

Общероссийский математический портал

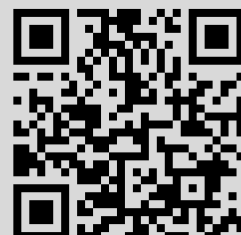
Ф. Д. Мироненко, А. И. Назаров, Локальная оценка максимума типа  
Александрова–Бакельмана для решений эллиптических уравнений на стратифи-  
цированном множестве вида “книжка”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2022, том 519, 105–  
113

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и со-  
гласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

14 февраля 2025 г., 11:19:12



Ф. Д. Мироненко, А. И. Назаров

ЛОКАЛЬНАЯ ОЦЕНКА МАКСИМУМА  
ТИПА АЛЕКСАНДРОВА–БАКЕЛЬМАНА  
ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ  
ВИДА “КНИЖКА”

§1. ВВЕДЕНИЕ

Идея оценки максимума для решений эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме с помощью анализа нормального изображения выпуклой оболочки берет начало в работах А. Д. Александрова [5] и И. Я. Бакельмана [8]. В дальнейшем эта идея развивалась и использовалась многими авторами (обзор литературы по этой теме можно найти в [7] и в [6, §2.3]).

Настоящее краткое сообщение посвящено получению локальной оценки типа Александрова–Бакельмана на простейшем **стратифицированном множестве** (см. §2). Постановка задачи и формулировка основного результата содержатся в §3. В §4 исследуются свойства стратифицированного нормального отображения и приводится набросок доказательства основного результата.

**Используемые обозначения.**  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$  – точки в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

$B^n(R)$  – шар радиуса  $R$  в  $\mathbb{R}^n$  с центром в начале координат.

$B_0(R) := B^{n-1}(R) \times \{0\}$  – вложение  $n - 1$  мерного шара в  $\mathbb{R}^n$ .

$\mathbb{R}_\pm^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ ,  $B_\pm(R) := B^n(R) \cap \mathbb{R}_\pm^n$

$\mathbb{R}_{0,\pm}^n := \mathbb{R}_\pm^n \cup \{x_n = 0\}$ ,  $B_{0,\pm}(R) := B^n(R) \cap \mathbb{R}_{0,\pm}^n = B_0(R) \cup B_\pm(R)$

$\mathcal{U}(u) := \{(x, h) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \text{dom}(u), h \leq u(x)\}$  – подграфик функции  $u$ .

---

*Ключевые слова:* стратифицированное множество, принцип максимума Александрова–Бакельмана, нормальное отображение.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 22-21-00027, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

$\text{conv}(E) \subset \mathbb{R}^m$  – выпуклая оболочка множества  $E \subset \mathbb{R}^m$ .

Для функции  $u$ , заданной на выпуклом множестве в  $\mathbb{R}^n$ , определим ее **выпуклую оболочку**  $\text{conv}[u]$  как функцию, для которой  $\mathcal{U}(\text{conv}[u]) = \text{conv}(\mathcal{U}(u))$ . Таким образом, выпуклая оболочка функции выпукла вверх.

$\Phi_z : \text{dom}(z) \rightarrow \mathbb{R}^n$  – нормальное отображение, порождаемое выпуклой вверх функцией  $z$ . В общем случае это многозначное отображение, определяемое соотношением

$$\Phi_z(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x - x_0 \rangle + z(x_0) \geq z(x), \quad x \in \text{dom}(z)\},$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение. В точках дифференцируемости функции  $z$  значение  $\Phi_z$  определено однозначно и равно ее градиенту.

$u_+ := \max\{0, u\}$  – положительная часть функции  $u$ .

$Z_u := \{x \in \text{dom}(u) \mid u(x) = \text{conv}[u_+](x)\}$  – множество контакта.

Индексы  $i$  и  $j$  принимают значения от 1 до  $n$ , а индексы  $l$  и  $m$  – от 1 до  $n-1$ . Оператор дифференцирования по переменной  $x_i$  обозначается  $D_i$ . Применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

## §2. СТРАТИФИЦИРОВАННОЕ МНОЖЕСТВО

В общем случае стратифицированным множеством называется клеточный комплекс с некоторыми дополнительными свойствами (см., напр., [10]). В нашей работе рассматривается стратифицированное множество специального вида.

