (а с ним и утверждение 1), и утверждение 4). Утверждение 2) следует из того, что $\lim_{h\to 0+} U_h(f,x) = f(x)$ в каждой точке x, где функция f равна производной своего неопределенного интеграла, значит, почти везде на $[a,b]$.

При доказательстве 3) будем считать, что $p < \infty$ (при $p = \infty$ доказательство лишь упрощается). Применяя неравенство Гельдера, находим

$$\|f - U_h(f)\|_p^p = \int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_0^h (f(x) - f(\gamma + t))dt \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h} \int_a^b \int_0^h |f(x) - f(\gamma+t)|^p dt\, dx = \frac{1}{h} \int_a^b \int_{\gamma - x}^{h+\gamma-x} \alpha(x,t)dt\, dx = J.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$J = \frac{1}{h} \left(\int_0^h dt \int_a^{b - \frac{b-a}{h}t} \alpha(x,t)dx + \int_{-h}^0 dt \int_{a - \frac{b-a}{h}t}^b \alpha(x,t)dx \right).$$

Отсюда

$$J = \frac{1}{h} \int_0^h dt \left(\int_a^{b-\frac{b-a}{h}t} + \int_{a-t+\frac{b-a}{h}t}^{b-t} \right) \alpha(x,t)dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{h} \int_0^h dt \int_a^{b-t} \alpha(x,t)dx \leqslant 2\omega_1^r(f,h)_p,$$

что завершает доказательство утверждения 3). Докажем 5). Можно считать $t \leqslant \frac{b-a}{r}$. Для $x \in [a, b - rt]$ имеем

$$\Delta_t^r(U_h(f),x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} C_r^k \frac{1}{h} \int_0^h f(\gamma + k\eta t + u)du =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_0^h \Delta_{\eta t}^r(f,\gamma+u)du.$$

Значит,

$$\|\Delta_t^r(U_h(f)) \mid [a,b-rt]\|_p =$$

$$\left\|\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Delta_{\eta t}^r\left(f,\cdot - h\frac{\cdot - a}{b-a}+u\right)du \mid [a,b-rt]\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int\limits_0^h \left(\int\limits_a^{b-rt} |\Delta_{\eta t}^r(f,\gamma+u)|^p dx\right)^{1/p} du =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_0^h \left(\int\limits_{a+u}^{(b-rt)\eta+ha/(b-a)+u} \left|\Delta_{\eta t}^r(f,y)\right|^p \frac{dy}{\eta}\right)^{1/p} du =$$

$$= \frac{1}{h}\,\frac{1}{\eta^{1/p}}\int\limits_0^h \left(\int\limits_{a+u}^{b-h+u-r\eta t} |\Delta_{\eta t}^r(f,y)|^p dy\right)^{1/p} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\eta^{1/p}}\left(\int\limits_a^{b-r\eta t} |\Delta_{\eta t}^r(f,y)|^p dy\right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{\eta^{1/p}}\omega_r(f,\eta t)_p.$$

Таким образом, 5) доказано. Для доказательства утверждения 6) r раз продифференцируем равенство (3.6):

$$U_h^{(r)}(f,x) = \frac{f^{(r-1)}(\gamma+h) - f^{(r-1)}(\gamma)}{h}\,\eta^r = \eta^r U_h(f^{(r)},x).$$

Отсюда получаем почти везде на $[a,b]$

$$U_h'(f^{(r)},x) = \frac{1}{\eta^r}U_h^{(r+1)}(f,x). \quad \triangleright$$

Определение 3.2. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, α, $K \geqslant 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *промежуток* $X \subset \mathbb{R}$. *Полагаем*

$$H(r,\alpha,K,[a,b])_p = \{f \in L_p[a,b] : \omega_r(f,h,[a,b])_p \leqslant Kh^\alpha \quad \textit{при всех} \quad h > 0\},$$

$$H(r,\alpha,K,X)_M = \{f : X \to \mathbb{C} : \omega_r(f,h,X)_M \leqslant Kh^\alpha \quad \textit{при всех} \quad h > 0\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p[a,b]$. *Тогда условие*

$$f \in H(1,1,K,[a,b])_p \tag{3.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция f *была эквивалентна функции* g, *где*

$$g \in W_p^{(1)}K[a,b] \quad \textit{при} \quad 1 < p \leqslant \infty,$$
$$g \in VK[a,b] \quad \textit{при} \quad p = 1.$$

$\triangleleft$ Пусть выполнено (3.7). Тогда в силу пункта 4) леммы 3.3 имеем $\|U_h'(f)\|_p \leqslant K$. Отсюда с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\operatorname*{Var}_a^b U_h(f) = \|U_h'(f)\|_1 \leqslant K(b-a)^{1-1/p}.$$

Пусть точка $x_0 \in [a,b]$ такова, что $\lim_{h\to 0+} U_h(f,x_0) = f(x_0)$. Тогда множество $\{U_h(f,x_0)\}$ ограничено. Значит, по известной теореме Хелли (см. [23, с. 242]) найдется последовательность $h_n \to 0+$ такая, что для всех $x \in [a,b]$ существует

$$\lim_{n\to\infty} U_{h_n}(f,x) = g(x) \in VK(b-a)^{1-1/p}[a,b].$$

Поскольку $g(x) = f(x)$ почти везде на $[a,b]$, то отсюда вытекает достаточная часть утверждения теоремы при $p = 1$. Пусть $1 < p < \infty$, $a = z_0 < z_1 < \ldots < z_m = b$. По необходимой части теоремы Ф. Рисса (см. [23, с. 277]) имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1} |U_{h_n}(f,z_{k+1}) - U_{h_n}(f,z_k)|^p (z_{k+1}-z_k)^{1-p} \leqslant K^p.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g(z_{k+1}) - g(z_k)|^p (z_{k+1} - z_k)^{1-p} \leqslant K^p$$

и по достаточной части теоремы Рисса $g \in W_p^{(1)} K[a,b]$. Если $p = \infty$, то из предыдущего ясно, что g абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и (по условию теоремы) $\omega_1(g,h)_\infty \leqslant Kh$. Значит, при всех $x, x+h \in [a,b]$ будет $|g(x+h) - g(x)| \leqslant K|h|$. Поэтому в тех точках, где существует $g'(x)$ (т.е. почти всюду на $[a,b]$) имеем $|g'(x)| \leqslant K$. Это и означает, что $g \in W_\infty^{(1)} K[a,b]$.

