

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Новотный, Стационарные волны кручения
в цилиндре с ограниченно податливой границей,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.,
1996, номер 4, 77–85

<https://www.mathnet.ru/vmumm2039>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

24 апреля 2025 г., 19:10:28



Пусть для некоторых φ_0

$$\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \varphi_0} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_0} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n,1} i e^{i(n\omega+1)t+i\varphi_0} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n,-1} i e^{i(n\omega-1)t-i\varphi_0} \right) dt = i (g_{n,1} e^{i\varphi_0} - g_{n,-1} e^{-i\varphi_0}) = 0.$$

Тогда $\partial^2 \bar{H}_1 / \partial \varphi_0^2 \neq 0$, так как если $\varphi^* = \varphi_0$ является корнем уравнения

$$\alpha \sin \varphi_0 + \beta \cos \varphi_0 = 0,$$

где α, β — некоторые коэффициенты, линейно зависящие от $g_{n,\pm 1}$, то для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_0} (\alpha \sin \varphi_0 + \beta \cos \varphi_0) = \alpha \cos \varphi_0 - \beta \sin \varphi_0 = 0$$

значение $\varphi^* = \varphi_0$ было бы корнем только в том случае, когда $|\alpha| + |\beta| = 0$ или, что то же самое, $|g_{n,1}| + |g_{n,-1}| = 0$. А это не так.

Итак, вследствие выполнения условий 1—3 теоремы возмущенная задача имеет бесконечно много семейств (относительно ε) невырожденных долгопериодических решений. Они накапливаются в окрестности сепаратрис невозмущенной задачи. Это свидетельствует о сложном хаотическом движении рассматриваемой системы в указанной области. Явление рождения бесконечного числа невырожденных долгопериодических решений дополняет качественную картину стохастического поведения этой системы, указанную В. М. Алексеевым [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93-013-16244.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. ВИНТИ. М., 1985. 3—304.
2. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, II. М., 1963.
3. Сальникова Т. В. Неприводимость возмущенной задачи Лагранжа // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1984. № 4. 62—66.
4. Алексеев В. М. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // Успехи матем. наук. 1981. 36, вып. 4. 161—176.

Поступила в редакцию
01.06.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 539.3:534.1

С. В. Новотный

СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ С ОГРАНИЧЕННО ПОДАТЛИВОЙ ГРАНИЦЕЙ

1. Постановка задачи. Пусть ось z цилиндрической системы координат (r, θ, z) совпадает с осью бесконечно длинного изотропного цилиндра радиуса a с плотностью ρ и модулем сдвига μ .

Рассмотрим распространение вдоль оси z упругой стационарной осесимметричной волны кручения [1—5], определяемой перемещениями

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = V(r) e^{i(\gamma z - \omega t)}, \quad (1)$$

с фазовой скоростью $\rho = \omega/\gamma$, где ω — круговая частота, γ — постоянная распространения.

На границе $r=a$ предполагается наличие упругого слоя (типа основания Винклера) и (или) равномерно распределенного инерционно-го слоя, так что граничные условия имеют вид

$$\tau_{r\theta} = -ku_\theta - m \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \quad r = a, \quad (2)$$

где k — жесткость упругого основания, m — масса инерционного слоя единицы площади поверхности. Уравнения движения Ламе приводят к обыкновенному уравнению Бесселя относительно функции $V(r)$:

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{1}{r^2} \right) V = 0, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - \gamma^2, \quad c_2^2 = \mu/\rho.$$

Его решение при $\beta \neq 0$ есть комбинация линейно независимых функций Бесселя первого $J_1(\beta r)$ и второго рода $Y_1(\beta r)$:

$$V(r) = AJ_1(\beta r) + CY_1(\beta r), \quad \beta \neq 0$$

$$V(r) = Ar + Cr^{-1}, \quad \beta = 0. \quad |и$$

Граничные условия (2) перепишем в виде

$$\tau_{r\theta} = -ku_\theta - m \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \equiv -(k - m\omega^2) u_\theta \equiv -\theta u_\theta, \quad r = a.$$