Рассмотрим  $K \in \mathbb{N}$  копий  $n$ -мерного евклидова пространства и обозначим их  $\mathbb{R}^{n, [k]}$ . В каждом из этих пространств выделим  $n$ -ю координату  $x_n^{[k]}$ , а первые  $n-1$  для всех пространств будем считать общими:  $\bigcap_k \mathbb{R}^{n, [k]} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . Множество

$$\mathbb{R}_+^{\otimes} := \bigcup_{k=1}^K \mathbb{R}_{0,+}^{n, [k]}$$

будем называть стратифицированным множеством типа “книжка”, что обусловлено интуитивными аналогиями, вызываемыми случаем  $n=2$ . “Листы”  $\mathbb{R}_+^{n, [k]}$  этой книжки называются  $n$ -мерными стратами, а “переплет”  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  –  $(n-1)$ -мерным стратом множества  $\mathbb{R}_+^{\otimes}$ .

Стратифицированным шаром будем называть шар в  $\mathbb{R}_+^{\otimes}$  (см. рис. 1):

$$\mathbb{B} := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{\otimes} \mid |x| < R \right\} = \bigcup_{k=1}^K B_{0,+}^{[k]}(R).$$

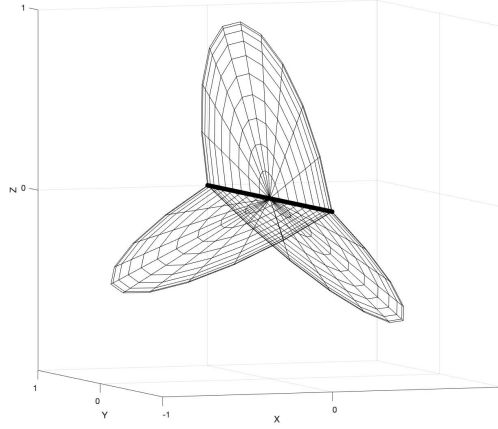


Рис. 1. Стратифицированный шар  $\mathbb{B}$  при  $n=2$  и  $K=3$ .

Границу этого шара можно явно записать так:

$$\partial\mathbb{B} = \bigcup \partial B_{0,+}^{[k]}(R) \setminus B_0(R).$$

В дальнейшем все векторы, принадлежащие пространству  $\mathbb{R}^{n,[k]}$ , будут обозначаться верхним индексом:  $x^{[k]}$ , и аналогичная запись будет использоваться для их  $n$ -ых компонент. И наоборот, для вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  мы будем обозначать через  $x^{[k]}$  его естественное вложение в  $\mathbb{R}^{n,[k]}$ .

Далее, функция  $u : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$  может быть представлена как набор своих функций-компонент  $u_1, \dots, u_K : B_{0,+}(R) \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых выполняется условие согласованности  $u_i|_{B_0(R)} \equiv u_j|_{B_0(R)}$ . Таким образом,

$$u(x^{[k]}) = u_k(x).$$

Введём аналог выпуклой оболочки функции  $u$ :

$$\operatorname{conv}[u](x^{[k]}) = \operatorname{conv}[u_k](x). \quad (1)$$

Это определение корректно в силу следующего очевидного утверждения.

**Лемма 1.** *Рассмотрим функции  $u_1, u_2 \in C(\overline{B_+(R)})$ . Тогда*

$$u_1|_{B_0(R)} \equiv u_2|_{B_0(R)} \implies \operatorname{conv}[u_1]|_{B_0(R)} \equiv \operatorname{conv}[u_2]|_{B_0(R)}.$$

*Иными словами, сужение выпуклой оболочки непрерывной функции на  $B_0(R)$  зависит лишь от значений функции на  $B_0(R)$ .*

### §3. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ШАРЕ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть на каждом из  $n$ -мерных стратов  $B_+^{[k]}(R)$  задан оператор второго порядка

$$\mathcal{L}^{[k]}u(x) := -a_{ij}^{[k]}(x)D_iD_ju(x) + b_i^{[k]}(x)D_iu(x),$$

на коэффициенты которого накладываются следующие условия:

$$a_{ij}^{[k]} \in L_\infty(B_+^{[k]}(R)), \quad b_i^{[k]} \in L_n(B_+^{[k]}(R)).$$