Утверждения, обратные доказанным, установлены ранее (см. свойства М.9, М.8). $\rhd$

Лемма 3.4. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in W_p^{(r)}[a,b]$, $h \in \left(0, \frac{b-a}{2r+1}\right]$. *Тогда*

$$\omega_1(f^{(r)}, h)_p \leqslant \frac{r(r+1)2^{r+1}}{2^r - 1} \int\limits_0^h \frac{\omega_{r+1}(f,u)_p}{u^{r+1}} du. \qquad (3.8)$$

$\lhd$ Пусть $t \in (0,h]$. Положим $t_k = \frac{t}{2^{k+1}}$, $Y_t = L_p\left[a, \frac{a+b-t}{2}\right]$, $Z_t = L_p\left[\frac{a+b-t}{2}, b-t\right]$. Имеем

$$\|\Delta_t^1(f^{(r)}) \mid [a, b-t]\|_p \leqslant \|\Delta_t^1(f^{(r)})\|_{Y_t} + \|\Delta_t^1(f^{(r)})\|_{Z_t}.$$

Если $x \in \left[a, \frac{a+b-t}{2}\right]$, $t \leqslant \frac{b-a}{2r+1}$, то $x + (r+1)t \leqslant b$. Поэтому справедливо равенство (3.1), в силу которого

$$\|\Delta_t^1(f^{(r)})\|_{Y_t} \leqslant \frac{1}{t^r}\|\Delta_t^{r+1}(f)\|_{Y_t} +$$

$$+\frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{t_k^r}(\|\Delta_{t_k}^{r+1}(f, \cdot + t + jt_k)\|_{Y_t} + \|\Delta_{t_k}^{r+1}(f, \cdot + jt_k)\|_{Y_t}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{t^r}\omega_{r+1}(f,t)_p + \frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{r} C_r^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{2}{t_k^r}\omega_{r+1}(f,t_k)_p =$$

$$= \frac{1}{t^r}\omega_{r+1}(f,t)_p + r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{t_k^r}\omega_{r+1}(f,t_k)_p.$$

Отсюда, применяя лемму 3.2, находим

$$\|\Delta_t^1(f^{(r)})\|_{Y_t} \leqslant \frac{r(r+1)2^r}{2^r-1}\int\limits_0^t \frac{\omega_{r+1}(f,u)_p}{u^{r+1}}du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r(r+1)2^r}{2^r-1}\int\limits_0^h \frac{\omega_{r+1}(f,u)_p}{u^{r+1}}du.$$

Далее, $\|\Delta_t^1(f^{(r)})\|_{Z_t} = \|\Delta_{-t}^1(f^{(r)}) \mid \left[\frac{a+b+t}{2}, b\right]\|_p$. Рассуждая как и выше, получаем

$$\|\Delta_t^1(f^{(r)})\|_{Z_t} \leqslant \frac{r(r+1)2^r}{2^r-1}\int\limits_0^h \frac{\omega_{r+1}(f,u)_p}{u^{r+1}}du.$$

Осталось сопоставить установленные оценки. $\rhd$

Замечание 3.1. Из доказательства леммы 3.4 видно, что в случае $p=\infty$ правая часть неравенства (3.8) может быть уменьшена вдвое.

Замечание 3.2. Пусть $r\in\mathbb{N}$, $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, в каждой точке $x\in[a,b]$ существует конечная $f^{(r)}(x)$. Тогда

$$\omega_1(f^{(r)},h,[a,b])_M \leqslant \frac{r(r+1)2^r}{2^r-1}\int\limits_0^h \frac{\omega_{r+1}(f,u,[a,b])_M}{u^{r+1}}du.$$

Доказательство замечания 3.2 аналогично доказательству леммы 3.4.

Теорема 3.2. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $r\in\mathbb{N}$, $f\in L_p[a,b]$,

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{r+1}(f,t)_p}{t^{r+1}}dt<\infty.$$

Тогда функция f *эквивалентна функции* g *класса* $W_p^{(r)}[a,b]$ *при* $p<\infty$ *и класса* $C^{(r)}[a,b]$ *при* $p=\infty$. *Кроме того, если* $h\in\left(0,\frac{b-a}{2r+1}\right]$, *то*

$$\omega_1(g^{(r)},h)_p \leqslant \frac{r(r+1)2^{r+1}}{2^r-1}\int\limits_0^h \frac{\omega_{r+1}(f,t)_p}{t^{r+1}}\,dt.$$

$\triangleleft$ Пусть сначала $1 < p < \infty$. Проведем индукцию по r. При $r = 1$ в силу условия доказываемой теоремы и теоремы 2.4 для достаточно малых A и $h \leqslant A$ имеем

$$\omega_1(f,h) \leqslant K_1 h \left(\int_0^A \frac{\omega_2(f,t)_p}{t^2}\,dt + \frac{\omega_1(f,2A)_p}{A} \right) \leqslant K_2 h.$$