С учетом выражения (1) для u_θ получаем дисперсионное уравнение

$$A [\bar{\beta} J_0(\bar{\beta}) - (2 - \bar{\theta}) J_1(\bar{\beta})] + C \{\bar{\beta} Y_0(\bar{\beta}) - (2 - \bar{\theta}) Y_1(\bar{\beta})\} = 0, \quad (3)$$

где введены новые безразмерные величины

$$\Omega = \frac{\omega a}{c_2}, \quad \bar{\gamma} = \gamma a, \quad \bar{z} = z/a, \quad \bar{r} = r/a, \quad \bar{t} = \frac{c_2}{a} t, \quad \bar{u} = u/a,$$

$$\bar{\beta}^2 = \beta^2 a^2 = \Omega^2 - \bar{\gamma}^2, \quad \bar{\theta} \equiv \bar{k} - \bar{m} \Omega^2 = \frac{\bar{k} a}{\mu} - \frac{m c_2^2}{a \mu} \omega^2.$$

В общем случае величины $\bar{\gamma}$, A , C — комплексные, а J_n , Y_n и $\bar{\beta}$ суть многозначные функции. Дисперсионное уравнение (3) инвариантно, т. е. на разных ветвях однозначности (или аналитичности) многозначных функций дисперсионные уравнения (3) при фиксированных A и C отличаются только значениями этих констант.

Дисперсионное уравнение формально можно представить в виде $F(\bar{\gamma}, \Omega) = 0$. Для каждого фиксированного значения частоты Ω корни уравнения частот $\bar{\gamma}$ могут быть действительными, мнимыми и комплексными. Так как дисперсионное уравнение фактически зависит от $\bar{\gamma}^2$, то корни присутствуют в одной из комбинаций $\bar{\gamma} = \pm \xi \pm i\eta$. В случае чисто действительных корней $\bar{\gamma}$ выражения (1) представляют семейство распространяющихся волн. Они называются однородными волнами.

Поскольку корнями дисперсионного уравнения будут и корни $-\bar{\gamma}$ (соответствующие распространяющимся волнам в отрицательном на-

правлении оси z), то суперпозиция бегущих волн в отрицательном и положительном направлениях оси z с одинаковой амплитудой образует стоячую волну, или однородные колебания, которые называются собственными формами колебаний бесконечного упругого цилиндра. В случае чисто мнимых корней $\bar{\gamma} = \pm i\eta$ имеем нераспространяющиеся волны — так называемые неоднородные волны, амплитуда которых зависит от r и z :

$$u_\theta = V(r) e^{\mp \eta z} e^{i\Omega t}.$$

Когда корни уравнения частот комплексные: $\bar{\gamma} = \pm \xi \pm i\eta$, получаем распространяющиеся неоднородные волны

$$u_\theta = V(r) e^{\mp \eta z} e^{i(\xi z - \Omega t)}.$$

Обычно кривые зависимости Ω от параметра $\bar{\gamma}$ ($\Omega \sim \bar{\gamma}$) частотного спектра приводятся в декартовой системе координат в полупространстве $\bar{\Omega} \geq 0$. Плоскость $\bar{\Omega} = 0$ является плоскостью комплексной переменной $\bar{\gamma}$. В настоящей работе дан анализ частотного спектра только для действительных и чисто мнимых $\bar{\gamma}$.

В случае действительных и мнимых $\bar{\gamma}$ кривые $\Omega \sim \bar{\gamma}$ удобно представлять на одной плоскости с ординатой Ω и абсциссой ξ , если $\bar{\gamma}$ — действительное, и абсциссой η , если $\bar{\gamma}$ — чисто мнимое число (см., например, рис. 1). Каждая кривая частотного спектра называется ветвью спектра. Каждой точке $(\bar{\gamma}, \Omega)$ на определенной ветви соответствует нормальная волна (1). Каждая нормальная волна характеризуется своей модой: формой (выражения (1)) и частотой Ω . Таким образом, ветви в первом квадранте соответствуют распространяющимся модам (однородным волнам), а во втором — нераспространяющимся (неоднородным волнам). Например, на рис. 1 точка B отвечает распростра-