На  $(n-1)$ -мерном страте определим оператор второго порядка

$$\mathcal{B}u(x') := -\alpha_{lm}(x')D_lD_mu(x', 0) + \beta_l(x')D_lu(x', 0),$$

где

$$\alpha_{lm} \in L_\infty(B_0(R)), \quad \beta_l \in L_{n-1}(B_0(R)),$$

и оператор “сопряжения”

$$\mathcal{J}u = \sum_{k=1}^K \beta_n^{[k]}(x') \cdot \lim_{x_n^{[k]} \rightarrow 0^+} D_nu(x', x_n^{[k]})$$

(здесь  $\beta_n^{[k]}$  – измеримые функции).

Матрицы старших коэффициентов операторов  $\mathcal{L}^{[k]}$  и  $\mathcal{B}$  удовлетворяют условию эллиптичности

$$(a_{ij}^{[k]}) \geq \nu I_n, \quad (\alpha_{lm}) \geq \nu I_{n-1}$$

(здесь  $\nu > 0$  – константа эллиптичности, а неравенства понимаются в смысле квадратичных форм), а коэффициенты оператора  $\mathcal{J}$  – условию  $\beta_n^{[k]} \leq 0, k = 1, \dots, K$ .

Сформулируем теперь основной результат работы.

**Теорема 1.** Пусть функция  $u \in W_n^2(\mathbb{B})$  такая, что

$$u|_{B_0(R)} \in W_{n-1}^2(B_0(R)),$$

является решением задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{[k]}u &= f^{[k]} && \text{в } B_+^{[k]}(R), \quad k = 1, \dots, K; \\ \mathcal{B}u + \mathcal{J}u &= g && \text{в } B_0(R); \\ u &\leq 0 && \text{на } \partial\mathbb{B}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда справедлива оценка:

$$\max_{\overline{\mathbb{B}}} u_+ \leq N \left( n, \left( \frac{\|b^{[k]}\|_n}{\nu} \right)_{k=1}^K, \frac{\|\beta'\|_{n-1}}{\nu} \right) \cdot \frac{R}{\nu} \cdot \left( \sum_{k=1}^K \|f_+^{[k]}\|_n + \|g_+\|_{n-1} \right)$$

(все нормы в правой части берутся по множествам  $\{x \mid u(x) > 0\}$  на соответствующих стратах).

**Замечание 1.** При  $K = 1$  задача (2) – это классическая задача Вентцеля (результат теоремы 1 в этом случае был получен в [2, 4]), а при  $K = 2$  – двухфазная задача Вентцеля (соответственно, в [1]). Существенно, что такие стратифицированные множества вкладываются в  $\mathbb{R}^n$ , что значительно упрощает анализ нормального отображения.

Будем считать, что  $u \in C^2(\overline{\mathbb{B}})$  и  $u|_{\partial\mathbb{B}} < 0$ . Общий случай получается из этого стандартной аппроксимацией (см., например, доказательство теоремы 2.2 в [6]).

#### §4. СТРАТИФИЦИРОВАННОЕ НОРМАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Обозначим  $M = \max u_+$  (не умаляя общности, можно считать  $M > 0$ ). Введём выпуклую оболочку  $z = \text{conv}[u_+]$  вида (1) и обозначим  $z_k$  ее  $k$ -ю компоненту.

Определим стратифицированный аналог нормального отображения  $\Phi_z$  покомпонентно (заметим, что такое отображение всегда многозначно в точках “переплета”):

$$\begin{aligned} \Phi_z(x^{[k]}) &= (\Phi_{z_k}(x))^{[k]}, && x^{[k]} \in B_+^{[k]}(R); \\ \Phi_z(x) &= \bigcup_{k=1}^K (\Phi_{z_k}(x))^{[k]}, && x \in B_0(R). \end{aligned}$$