(Здесь и далее через K_i обозначаем постоянные, не зависящие от h, а также от фигурирующих в дальнейшем h_γ.) Применяя теорему 3.1 и лемму 3.4, получаем доказываемое утверждение при $r = 1$. Осуществим индукционный переход от r к $r+1$. Из сходимости интеграла

$$\int_0^1 \frac{\omega_{r+2}(f,t)_p}{t^{r+2}}\,dt$$

с помощью теоремы 2.4, как и выше, получаем $\omega_{r+1}(f,h) \leqslant K_3 h^{r+1}$. Отсюда вытекает сходимость интеграла

$$\int_0^1 \omega_{r+1}(f,t)_p t^{-r-1}\,dt$$

и по индукционному предположению $f \sim g \in W_p^{(r)}[a,b]$ и $\omega_1(g^{(r)},h)_p \leqslant K_4 h$. Значит, $g \in W_p^{(r+1)}[a,b]$ и по лемме 3.4

$$\omega_1(g^{(r+1)},h)_p \leqslant \frac{(r+1)(r+2)2^{r+2}}{2^{r+1}-1} \int_0^h \frac{\omega_{r+2}(f,t)_p}{t^{r+2}}\,dt.$$

В случае $p = \infty$ те же рассуждения дают $f \sim g \in W_\infty^{(r)}[a,b]$ и $\omega_1(g^{(r)},h)_\infty \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0$. Но, если $\varphi \in L_\infty[a,b]$ и $\omega_1(\varphi,h)_\infty \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0$, то $\varphi \sim \psi \in C[a,b]$. Действительно, очевидно, что

$$\sup_{0\leqslant h\leqslant b-a} \|U_h(\varphi)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty$$

и по пункту 5) леммы 3.3 $\omega_1(U_h(\varphi),t)_\infty \leqslant \omega_1(\varphi,t)_\infty$ при $t > 0$. Значит, по теореме Арцела–Асколи найдется такая последовательность $h_\gamma \to 0+$, что $U_{h_\gamma}(\varphi) \rightrightarrows \psi \in C[a,b]$. С другой стороны,

$U_h(\varphi) \to \varphi$ почти везде на $[a,b]$ и потому $\varphi \sim \psi$. Итак, $g^{(r)} \sim l \in C[a,b]$. Поскольку $g^{(r-1)}(x) = g^{(r-1)}(a) + \int_a^x g^{(r)} = g^{(r-1)}(a) + \int_a^x l$, то везде $g^{(r)}(x) = l(x)$.

Перейдем к случаю $p = 1$. Установим сначала следующий факт: если $r \in \mathbb{N}$, $f \in W_1^{(r-1)}[a,b]$, при всех $h > 0$ справедливо неравенство $\omega_1(f^{(r-1)},h)_1 \leqslant K_5 h$ и $\int_0^1 \omega_{r+1}(f,t)t^{-r-1}dt < \infty$, то $f \sim g \in W_1^{(r)}[a,b]$. Взяв $\varepsilon > 0$, подберем такое $\delta \in (0,1)$, что $\int_0^\delta \omega_{r+1}(f,t)_1 t^{-r-1}dt < \varepsilon$. Положим $\gamma(h) = \left(1 - \frac{h}{b-a}\right)^{1-r}$ и

$$Q = \gamma(h_1)(U_{h_1}(f) - U_{h_2}(f)) + (\gamma(h_1) - \gamma(h_2))U_{h_2}(f).$$

Для $h_1, h_2 \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ с помощью пункта 6) леммы 3.3 и следствия 2.1 имеем

$$\Delta = \|U'_{h_1}(f^{(r-1)}) - U'_{h_2}(f^{(r-1)})\|_1 = \|Q^{(r)}\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant K_6 \left(\int_0^1 \frac{\omega_{r+1}(Q,t)_1}{t^{r+1}}\, dt + \|Q\|_1 \right).$$

Далее,

$$\Delta \leqslant K_6 \Bigg(\gamma(h_1) \Bigg(\int_0^\delta \frac{\omega_{r+1}(U_{h_1}(f),t)_1}{t^{r+1}} dt + \int_0^\delta \frac{\omega_{r+1}(U_{h_2}(f),t)_1}{t^{r+1}}\, dt +$$
$$+ 2^{r+1} \int_\delta^1 \frac{\|U_{h_1}(f) - U_{h_2}(f)\|_1}{t^{r+1}} dt + \|U_{h_1}(f) - U_{h_2}(f)\|_1 \Bigg) +$$
$$+ |\gamma(h_1) - \gamma(h_2)| \left(\int_0^1 \frac{\omega_{r+1}(U_{h_2}(f),t)_1}{t^{r+1}} dt + \|U_{h_2}(f)\|_1 \right) \Bigg).$$

Используя пункт 5) леммы 3.3 и выбор δ, получаем

$$\Delta \leqslant K_7 \Bigg(2 \int_0^\delta \frac{\omega_{r+1}(f,t)_1}{t^{r+1}} dt + \left(\frac{2^{r+1}}{r\delta^r} + 1 \right) \|U_{h_1}(f) - U_{h_2}(f)\|_1 +$$
$$+ |\gamma(h_1) - \gamma(h_2)| \left(\int_0^1 \frac{\omega_{r+1}(f,t)_1}{t^{r+1}} dt + \|f\|_1 \right) \leqslant$$

$$\leqslant K_8(\varepsilon + \|U_{h_1}(f) - U_{h_2}(f)\|_1 + |\gamma(h_1) - \gamma(h_2)|\Big).$$

Так как $\gamma(h) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 1$, то отсюда вытекает сходимость в себе $U'_h(f^{(r-1)})$ в $L_1[a,b]$ при $h \to 0+$. Поэтому в $L_1[a,b]$ существует $\lim_{h\to 0+} U'_h(f^{(r-1)}) = \Phi$. Затем $U_h(f^{(r-1)}, x) \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} f^{(r-1)}(x)$ почти везде на $[a,b]$, в частности, в некоторой точке $c \in [a,b]$. Тогда

$$\left|U_h(f^{(r-1)}, x) - U_h(f^{(r-1)}, c) - \int\limits_c^x \Phi\right| \leqslant \int\limits_a^b |U'_h(f^{(r-1)}) - \Phi| \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0$$

и почти везде на $[a,b]$ имеем $f^{(r-1)}(x) = f^{(r-1)}(c) + \int_c^x \Phi$. Следовательно, $f^{(r-1)} \sim \varphi \in W_1^{(1)}[a,b]$ или $f \sim g \in W_1^{(r)}[a,b]$.