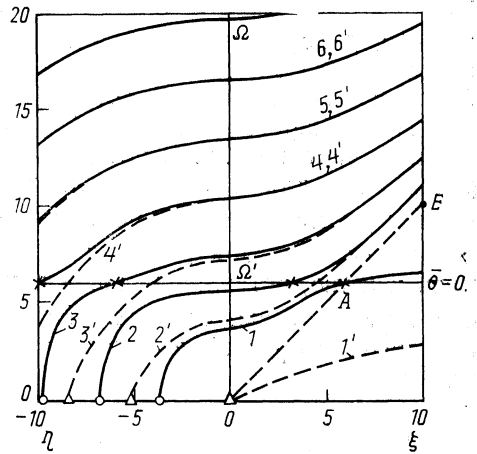
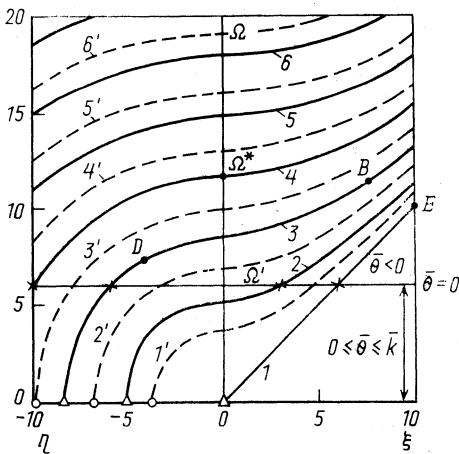


Рис. 1. Зависимость частоты от действительных ξ и мнимых η параметров распространения $\bar{\gamma}$ для волн кручения. Регулярный случай: классический случай ($\bar{k}=0, \bar{m}=0$) — сплошные линии; упругий слой ($\bar{k}=36, \bar{m}=0$) — штриховые линии

Рис. 2. Регулярный случай: смешанное основание ($\bar{k}=36, \bar{m}=1$) — сплошные линии; чистое инерционное подкрепление ($\bar{k}=0, \bar{m}=1$) — штриховые линии

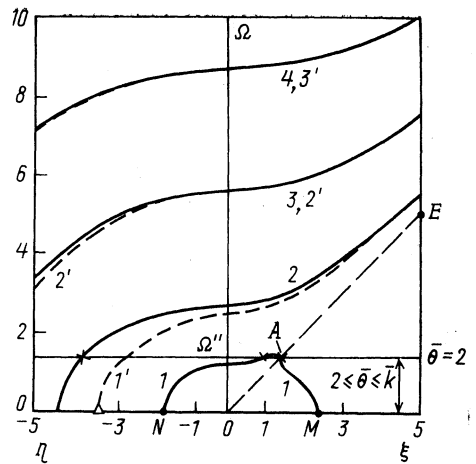
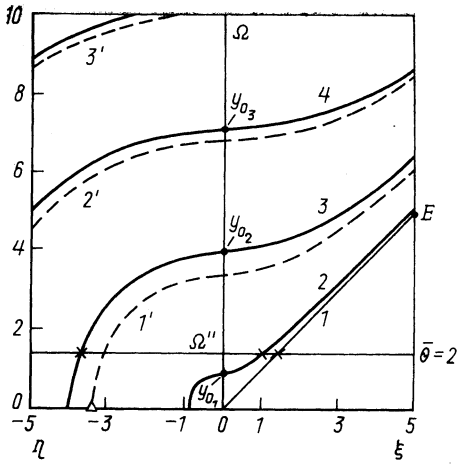


Рис. 3. Сингулярный случай: классический случай ($\bar{k}=0, \bar{m}=0$) — штриховые линии; упругий слой ($\bar{\theta}=\bar{k}=2, \bar{m}=0$) — сплошные линии

Рис. 4. Сингулярный случай: смешанное основание ($\bar{k}=4, \bar{m}=1$) — сплошные линии; чистое инерционное подкрепление ($\bar{k}=0, \bar{m}=1$) — штриховые линии

нящейся нормальной волне, а точка D — нераспространяющейся неоднородной волне.