Введём в  $\mathbb{R}^{\otimes}$  “двойственный” стратифицированный шар:

$$\mathbb{B}^* = \bigcup_{k=1}^K B_{0,-}^{[k]}(M/2R).$$

Далее в этом параграфе мы построим множество  $\mathcal{D} \subset \mathbb{B}^*$ . С одной стороны, оно имеет достаточно большой объем (именно, его проекция на  $\mathbb{R}^n$  совпадает с полушаром  $B_{0,-}(M/2R)$ ), а с другой – интеграл по нему можно оценить в терминах правых частей задачи (2) аналогично изначальной идее Александра и Бакельмана. Для начала рассмотрим функцию

$$\widehat{u}(x) := \max \{u_1(x), \dots, u_K(x)\} \quad (3)$$

и выпуклую оболочку  $\widehat{z} := \text{conv}[\widehat{u}_+]$ . Заметим, что  $\widehat{u}$  может не принадлежать классу  $\mathcal{C}^1(B_{0,+}(R))$ . Однако она удовлетворяет условию нижнего шара (см. [9]) и  $\widehat{u}|_{\partial B_{0,+}(R) \setminus B_0(R)} < 0$ . Поэтому, аналогично лемме 2 в [9], градиент функции  $\widehat{z}$  удовлетворяет условию Липшица.

Нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Первое из них легко следует из теоремы Каратеодори (см., напр., [3, §17]).

**Лемма 2.** *Рассмотрим вектор  $p \in \mathbb{R}_{0,-}^n$ . Если плоскость  $\pi$  с градиентом  $p$  является опорной к графику  $\widehat{z}$  с точкой касания  $x^0 \in B_{0,+}(R)$ , то у этой же опорной плоскости можно выбрать другую точку касания  $x^1$ , лежащую в множестве контакта  $\mathcal{Z}_{\widehat{u}}$ . При этом, если  $x^0 \in B_0(R)$ , то и  $x^1$  может быть выбрана из  $B_0(R)$ .*

Второе утверждение хорошо известно (см., напр., доказательство теоремы 1.2 в [7]).

**Лемма 3.**  $B_{0,-}(M/2R) \subset \Phi_{\widehat{z}}(B_{0,+}(R))$ .

Из лемм 2 и 3 видно, что для любого вектора  $p \in B_{0,-}(M/2R)$  существует точка касания  $x \in \mathcal{Z}_{\widehat{u}}$  опорной плоскости с нормальным вектором  $(p, -1)$  и графика  $\widehat{z}$ . Очевидно, в точке  $x$  опорная плоскость касается графиков тех компонент  $u_k$ , которые доставляют максимум в (3).

Обозначим через  $\mathcal{P}_k$  множество тех  $p \in B_{0,-}(M/2R)$ , для которых соответствующие опорные плоскости касаются графика  $u_k$ . Множества  $\mathcal{P}_k$  измеримы, и их объединением является весь полушар

$B_{0,-}(M/2R)$ . Далее для удобства рассмотрим дизъюнктивный набор

$$\mathcal{D}_k := \mathcal{P}_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{P}_j \subset \Phi_{z_k}(B_{0,+}(R)) \cap \Phi_{\tilde{z}}(B_{0,+}(R)). \quad (4)$$

Теперь мы готовы определить искомое множество:

$$\mathcal{D} := \bigcup_{k=1}^K \mathcal{D}_k^{[k]} \subset \mathbb{B}^*$$

(каждое из множеств  $\mathcal{D}_k$  “поднимается” на соответствующий лист).

**Лемма 4** (Основное свойство множества  $\mathcal{D}$ ).

$$\tilde{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \setminus \Phi_z(\mathbb{B} \setminus B_0(R)) \subset \Phi_z(\tilde{\mathcal{Z}}),$$

где  $\tilde{\mathcal{Z}}$  – специальное множество на “переплете”:

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \left\{ x \in \mathcal{Z}_u \cap B_0(R) \mid \forall k : D_n^{[k]} z(x', 0) := \lim_{x_n^{[k]} \rightarrow 0+} D_n z(x', x_n^{[k]}) \leq 0 \right\}.$$

**Доказательство.** Аналогично рассуждению из начала параграфа, градиент функции  $z$  удовлетворяет условию Липшица на каждом листе, поэтому множество  $\tilde{\mathcal{Z}}$  корректно определено.