Для завершения доказательства осталось показать, что соотношения

$$f \in L_1[a,b], \qquad \int\limits_0^1 \frac{\omega_{r+1}(f,t)_1}{t^{r+1}} dt < \infty$$

влекут $f \sim \varphi \in W_1^{(r-1)}[a,b]$ и $\omega_1(\varphi^{(r-1)}, h)_1 \leqslant K_9 h$. При $r = 1$ это следует из того, что $W_1^{(0)}[a,b] = L_1[a,b]$ и теоремы 2.4. Если утверждение верно при некотором $r \in \mathbb{N}$, то для $r+1$ по условию теоремы имеем $\int_0^1 \omega_{r+2}(f,t)_1 t^{-r-2} dt < \infty$. Отсюда в силу теоремы 2.4 будет $\omega_{r+1}(f,h)_1 \leqslant K_{10} h^{r+1}$ и, значит,

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{r+1}(f,t)_1}{t^{r+1}} dt < \infty.$$

Следовательно, по индукционному предположению $f \sim g \in W_1^{(r-1)}[a,b]$ и по лемме 3.4

$$\omega_1(g^{(r-1)}, h)_1 \leqslant K_{11} \int\limits_0^h \frac{\omega_{r+1}(f,t)_1}{t^{r+1}} dt \leqslant K_{12} h. \qquad \triangleright$$

Теорема 3.3. *Пусть* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in L_p[a,b]$,

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_r(f,t)_p}{t^{r+1/p-1/q}} dt < \infty.$$

Тогда функция $f \sim g \in W_q^{(r-1)}[a,b]$ *и при* $h \in \left(0, \frac{b-a}{2r+1}\right]$ *будет*

$$\omega_1(g^{(r-1)}, h)_q \leqslant \frac{r(r+1)2^{r+1}}{2^r - 1} \int\limits_0^h \frac{\omega_r(f,t)_p}{t^{r+1/p-1/q}} dt.$$

$\lhd$ Пусть $F(x) = \int_a^x f$. В силу свойства М.10, имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_{r+1}(F,t)_q}{t^{r+1}} dt \leqslant \int\limits_0^1 \frac{\omega_r(f,t)_p}{t^{r+1/p-1/q}} dt < \infty.$$

Применяя теперь к F теорему 3.2, получаем требуемое. $\rhd$

Теорема 3.4. *Пусть* $r-1 \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p[a,b]$. *Тогда соотношение*

$$\varliminf_{h\to 0+} \frac{\omega_r(f,h)_p}{h^r} \leqslant M < \infty \tag{3.9}$$

равносильно условиям

$$f \sim g \in W_p^{(r-1)}[a,b], \quad g^{(r-1)} \in H(1,1,M,[a,b])_p. \tag{3.10}$$

$\lhd$ Прежде всего отметим, что по свойству М.11, имеем $f \in H(r,r,M,[a,b])_p$. Из свойства М.8 сразу следует, что (3.10) влечет (3.9). Докажем обратное. Если $p > 1$, то из теорем 3.2 и 3.1 вытекает, что $f \sim g \in W_p^{(r)}[a,b]$. В силу свойства М.13 будет $\|g^{(r)}\|_p \leqslant M$, откуда следует $g^{(r-1)} \in H(1,1,M,[a,b])_p$. В случае $p = 1$ по теореме 3.2 имеем $f \sim g \in W_1^{(r-1)}[a,b]$. Значит, $U_t(g) \in W_1^{(r)}[a,b]$ при любом $t \in (0, b-a]$. По пункту 5) леммы 3.3

$$\omega_r(g^{(r-1)},h)_1 \leqslant \omega_1(U_t^{(r-1)}(g),h)_1 + 2\|g^{(r-1)} - U_t^{(r-1)}(g)\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant Mh + 2\left\| g^{(r-1)} - \left(1 - \frac{t}{b-a}\right)^{r-1} U_t(g^{(r-1)}) \right\|_1 \xrightarrow[t\to 0+]{} Mh. \quad \rhd$$

Определение 3.3. *Пусть* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, α_0 *– предельная точка* A, $\alpha_0 \overline{\in} A$, X *– некоторое множество,* $P = \{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *– семейство функционалов, действующих из* X *в* $\mathbb{R}_+$. *Семейство* P *называется насыщенным при* $\alpha \to \alpha_0$, *если, во-первых, из того, что* $\varliminf_{\alpha\to\alpha_0} p_\alpha(x) = 0$ *для некоторого* $x \in X$ *следует существование такой окрестности*

V_{α_0} точки α_0, что $p_\alpha(x) = 0$ для всех $\alpha \in V_{\alpha_0} \cap A$, и, во-вторых, найдется такой элемент $x_0 \in X$, для которого

$$0 < \varliminf_{\alpha \to \alpha_0} p_\alpha(x_0) \leqslant \varlimsup_{\alpha \to \alpha_0} p_\alpha(\alpha_0) < \infty.$$

Множество $S(M) = \{x \in X : \varlimsup_{\alpha \to \alpha_0} p_\alpha(x) \leqslant M\}$ называется классом насыщения семейства P при $\alpha \to \alpha_0$ с константой M, а множество $\bigcup_{M=1}^{\infty} S(M)$-классом насыщения P при $\alpha \to \alpha_0$.

Следствие 3.2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда в пространстве $L_p[a,b]$ семейство полунорм $\{h^{-r}\omega_r(\cdot,h)_p\}_{h\in(0,+\infty)}$ насыщено при $h \to 0$. Классом насыщения этого семейства при $h \to 0$ с константой M является множество функций f, удовлетворяющих соотношениям (3.10).*

Это следствие очевидно в силу теоремы 3.4 и свойства M.12.