Фазовая скорость каждой распространяющейся моды, принадлежащей определенной ветви, определяется тангенсом угла наклона к оси абсцисс секущей, соединяющей начало координат и точку $(\bar{\gamma}, \Omega)$, соответствующую данной моде; групповая скорость $c_g = d\omega/d\bar{\gamma}$ определяется тангенсом угла наклона касательной к ветви в данной точке. Следовательно, прямая OE на рис. 1—4, где $\Omega = \bar{\gamma}$ ($p = c_2$), разбивает первый квадрант на два сектора: $\Omega > \bar{\gamma}, p > c_2$ (сверхзвуковые скорости) и $\Omega < \bar{\gamma}, p < c_2$ (дозвуковые скорости). Например, в точке B фазовая скорость $p > c_2$, а групповая скорость меньше p . Для точки D понятие фазовой и групповой скорости лишено смысла.

Точки пересечения ветвей с осью ординат являются точками записания частот Ω^* , т. е. предельными значениями частоты, которые определяются для каждой ветви отдельно и соответствуют распространяющимся модам при стремлении $\bar{\gamma}$ к нулю. Значения частот записания получаются как решения частотного уравнения (3), если $\bar{\gamma}$ устремить к нулю, оставляя Ω конечным. В точках записания фазовая скорость равна бесконечности. Наклоны ветвей $d\Omega/d\bar{\gamma}$ (т. е. значения групповой скорости) в точках частот записания Ω^* определяются из условий

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{-F'_\xi(0, \Omega^*)}{F'_\Omega(0, \Omega^*)} \text{ при } F'_\Omega(0, \Omega^*) \neq 0, \bar{\gamma} = \xi.$$

Так как $F'_\xi(0, \Omega^*) = 0$, то групповые скорости в точках частот записания Ω^* равны нулю (за исключением особого случая $F'_\Omega(0, \Omega^*) = 0$).

Поскольку ограниченно податливая граница в математической постановке характеризуется параметром $\bar{\theta}$, опишем поведение этого параметра в зависимости от различных типов граничного слоя.

В общем случае

$$\bar{\theta} = \bar{k} - m\Omega^2,$$

поэтому существует частота $\Omega = \Omega'$, при которой параметр $\bar{\theta}$ обращается в нуль (см., например, рис. 2), причем $\bar{\theta} < 0$ для всех значений $\Omega > \Omega'$, а $\bar{\theta} > 0$ для $\Omega < \Omega'$. Следовательно, верхняя полуплоскость $\Omega > 0$ делится прямой $\bar{\theta} = 0$ на две полосы $\bar{\theta} < 0$ (верхняя) и $0 \leq \bar{\theta} \leq \bar{k}$ (нижняя). Если основание Винклера отсутствует, то $\bar{\theta} < 0$ всегда, так как $m > 0$. При частоте $\Omega = 0$, т. е. на оси абсцисс, $\bar{\theta} = \bar{k}$.

2. Регулярный случай. Дисперсионное уравнение (3) в регулярном случае ($C=0$) имеет вид

$$\bar{\beta} J_0(\bar{\beta}) - (2 - \bar{\theta}) J_1(\bar{\beta}) = 0. \quad (4)$$

Его частотный спектр приведен на рис. 1, 2 при разных значениях параметра $\bar{\theta}$. Уравнение (4) сохраняет свой вид при любом выборе ветви однозначности многозначных функций $\bar{\beta}$, J_n .

а. Классический случай свободной боковой поверхности ($\bar{\theta}=0$). Уравнение частот (4) подробно исследовано в работах [4, 5]. Фрагмент частотного спектра представлен на рис. 1 сплошными линиями. Относительно $\bar{\beta}$ дисперсионное уравнение (4) имеет бесконечный счетный набор вещественных корней $\bar{\beta}_s$, включая $\bar{\beta} = 0$. В последнем случае

$$u_\theta = Bre^{i(\nu z - \omega t)},$$

и соответствующая этому корню дисперсионная ветвь $\Omega = \bar{\gamma}$ не обладает дисперсией — фазовая и групповая скорости для нее равны c_2 . Характерной особенностью этой первой ветви классического случая является отсутствие частоты запираения. Любому значению частоты соответствует распространяющаяся со скоростью c_2 нормальная волна; для всех остальных корней $\bar{\beta}_s$ уравнения (4) соответствующие моды обладают дисперсией. При этом

$$\bar{\beta}_s^2 = \Omega^2 - \bar{\gamma}^2, \text{ т. е. } \bar{\beta}_s^2 = \frac{\omega^2}{p^2} \left(\frac{p^2}{c_2^2} - 1 \right).$$