Из определения множества  $\mathcal{D}$  немедленно следует, что  $\mathcal{D} \subset \Phi_z(\mathbb{B})$ , и потому  $\tilde{\mathcal{D}} \subset \Phi_z(B_0(R))$ , а из (4) видно, что для любого фиксированного  $p^{[\kappa]} \in \tilde{\mathcal{D}}$  выполнено  $p \in \Phi_{\tilde{z}}(B_0(R))$ . Более того, по лемме 2 можно выбрать точку  $x = (x', 0)$  из прообраза  $\Phi_{\tilde{z}}^{-1}(p)$  так, что  $x \in \mathcal{Z}_{\hat{u}}$ .

Функция  $\hat{u}$  по определению мажорирует каждую из компонент  $u_k$ , поэтому  $\hat{z} \geq z_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . С другой стороны,  $u_1(x) = \dots = u_K(x) = \hat{u}(x) = \hat{z}(x)$ . Поэтому для любого  $k = 1, \dots, K$  имеем

$$\lim_{x_n \rightarrow 0+} D_n z_k(x', x_n) \leq \lim_{x_n \rightarrow 0+} D_n \hat{z}(x', x_n) \leq p_n \leq 0.$$

Тем самым  $p^{[\kappa]} \in \Phi_z(\tilde{\mathcal{Z}})$ , что и доказывает лемму.  $\square$

**Схема доказательства теоремы 1.**

Из леммы 4 следует, что справедливо включение

$$\mathcal{D} \subset \bigcup_{k=1}^K \Phi_z(B_+^{[k]}(R)) \cup \Phi_z(\tilde{\mathcal{Z}}).$$



Поскольку  $\mathcal{D}$  взаимно однозначно проецируется на полушар  $B_{0,-}(M/2R)$ , для любой неотрицательной измеримой функции  $g$  получаем аналогично теореме 3.3 [7] (см. также [1, Lemma 1.2])

$$\int_{B_{0,-}(M/2R)} g(p) dp \leq \sum_{k=1}^K \int_{B_+(R)} g(Dz_k(x)) \cdot \det(-D^2z_k(x)) dx + \int_{\tilde{z} - M/2R}^0 \int g(D'z(x', 0), p_n) \cdot \det(-D'^2z(x', 0)) dp_n dx' \quad (5)$$

(напомним, что на “переплете” все компоненты совпадают, поэтому  $D'z$  и  $D'^2z$  определены корректно).

Положив  $g(p) = (F^2 + |p|^2)^{-\frac{n}{2}}$ , можно закончить доказательство так же, как в теореме 3.3 [7].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *Linear two-phase Venttsel problems*. — Arkiv för matematik **39**, No. 2 (2001), 201–222.
2. D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov, *Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Wentzel boundary condition*. — Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **164** (1995), 1–13.
3. Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, М., Мир (1973).
4. Y. Luo, *An Aleksandrov-Bakelman type maximum principle and applications*. — J. Differ. Equations **101**, No. 2 (1993), 213–231.
5. А. Д. Александров, *Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле*. — ДАН СССР **134**, No. 5 (1960), 1001–1004.
6. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Лемма о нормальной производной и вокруг неё*. — Усп. матем. наук **77** (2022), 3–68.
7. А. И. Назаров, *Принцип максимума А.Д. Александрова*. — Современная математика и ее приложения **29** (2005), 127–143.
8. И. Я. Бакельман, *К теории квазилинейных эллиптических уравнений*. — Сибирск. матем. ж. **2** (1961), 179–186.
9. А. И. Назаров, Н. Н. Уральцева, *Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **147** (1985), 95–109.
10. С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, *Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве*. — Матем. зам. **81** (2007), 417–426.

Mironenko F. D., Nazarov A. I. Local Aleksandrov–Bakelman type maximum estimate for solutions to elliptic equations on a book-type stratified set.

In the last decades studies of partial differential equations on complex structures have been gaining their popularity. In particular, we notice equations on so-called stratified sets. We prove the Aleksandrov–Bakelman type maximum principle for linear elliptic second order equation on a “book” type stratified set.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В.А. Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия  
и Санкт-Петербургский госуниверситет  
*E-mail*: [fomius2000@yandex.ru](mailto:fomius2000@yandex.ru)  
*E-mail*: [al.il.nazarov@gmail.com](mailto:al.il.nazarov@gmail.com)

Поступило 6 ноября 2022 г.