§4. Функционалы и модули непрерывности

4.1. Лемма 4.1. *Пусть $f \in W_1^{(1)}[a,b]$, $m \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/m$, $x_k = a + kh$, $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$,*

$$\lambda_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}, \quad I_m(f,x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\lambda_k(x).$$

Тогда

$$f(x) - I_m(f,x) = \frac{\omega(x)}{m!h^m} \int_0^1 \Delta_{uh}^m(f', au + x(1-u))du.$$

$\lhd$ Легко видеть, что

$$\lambda_k(x) = \frac{(-1)^{m-k} C_m^k \omega(x)}{m!(x - x_k)h^m}.$$

Поэтому

$$f(x) - I_m(f,x) = \sum_{k=0}^{m} (f(x) - f(x_k))\lambda_k(x) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{m} \int_0^1 f'((x_k - x)u + x)(x_k - x)du\lambda_k(x) =$$

$$= \frac{\omega(x)}{m!h^m} \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k f'(au + x(1-u) + kuh) du. \quad \triangleright$$

Лемма 4.2. *Пусть* $r/2 \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $a < b$, $f \in L_1 \left[a - \frac{rh}{2}, b + \frac{rh}{2}\right]$. *Тогда для всех* $x \in [a,b]$

$$f(x) - \frac{1}{h^r} \Delta_h^r \left(f^{(-r)}, x - \frac{rh}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{r} C_r^k M_r^{(k)}(0) h^{1-k} \int\limits_0^1 \Delta_{uh}^r \left(f^{(1-k)}, x - \frac{rh}{2} \right) (1-u)^{r-k} du, \quad (4.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{r+1} C_{r+1}^k M_r^{(k)}(0) h^{1-k} \int\limits_0^1 \Delta_{uh}^r \left(f^{(1-k)}, x - \frac{rh}{2} \right) (1-u)^{r+1-k} du. \quad (4.2)$$

$\triangleleft$ Зафиксировав $x \in [a,b]$, положим

$$z_l = x - \frac{rh}{2} + lh, \quad \omega(z) = \prod_{l=0}^{r} (z - z_l),$$

$$I(g,z) = \sum_{l=0}^{r} g(z_l) \frac{\omega(z)}{(z - z_l)\omega'(z_l)}.$$

Тогда при $m \in \mathbb{N}$

$$Q_m = f(x) - \left. \frac{d^m I(f^{(-m)}, z)}{dz^m} \right|_{z=x} =$$

$$\frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{m} C_m^k M_r^{(k)}(0) h^{1-k} \int\limits_0^1 \Delta_{uh}^r \left(f^{(1-k)}, x - \frac{rhu}{2} \right) (1-u)^{m-k} du. \quad (4.3)$$

Докажем (4.3), считая сначала $f \in C^{(1)}(T)$, где $T = \left[a - \frac{rh}{2}, b + \frac{rh}{2}\right]$. Ясно, что

$$Q_m = \frac{d^m}{dz^m} \{ f^{(-m)}(z) - I(f^{(-m)}, z) \} \big|_{z=x}.$$

По лемме 4.1 имеем

$$Q_m = \frac{d^m}{dz^m}\left\{\frac{\omega(z)}{r!h^r}\int_0^1 \Delta_{uh}^r\left(f^{(1-m)}, \left(x-\frac{rh}{2}\right)u+z(1-u)\right)du\right\}\Bigg|_{z=x} =$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{r!h^r}C_m^k\frac{d^k\omega(z)}{dz^k}\int_0^1 \Delta_{uh}^r\left(f^{(1-k)}, \left(x-\frac{rh}{2}\right)u+\right.\right.$$

$$\left.\left.+z(1-u)\right)(1-u)^{m-k}du\right\}\Bigg|_{z=x}.$$

Так как $\omega(z) = h^{r+1}M_r\left(\frac{z-x}{h}\right)$, то

$$\frac{d^k\omega(z)}{dz^k}\bigg|_{z=x} = h^{r+1-k}M_r^{(k)}(0).$$

Поэтому, заметив, что $M_r(0) = 0$, получим (4.3) для $f \in C^{(1)}(T)$.

Перепишем (4.3) в виде

$$Q_m = \frac{1}{r!}C_m^1 M_r'(0)\int_0^1 \sum_{l=-r/2}^{r/2}(-1)^{r/2-l}C_r^{r/2-l}f(x+luh)(1-u)^{m-1}du+$$

$$+\frac{1}{r!}\sum_{k=2}^{m}C_m^k M_r^{(k)}(0)h^{1-k}\int_0^1 \Delta_{uh}^r\left(f^{(1-k)}, x-\frac{rhu}{2}\right)(1-u)^{m-k}du. \quad (4.4)$$

Поскольку $M_r'(0) = (-1)^{r/2}((r/2)!)^2$, то в правой части (4.4) слагаемое с номером $l = 0$ равно $f(x)$. Значит, (4.3) равносильно соотношению

$$-\frac{d^m I(f^{(-m)}, z)}{dz^m}\bigg|_{z=x} =$$

$$= \frac{1}{r!}C_m^1 M_r'(0)\int_0^1 \sum_{\substack{l=-\frac{r}{2},\\ l\neq 0}}^{r/2}(-1)^{r/2-l}C_r^{r/2-l}f(x+lhu)(1-u)^{m-1}du+$$

$$+\frac{1}{r!}\sum_{k=2}^{m}C_m^k M_r^{(k)}(0)h^{1-k}\int_0^1 \Delta_{uh}^r\left(f^{(1-k)}, x-\frac{rhu}{2}\right)(1-u)^{m-k}du. \quad (4.5)$$