В классическом случае ($\bar{\theta}=0$) кривыми $\Omega \sim \bar{\gamma}$ этого семейства будут гиперболы для действительных $\bar{\gamma}$ и окружности для чисто мнимых $\bar{\gamma}$; все ветви для распространяющихся мод в высокочастотной области имеют своей асимптотой прямую $\Omega \sim \bar{\gamma}$ и лежат в секторе $\Omega > \bar{\gamma}$ ($p > c_2$), что соответствует сверхзвуковым скоростям. При этом функция $\bar{\beta}^2 = \Omega^2 - \bar{\gamma}^2$ всегда остается действительной.

б. Основание типа Винклера ($\bar{\theta} = \bar{k}$). Фрагмент частотного спектра в этом случае ($\bar{k} \neq 0$) приведен на рис. 1 (штриховые линии). Существенным является отсутствие первой ветви $\Omega = \bar{\gamma}$ ($\bar{\beta} = 0$) частотного спектра, характерного для классического случая, и, следовательно, все ветви обладают дисперсией. Прямая $\Omega = \bar{\gamma}$, как и в классическом случае, является асимптотой для всех ветвей в высокочастотной области. Качественно форма всех ветвей при $\bar{\theta} = \bar{k}$ остается такой же — гиперболы для действительных $\bar{\gamma} = \xi$ и окружности для мнимых $\bar{\gamma} = i\eta$. Частоты запираения определяются из уравнения (4), если устремить $\bar{\gamma}$ к ну-

лю, оставляя Ω конечным. В этом случае $\Omega^* = \bar{\beta}_n^k$ и каждая n -я частота запираения попадает в отрезок $[\bar{\beta}_{n-1}, i_{0n}]$, если $\bar{\theta} \in [0, 2]$, и отрезок $[i_{0n}, i_{1n}]$, если $\bar{\theta} \in [2, \infty)$, где i_{0n}, i_{1n} — нули функции J_0, J_1 .

Предельному случаю заземления боковой поверхности ($u_0=0, r=a$) при $\bar{k}=\infty$ соответствуют предельные кривые (частотами запираения для них являются нули функции $J_1 - J_{1n}$), к которым стремятся соответствующие ветви n' при возрастании параметра \bar{k} . С уменьшением этого параметра ветви прижимаются, оставаясь подобными, к соответствующей ветви случая свободной боковой поверхности — классического случая (n' и n). Ни одна кривая частотного спектра ни при каком значении параметра \bar{k} не может размещаться в областях, заключенных между ветвью классического случая и ближайшей предельной кривой с более низким частотным фоном (n и $(n-1)'$). В этих областях располагаются частотные ветви внешней задачи о полости, которая имеет особенность в бесконечно удаленной точке и является продолжением исследуемой внутренней задачи о цилиндре.

с. *Смешанное основание* ($\bar{\theta} = \bar{k} - m\Omega^2$). При наличии инерционного основания имеем совершенно новые свойства для мод, соответствующих первой ветви частотного спектра (см. рис. 2). В полуплоскости $\Omega > 0$ проведем прямую $\Omega = \Omega' = \sqrt{\bar{k}/m}$ ($\bar{\theta} = 0$). Пересечения этой прямой с ветвями классического случая обозначены крестиками на рис. 1. При подкрепленной боковой поверхности дисперсионные кривые имеют другую форму, но они пересекают прямую $\Omega = \Omega'$ в тех же точках. Самой важной особенностью данного случая является возможность существования мод, распространяющихся с дозвуковыми скоростями ($p < c_2$). Значения функции $\bar{\beta} = i|\bar{\beta}|$ в секторе $p < c_2$ чисто мнимые, и уравнение (4) переходит в уравнение

$$|\bar{\beta}| I_0(|\bar{\beta}|) - (2 - \bar{\theta}) I_1(|\bar{\beta}|) = 0,$$