Пусть теперь $f \in L_1(T)$, $f_n \in C^{(1)}(T)$, $f_n \to f$ в пространстве $L_1(T)$. Тогда

$$\int_0^1 f_n(x+lhu)(1-u)^{m-1}du = \int_x^{x+lh} f_n(t)(x+lh-t)^{m-1}\frac{dt}{(lh)^m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\to \int_x^{x+lh} f(t)(x+lh-t)^{m-1}\frac{dt}{(lh)^m} = \int_0^1 f(x+lhu)(1-u)^{m-1}du$$

и при любом $s \in \mathbb{N}$ будет $f_n^{(-s)} \rightrightarrows f^{(-s)}$. Значит, написав (4.5) для f_n и перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим (4.5) для $f \in L_1(T)$. Прибавляя к обеим частям (4.5) по $f(x)$, получим (4.3). Соотношения (4.1) и (4.2) получаются из формулы (4.3), если в последней положить $m = r$ и $m = r+1$ соответственно. $\triangleright$

Положим $S_{r,h}(f,x) = \frac{1}{h^r}\Delta_h^r\left(f^{(-r)}, x - \frac{rh}{2}\right)$, т.е. через $S_{r,h}(f)$ обозначим функцию В. А. Стеклова r-го порядка для функции f. Тогда лемму 4.2 можно сформулировать следующим образом.

Лемма 4.2′. *Пусть $r/2 \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $a < b$, $f \in L_1\left[a - \frac{rh}{2}, b + \frac{rh}{2}\right]$, $x \in [a,b]$. Тогда*

$$f(x) - S_{r,h}(f,x) =$$

$$= \frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r} C_r^k M_r^{(k)}(0)h^{r+1-k}\int_0^1 S_{r,uh}^{(r+1-k)}(f,x)(1-u)^{r-k}u^r\,du,$$

$$f(x) = \frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r+1} C_{r+1}^k M_r^{(k)}(0)h^{r+1-k}\int_0^1 S_{r,uh}^{(r+1-k)}(f,x)(1-u)^{r+1-k}u^r\,du.$$

4.2. Положим $E = [a,b]$. В дальнейшем важную роль будет играть следующая теорема, впервые установленная для случая $p = \infty$ Х. Уитни [24]. Ее распространение на пространства $L_p(E)$ при $1 \leqslant p < \infty$ было дано Ю. А. Брудным [25].

Теорема 4.1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$,*

$$W(p,r) = \sup\frac{E_{r-1}(f,E)_p}{\omega_r(f,(b-a)/r,E)_p}. \tag{4.6}$$

Тогда $W(p,r) < \infty$.

Легко видеть, что величина (4.6) не зависит от отрезка $[a,b]$. Постоянные $W(p,r)$ будем называть константами Уитни.

Для $f \in L_p(E)$, $r \in \mathbb{N}$, $h \in \left(0, \frac{b-a}{r}\right]$ положим

$$\pi_- = \pi_{r-1}(f,[a,a+rh])_p, \quad \pi_+ = \pi_{r-1}(f,[b-rh,b])_p,$$

$$V_{r,h}(f,x,E)_p = \begin{cases} \pi_-(x), & \text{если} \quad x < a, \\ f(x), & \text{если} \quad x \in E, \\ \pi_+(x) & \text{если} \quad x > b. \end{cases}$$

Если же $h > \frac{b-a}{r}$, то по определению

$$V_{r,h}(f,E)_p = V_{r,(b-a)/r}(f,E)_p.$$

Полагаем

$$\omega_r(f,h,\mathbb{R})_p = \sup_{t\in(0,h]} \|\Delta_t^r(f) \mid \mathbb{R}\|_p.$$

Теорема 4.2. *Если* $1 \leqslant p < \infty$, $h > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in L_p(E)$, *то*

$$\omega_r(V_{r,h}(f,E)_p, h, \mathbb{R})_p \leqslant (2(2^r-1)W(p,r)+1)\omega_r(f,h,E)_p.$$

$\lhd$ Пусть сначала $h \leqslant (b-a)/r$. Тогда при $t \in (0,h]$ имеем (для кратности пишем V вместо $V_{r,h}(f,E)_p$)

$$\|\Delta_t^r(V) \mid \mathbb{R}\|_p = \Bigg(\int_{-\infty}^{a-rt} |\Delta_t^r(\pi_-)|^p + \int_{a-rt}^{a} |\Delta_t^r(V)|^p +$$

$$+ \int_{a}^{b-rt} |\Delta_t^r(f)|^r + \int_{b-rt}^{b} |\Delta_t^r(V)|^p + \int_{b}^{\infty} |\Delta_t^r(\pi_+)|^p \Bigg)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \|\Delta_t^r(V) \mid [a-rt,a]\|_p + \omega_r(f,h,E)_p + \|\Delta_t^r(V) \mid [b-rt,b]\|_p.$$

Далее,

$$\|\Delta_t^r(V) \mid [a-rt,a]\|_p = \|\Delta_t^r(V-\pi_-) \mid [a-rt,a]\|_p =$$

$$= \left\| \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k (V(\cdot+kt) - \pi_-(\cdot+kt)) \mid [a-rt,a] \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} C_r^k \left(\int_{a-rt}^{a} |V(x+kt) - \pi_-(x+kt)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{r} C_r^k \left(\int_{a}^{a+rh} |f - \pi_-|^p \right)^{1/p} = (2^r - 1) E_{r-1}(f, [a, a+rh])_p.$$

Аналогично,

$$\|\Delta_t^r(V) \mid [b - rt, b]\|_p \leqslant (2^r - 1) E_{r-1}(f, [b - rt, b])_p.$$

Следовательно,

$$\omega_r(V, h, \mathbb{R})_p \leqslant$$

$$\leqslant (2^r-1)(E_{r-1}(f,[a,a+rh])_p + E_{r-1}(f,[b-rh,b])_p + \omega_r(f,h,E)_p. \quad (4.7)$$

Если же $h > (b-a)/r$, то, полагая $\pi = \pi_{r-1}(f, E)_p$, имеем

$$\omega_r(V, h, \mathbb{R})_p = \omega_r(V - \pi, h, \mathbb{R})_p \leqslant 2^r \|V - \pi \mid \mathbb{R}\|_p = 2^r E_{r-1}(f, E)_p.$$

Значит,

$$\omega_r(V, h, \mathbb{R})_p \leqslant 2(2^r - 1) E_{r-1}(f, E)_p + \omega_r(f, h, E)_p. \qquad (4.8)$$

Осталось сопоставить оценки (4.7) и (4.3) с теоремой 4.1. $\triangleright$

Из доказательства теоремы 4.2 нетрудно усмотреть справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.2$'$. *Если $h > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in C(E)$, то*

$$\omega_r(V_{r,h}(f, E)_\infty, h)_\infty \leqslant \max\{1, (2^r - 1) W(\infty, r)\} \omega_r(f, h, E)_\infty.$$

4.3. Теорема 4.3. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r/2 \in \mathbb{N}$, функционал $\Phi : \mathbb{L}_p(E) \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию: $\Phi(f+g) \leqslant \Phi(f) + \Phi(g)$ для любых $f, g \in \mathbb{L}_p(E)$,*

$$m_{2k}(\Phi)_p = \sup_{f \in W_p^{(2k)}(E)} \frac{\Phi(f)}{\|f^{(2k)} \mid E\|_p} < \infty \quad (k = \overline{0, r/2}).$$

Тогда для любых $f \in \mathbb{L}_p(E)$ и $h > 0$ справедливо неравенство

$$\Phi(f) \leqslant B(r, h)_p \omega_r(V_{r,h}(f, E)_p, h, E)_p,$$

где

$$B(r,h)_p = \sum_{k=0}^{r/2} C_{r+1}^{2k+1} \frac{|M_r^{(2k+1)}(0)| m_{2k}(\Phi)_p}{(r+1)! h^{2k}}.$$

$\lhd$ Положим

$$\alpha_k = \frac{C_r^{2k+1} M_r^{(2k+1)}(0)}{r! h^{2k}}, \quad m_{2k} = m_{2k}(\Phi)_p,$$

$$\|\cdot\| = \|\cdot \mid \mathbb{R}\|_p, \quad V = V_{r,h}(f,E)_p.$$

Замечая, что $M_r^{(2k)}(0) = 0$, запишем (4.1) в виде

$$f(x) = \frac{1}{h^r}\Delta_h^r\left(f^{(-r)}, x - \frac{rh}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{r/2-1} \alpha_k \int_0^1 \Delta_{uh}^r\left(f^{(-2k)}, x - \frac{ruh}{2}\right)(1-u)^{r-2k-1}du.$$

Если $g \in W_p^{(2k)}(\mathbb{R})$, то в силу определения m_{2k} имеем

$$\Phi(g(\cdot - \beta)) \leqslant m_{2k}\|g^{(2k)}(\cdot - \beta) \mid E\|_p \leqslant m_{2k}\|g^{(2k)}\|.$$

Значит,

$$\Phi(f) = \Phi(V) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{h^r}\Delta_h^r\left(V^{(-r)}, \cdot - \frac{rh}{2}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{r/2-1} \Phi\left(\alpha_k \int_0^1 \Delta_{uh}^r\left(V^{(-2k)}, \cdot - \frac{ruh}{2}\right)(1-u)^{r-2k-1}du\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_r}{h^r}\|\Delta_h^r(V)\| + \sum_{k=0}^{r/2-1} |\alpha_k| m_{2k} \int_0^1 \|\Delta_{uh}^r(V)\|(1-u)^{r-2k-1}du \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^{r/2-1} |\alpha_k \mid m_{2k} + \frac{m_r}{h^r}\right)\omega_r(V,h,E)_p = B(r,h)_p \omega_r(V,h,E)_p. \quad \rhd$$

Сопоставляя теоремы 4.2 и 4.2′ с теоремой 4.3, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.4. *В условиях теоремы* 4.3 *для любых* $f \in \mathbb{L}_p(E)$ *и* $h > 0$ *справедливо неравенство*

$$\Phi(f) \leqslant B(r,h)C(p,r)\omega_r(f,h,E)_p.$$

где

$$C(p,r) = \begin{cases} 2(2^r-1)W(p,r)+1, & \text{если} \quad p < \infty \\ \max\{1,(2^r-1)W(\infty,r)\}, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases} \tag{4.9}$$

Приведенные выше результаты относятся к комплекснозначеым функциям. Все они остаются справедливыми, если ограничиться рассмотрением только вещественных функций.

4.4. В этом пункте мы ограничиваемся рассмотрением вещественных функций. Это связано с тем, что приводимые ниже численные оценки констант Уитни $W(p,r)$ в ряде случаев установлены для упомянутой ситуации.

Нам понадобится следующая теорема [26, 27].

Теорема 4.5. *Пусть* $r, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant r-1$, $f \in W_\infty^{(r)}(E)$. *Тогда*

$$E_n(f,E)_\infty \leqslant K_r \frac{(n+1-r)!}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^r \|f^{(r)} \mid E\|_\infty. \tag{4.10}$$

Здесь и далее

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(r+1)k}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Проиллюстрируем теоремы 4.3 и 4.4 одним (но важным) примером.

Теорема 4.6. *Пусть* $r/2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant r-1$, $\gamma > 0$, $f \in C(E)$, $h = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{\gamma}{n+1}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} E_n(f,E)_\infty &\leqslant R(r,\gamma)\omega_r(V_{r,h}(f,E)_\infty,h,E)_\infty, \\ E_n(f,E)_\infty &\leqslant C(\infty,r)R(r,\gamma)\omega_r(f,h)_\infty, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где постоянная $C(\infty,r)$ *определена формулой* (4.9),

$$R(r,\gamma) = \sum_{k=0}^{r/2}\frac{C_{r+1}^{2k+1}|M_r^{(2k)}(0)|}{(r+1)!\gamma^{2k}}\,\frac{r^{2k}(r-2k)!}{r!}K_{2k}.$$

Для доказательства теоремы 4.6 надо в теоремах 4.3 и 4.4 положить $p = \infty$, $\Phi(f) = E_n(f, E)_\infty$ и принять во внимание теорему 4.5.