где I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Точка A — точка пересечения первой ветви дисперсионного спектра с прямой $\Omega = \gamma$ — будет двигаться вдоль прямой $\Omega = \gamma$ в зависимости от возрастания — убывания Ω' вверх — вниз соответственно. Форма нормальной волны (1) в этом случае есть $u_0 = Br \exp[i(\gamma z - \omega t)]$. Точки, отмеченные кружочками на рис. 1, 2, служат началом дисперсионных кривых в мнимой области как для случая смешанного опирания, так и для случая чисто винклеровского основания, поскольку эти точки принадлежат оси абсцисс и определяются только упругой составляющей подкрепления. Если на границе имеется только инерционный слой ($\bar{\theta} = -m\Omega^2$, рис. 2, штриховые линии), то ветви выходят из точек на оси абсцисс, которые отмечены треугольничками на рис. 1, 2. Последние также будут точками начала ветвей и в классическом случае. Все кривые за исключением кривых из области дозвуковых движений в высокочастотном пределе имеют асимптоту $\Omega = \gamma$. При наличии только инерционного слоя запираение частот для первой ветви не имеет места.

Графики зависимости фазовой скорости распространения от частоты для регулярного и сингулярного случаев при наличии смешанного основания приведены на рис. 5. Все кривые представляют семейство распространяющихся мод и имеют своей асимптотой вертикальную прямую, определяемую значением частоты запираения, соответствующей данной ветви.

3. Сингулярный случай. Решение дисперсионного уравнения (3) при $A=0$ другими авторами не рассматривалось. В этом случае оно имеет особенность при $r=0$

$$u_0 = CY_1(\beta r) e^{i(\gamma z - \omega t)},$$

так как функция Неймана Y_1 при $r=0$ неограниченна. Для действительных β возможна единственная ветвь однозначности многозначной

функции $\bar{\beta} = \sqrt{\Omega^2 - \bar{\gamma}^2}$, при которой дисперсионное уравнение

$$\bar{\beta} Y_0(\bar{\beta}) - (2 - \bar{\theta}) Y_1(\bar{\beta}) = 0$$

имеет корни. Качественно частотная картинка (см. рис. 3, 4) не отличается существенно от регулярного случая за исключением ситуации, когда в случае $\bar{\theta}$ ($\bar{\theta} = \bar{k} = 2$, рис. 3, сплошные линии) появляется первая ветвь $\Omega = \bar{\gamma}$ ($\bar{\beta} = 0$), которая не обладает дисперсией, не имеет частоты запирания и отсутствует для $\bar{\theta}$ в регулярном случае. Классический случай свободной боковой поверхности изображен на рис. 3 штриховыми линиями. При

$\bar{\theta} = \bar{k} = 2$ частоты запирания определяются нулями функции $Y_0(\Omega^*) - u_{0n}$.

В случае смешанного подкрепления обнаруживается совершенно новое поведение первой ветви спектра (рис. 4). В точке A форма распространяющейся моды имеет вид $u_0 = \frac{C}{r} \exp[i(\gamma z - \omega t)]$, а уравнение частот в секторе $p < c_2$ можно получить лишь рассмотрев дисперсионное уравнение (3) с комплексными константами A и C и выделив комбинацию линейно независимых функций Бесселя J_n, H_n , принимающих действительные значения при мнимых аргументах ($\beta = i|\beta|$), где H_n — функция Ханкеля. В итоге уравнение частот в области $p < c_2$ в отсутствие регулярной части, где K_n — модифицированная функция Бесселя второго рода, принимает вид

$$|\bar{\beta}| K_0(|\bar{\beta}|) + (2 - \bar{\theta}) K_1(|\bar{\beta}|) = 0.$$

Существенной особенностью поведения дисперсионных ветвей (нигде ранее не отмеченной) является выход ветви дисперсионного спектра на ось абсцисс, где $\bar{\gamma}$ — действительное (см. рис. 4, первая ветвь). В точке M имеем запираение длины волны, так как для действительных $\bar{\gamma}$ длина волны есть обратная величина к $\bar{\gamma}$. Если $\bar{\theta} = 2$ не попадает в полосу $0 < \bar{\theta} < \bar{k}$, то дозвуковые скорости оказываются невозможными для первой ветви и существенных особенностей в поведении не наблюдается. Действительно, при уменьшении параметра \bar{k} ($\bar{k} > 2$) точка M движется вдоль прямой $\Omega = 0$ ($\bar{\theta} = \bar{k}$) влево и при $\bar{k} = 2$ она совпадает

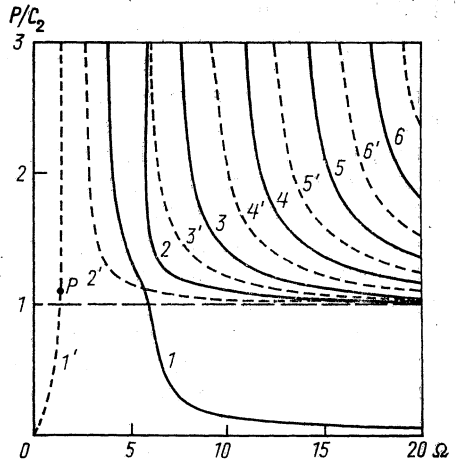


Рис. 5. Распространяющиеся моды. Кривые зависимости фазовой скорости распространения от частоты: регулярный случай ($\bar{k}=36, \bar{m}=1$) — сплошные линии; сингулярный случай ($\bar{k}=4, \bar{m}=1$) — штриховые линии

с нулевой точкой. При дальнейшем уменьшении \bar{k} первая ветвь не входит в область дозвуковых движений.

Точки N , M на оси $\Omega=0$ определяются только жесткостью упругого основания, поэтому для фиксированного \bar{k} при уменьшении параметра \bar{m} точка A будет смещаться вдоль прямой OE вверх, при этом кривизна первой ветви в точке максимума увеличивается. При фиксированном \bar{k} и \bar{m} , стремящемся к бесконечности, первая ветвь вырождается в отрезок NM .

Для всех ветвей в высокочастотной и сверхзвуковой области прямая $\Omega=\bar{\gamma}$ будет асимптотой, т. е. нормальные моды в высокочастотном и коротковолновом пределе могут распространяться только со скоростями, близкими к c_2 . Треугольниками на рис. 3, 4 отмечены в мнимой области точки начала ветвей как классического случая свободной боковой поверхности, так и случая чисто инерционного основания. При $\bar{\theta}=\bar{k}-\bar{m}\Omega''^2=2$ (случай c) прямая $\Omega=\Omega''$ пересекает дисперсионные ветви (рис. 4) в точках (обозначенных крестиками), через которые проходят и ветви случая b при $\bar{\theta}=\bar{k}=2$ (см. рис. 3).

Итак, рассмотрение регулярного решения в случае ограниченно податливой границы обнаружило совершенно новые свойства дисперсионных ветвей. Например, в классическом случае и в случае упругого основания дозвуковые скорости невозможны; наличие инерционного сопротивления приводит к существованию нормальных мод, распространяющихся с дозвуковыми скоростями. В сингулярном случае обнаружено новое явление запирания длины волны.