Изучение констант Уитни составляет в настоящее время самостоятельный раздел теории аппроксимации, которому посвящено много работ различных авторов (более подробно об этом см., например, [24, 28, 15, с. 46–51; 16], где изложен ряд известных результатов и даны соответствующие библиографические указания). В частности, известно [29], что $W(\infty, r) \leqslant 3$ при любом $r \in \mathbb{N}$ (в [30] указана оценка $W(\infty, r) \leqslant 2$, как сообщил В. В. Жуку И. А. Шевчук, из результатов работы [30] следует только, что $W(\infty, r) \leqslant 2+e^{-2}$), $W(\infty, 1) = W(\infty, 2) = 1/2$, $8/15 \leqslant W(\infty, 3) \leqslant 0,7$, $W(\infty, 4) \leqslant 1,26$, $W(\infty, 5) \leqslant 1,31$, $W(\infty, 6) \leqslant 1,67$ (см. [28, с. 35–46]); $W(p, 1) \geqslant 2^{-1/p}$ при $2 \leqslant p < \infty$ (см. [31, 32, с. 240–241]).

Вычисления показывают, что при $\gamma = \overline{1,6}$, $q = \overline{1,3}$ справедливы оценки $C(\infty, 2q)R(2q, \gamma) \leqslant \alpha_{q,\gamma}$, где матрица $(a_{q,\gamma})$ такова:

$$\begin{pmatrix} 4,4512 & 1,6753 & 1,1613 & 0,98132 & 0,89805 & 0,85281 \\ 337,45 & 38,617 & 14,954 & 9,0100 & 6,6695 & 5,5070 \\ 12363 & 430,51 & 94,012 & 40,390 & 23,917 & 16,875 \end{pmatrix}.$$

Неравенство (4.11) в литературе называется обобщенным неравенством Джексона. Нахождение в нем точных постоянных представляет трудную задачу, в настоящее время мало изученную (в частности, при $h = \frac{b-a}{r}$ она совпадает с задачей вычисления констант Уитни $W(\infty, r)$). По мнению авторов при решении обсуждаемой задачи возможно окажутся полезными соотношения, приведенные в работе [2] на стр. 31.

Литература

1. Н. А. Лебедев, *О распространении комплексных функций,* Вестн. ЛГУ, No. 13, сер. мат., мех. и астр., вып. **3** (1963), 61–68.
2. Н. А. Лебедев, *Об одной постановке задачи чебышевского приближения,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. **2** (1979), 26–32.
3. В. А. Баранова, Н. А. Лебедев, *Об одном обобщении модуля непрерывности,* Вестн. ЛГУ, No. 1, сер. мат., мех. и астр., вып. **1** (1969), 29–34.
4. В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного,* М.-Л., 1964.
5. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *О приближении функций, заданных на отрезке,* В кн.: Методы вычислений, вып. 17, С.-П., 1995, 105–121.
6. Ю. А. Брудный, *Приближение функций n переменных квазимногочленами,* Изв. АН СССР, сер. мат. **34**, No. 3 (1970), 555–583.

7. B. Sendov, *Модифицированная функция Стеклова,* C. R. Acad. Bul. Sci, **36** (1983), 315–317.
8. B. Sendov, *On a theorem of Yu. Brudnyi,* Math. balkan **1**, No. 1 (1987).
9. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование,* С.-П., 1995.
10. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения,* М., 1996.
11. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами,* М., 1977.
12. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций,* Л., 1982.
13. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения,* М., 1977.
14. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного,* М., 1960.
15. И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций,* Киев, 1992.
16. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *Методические указания к курсу "Аппроксимация функций", часть 4,* С.-П., 1991.
17. R. A. De Vore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation,* Springer-Verlag, New York, 1991.
18. Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness,* Springer-Verlag, New York, 1987.
19. М. Ф. Тиман, *Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$,* Мат. сб. **46**, No. 1 (1958), 125–132.
20. М. Ф. Тиман, *Особенности приближения функций в различных метриках,* В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, М., 1961, 69–72.
21. Р. М. Тригуб, *Приближение функций с данным модулем гладкости на внешности отрезка и полуоси,* В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, М., 1961, 47–51.
22. A. Marchaud, *Sur les derivées et sur les différences des fonctions de variable réelles,* J. Math. pures et appl. **6** (1927), 337–425.
23. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной,* М., 1957.
24. H. Whithey, *On functions with bounded nth differences,* J. Math. pures et appl. **36**, No. 5 (1957), 67–95.
25. Ю. А. Брудный, *Об одной теореме локальных наилучших приближений,* В кн.: Функциональный анализ и теория функций, сб. **2**, Казань, 1964, с. 43–49.
26. H. F. Sinwel, *Uniform approximation of differentiable functions by algebraic polynomials,* J. Approx. Theory **32**, No. 1, 1–8.
27. И. К. Даугавет, *Некоторые вопросы теории приближения функций. Методические указания,* С.-П., 1992.
28. Б. Сендов, В. Попов, *Усредненные модули гладкости,* М., 1988.
29. Ю. В. Крякин, *О константах Уитни,* Мат. заметки **46**, No. 2 (1988), 155–157.
30. Ю. В. Крякин, *О теореме и константах Уитни,* Мат. сб. **185**, No. 3 (1994), 25–40.

31. С. А. Пичугов, *Константы Юнга пространства L_p,* Мат. заметки **43**, No. 5 (1988), 604–614.
32. Н. И. Черных, *Неравенство Джексона в* $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leqslant p < 2)$ *с точной константой,* Тр. Мат. ин-та РАН **198** (1992), 232–241.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 9 января 2001 г.