Вопрос о возможности существования комплексных корней у дисперсионных уравнений остается открытым. В работе [4] утверждается, что не существуют комплексные корни в классическом случае свободной боковой поверхности. В работе [6] утверждают обратное. В связи с этим можно отметить следующее: при наличии несвободной границы в частном случае при $\bar{\theta}=2$ как в регулярном, так и в сингулярном решениях пересечение комплексных ветвей с плоскостью $\Omega=0$ определяется уравнениями

$$I_0(\bar{\gamma})=0, Y_0(\bar{\gamma})=0, \text{ где } \bar{\beta} = i\bar{\gamma}, \bar{\gamma} = \xi + i\eta.$$

Эти уравнения имеют бесконечное множество комплексных корней, которые определяют точки начала комплексных ветвей. Согласно теореме Оное [7] или в силу свойств функций одного комплексного и одного действительного переменного комплексные ветви могут пересекать плоскости действительных ($\eta=0$) и мнимых ($\xi=0$) значений $\bar{\gamma}$ лишь в точках локального экстремума ветвей, лежащих в этих плоскостях. Используя гипотезу Миндлина об однозначной непрерывной продолжимости всех ветвей [4, 7] от бесконечного до нулевого значения частоты, можно утверждать, что в частном случае $\bar{\theta}=\bar{k}=2$ (поскольку ветви не имеют локальных экстремумов) комплексные ветви не будут пересекать плоскостей ни действительного, ни мнимого $\bar{\gamma}$. В сингулярном же решении для смешанного опирания точка P максимального значения частоты у первой ветви особого случая (см., например, рис. 4, 5) будет точкой пересечения некоторой комплексной ветви с плоскостью $\eta=0$.

Вопрос о существовании и свойствах локальных экстремумов у ветвей дисперсионного уравнения при наличии инерционного основания подлежит исследованию. Если на границе присутствует только упругий слой, то кривые $\Omega \sim \bar{\gamma}$ частотного спектра, принадлежащие действительной и чисто мнимой плоскости $\bar{\gamma}$, не имеют локальных экстремумов.

Из полученных в этой работе результатов следует, что самый существенный вклад в изменение характера поведения частотного спектра при наличии неклассических граничных условий вносит инерционная составляющая подкрепления, которая обуславливает совершенно новые свойства для распространяющихся мод (см. также [8]). Наиболее сильное влияние жесткости упругого основания на поведение решения проявляется в задаче с особенностью на оси цилиндра.

Работа велась под руководством профессора В. С. Ленского.

Автор выражает благодарность РФФИ за финансовую поддержку, грант № 95-01-00281.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder//Z. Math. 1876. 81. 324—336.
2. Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates. Their solutions and applications//Trans. Cambridge Phil. Soc. 1889. 14. 250—369.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. М., 1935.
4. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев, 1981.
5. Thurston R. N. Elastic waves in rods and clad rods//J. Acoust. Soc. Amer. 1978. 64, N 1. 1—37.
6. McNiven H. D., McCoy J. J. Vibrations and wave propagation in rods//R. D. Mindlin and applied mechanics. N. Y., 1974. 197—225.
7. Оное М., МакНивен Х. Д., Миндлин Р. Д. Дисперсия осесимметричных волн в упругих стержнях//Тр. Америк. о-ва инженеров механиков. Прикл. механ. 1962. 62, № 4. 139—145.
8. Новотный С. В. Распространение упругих волн вдоль цилиндрической полости с несвободной границей//Прикл. матем. и механ. 1993. 57, вып. 4. 152—155.

Поступила в редакцию
15.06.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. I, МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 533.6.011

В. Л. Ковалев, А. А. Крупнов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОМ СЛОЕ ОКОЛО ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГЛОБАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ

При численном исследовании стационарных течений с дозвуковыми зонами, в том числе сверхзвукового обтекания лобовой части затупленных тел, возникает ряд проблем [1—4]. В значительной степени они обусловлены эллиптическим характером решаемых уравнений в дозвуковых областях течения и, следовательно, некорректностью задачи Коши в этих областях [5]. В связи с этим большое распространение при исследовании стационарных течений получил метод установления. В этом методе вводится дополнительная переменная (время), увеличивающая размерность задачи, и стационарное течение получается как предельное состояние при решении начально-краевой задачи со стационарными граничными условиями [6, 7]. Так как метод установления требует от нескольких сот до нескольких тысяч шагов по времени, то для получения быстрых алгоритмов при расчете сверхзвуковой области течения переходят от решения нестационарных уравнений Эйлера к решению стационарных уравнений каким-либо маршевым методом [4]. Тем самым используются два, вообще говоря, разных чис-