Е. А. Кудрявцева, Интегрируемые по Лиувиллю обобщённые биллиардные потоки и теоремы типа Понселе, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2015, том 20, выпуск 3, 113–152

Интегрируемые по Лиувиллю обобщённые биллиардные потоки и теоремы типа Понселе

Е. А. КУДРЯВЦЕВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: eakudr@mech.math.msu.su

УДК 514.853+517.938.5

Ключевые слова: склеенный геодезический поток, закон преломления, биллиардный поток, интегрируемость по Лиувиллю, теорема Понселе.

Аннотация

Изучаются «склеенные геодезические потоки» и, в частности, «обобщённые биллиардные потоки» на римановых многообразиях с краем и геодезические потоки на кусочно-гладких римановых многообразиях. Развиваются подходы В. Лазуткина (1993) и С. Табачникова (1993) к доказательству теорем типа Понселе о замыкании с помощью применения классической теоремы Лиувилля к биллиардному потоку (соответственно биллиардному отображению). Мы доказываем, что гюйгенсовость закона преломления/отражения не только достаточна, но и необходима для «локальной интегрируемости по Лиувиллю» склеенного геодезического потока, точнее для попарного коммутирования «склеенных потоков», отвечающих инволютивному набору локальных первых интегралов, однородных по импульсам. Аналогичный критерий получен для локальной интегрируемости по Лиувиллю отображения последования/биллиардного отображения.

Abstract

E. A. Kudryavtseva, Liouville integrable generalized billiard flows and Poncelet type theorems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 113—152.

“Glued geodesic flows” and, in particular, “generalized billiard flows” on Riemannian manifolds with boundary, and geodesic flows on piecewise smooth Riemannian manifolds are studied. We develop the approaches of Lazutkin (1993) and Tabachnikov (1993) for proving the Poncelet type closure theorems via applying the classical Liouville theorem to the billiard flow (respectively to the billiard map). We prove that the condition on the refraction/reflection law to respect the Huygens principle is not only sufficient, but also necessary for “local Liouville integrability” of the glued geodesic flow, more precisely for pairwise commutation of the “glued flows” corresponding to a maximal collection of local first integrals in involution homogeneous in momenta. A similar criterion for “local Liouville integrability” of the succession/billiard map is obtained.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 3, с. 113—152.

Посвящается академику
Анатолию Тимофеевичу Фоменко
в честь его юбилея

1. Введение

Пусть Q — n-мерное гладкое многообразие ($n \geqslant 2$), снабжённое гладкой римановой метрикой g. Пусть $\Omega \subset Q$ — открытое (не обязательно связное) подмножество, замыкание которого $\bar{\Omega}$ есть многообразие с гладким краем $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega \subset Q$. Пусть задан произвольный диффеоморфизм

$$\hat{\rho}\colon \Gamma \to \Gamma.$$

Рассмотрим топологическое пространство

$$\bar{\Omega}_{\hat{\rho}} := \bar{\Omega}/\sim,$$

полученное из многообразия $\bar{\Omega}$ с краем Γ отождествлением края по диффеоморфизму $\hat{\rho}$, т. е. отождествлением любой точки края $\mathbf{q} \in \Gamma$ с её образом $\hat{\rho}(\mathbf{q}) \in \Gamma$ при диффеоморфизме $\hat{\rho}$. Будем называть это пространство *склеенным конфигурационным псевдомногообразием*.

Основные цели и результаты настоящей работы состоят в следующем.

Во-первых, мы определяем (следуя общей процедуре из [12, гл. I, § 4, 6]) семейство *склеенных геодезических потоков* (определение 2.3), описывающих геодезические на склеенном конфигурационном псевдомногообразии $\bar{\Omega}_{\hat{\rho}}$, снабжённом (кусочно-гладкой и, возможно, разрывной) римановой метрикой g. Грубо говоря, склеенный геодезический поток — это динамическая система на некотором $2n$-мерном многообразии $M_\rho \supset T^*\Omega$, ограничение которой на $T^*\Omega$ совпадает с обычным геодезическим потоком метрики g. Более точно: пусть Γ^+ и Γ^- — два непересекающихся открытых подмножества края $T^*Q|_\Gamma = \partial(T^*\bar{\Omega})$ многообразия

$$T^*\bar{\Omega} := T^*Q|_{\bar{\Omega}},$$

таких что фазовые траектории геодезического потока на $T^*\bar{\Omega}$ трансверсально «входят» в $T^*\bar{\Omega}$ через Γ^- и трансверсально «выходят» из $T^*\bar{\Omega}$ через Γ^+ (детали см. в обозначении 2.2 и определении 2.3), и пусть задан диффеоморфизм

$$\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-, \tag{1}$$

называемый *законом преломления*, сохраняющий функцию Гамильтона H геодезического потока и удовлетворяющий соотношению $\pi \circ \rho = \hat{\rho} \circ \pi$, где $\pi\colon T^*Q \to Q$ — проекция. Рассмотрим многообразие

$$M := (T^*\Omega) \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^- \subset T^*\bar{\Omega} \subset T^*Q$$

с краем $\Gamma^+ \sqcup \Gamma^-$. Определим *склеенное фазовое пространство*

$$M_\rho := M/\sim \tag{2}$$

данной системы как топологическое пространство, полученное из многообразия M с краем $\Gamma^+ \sqcup \Gamma^-$ отождествлением (склеиванием) края по диффеоморфизму ρ. Нетрудно убедиться, что M_ρ является топологическим многообразием. Определим *склеенную функцию Гамильтона* H_ρ на M_ρ формулой

$$H_\rho \circ \pi_\rho = H, \tag{3}$$

где $\pi_\rho\colon M \to M_\rho$ — проекция. (Нетрудно проверить, что такая функция H_ρ существует, единственна и непрерывна.) Геодезический поток на M индуцирует *склеенный геодезический поток* на M_ρ, причём склеенная функция Гамильтона H_ρ является первым интегралом этого потока.

Таким образом, склеенный геодезический поток полностью определяется следующими данными:

— риманово многообразие $(\bar\Omega, g)$ с гладким краем $\Gamma = \partial\bar\Omega$,

— диффеоморфизм $\hat\rho\colon \Gamma \to \Gamma$,

— закон преломления $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$, т. е. диффеоморфизм между некоторыми открытыми непересекающимися подмножествами Γ^+ и Γ^- многообразия $T^*Q|_\Gamma = \partial(T^*\bar\Omega)$, являющийся поднятием диффеоморфизма $\hat\rho$ и сохраняющий функцию Гамильтона H.

Пусть фиксированы риманово многообразие $(\bar\Omega, g)$ с краем Γ и диффеоморфизм $\hat\rho\colon \Gamma \to \Gamma$. Тогда диффеоморфизм ρ (т. е. закон преломления) далеко не единствен и все склеенные геодезические потоки образуют (функциональное) семейство с (функциональным) параметром ρ — законом преломления.

Закон преломления ρ назовём *стандартным* или *гюйгенсовым* по отношению к заданным $(\bar\Omega, g)$ и $\hat\rho\colon \Gamma \to \Gamma$, если соответствующие «склеенные геодезические» являются локально кратчайшими. (Это равносильно пункту а) определения 2.4 ввиду теорем 1 и 2 из [3].) Мы доказываем (в пункте а) следствия 3.3), что стандартный закон преломления существует для любых фиксированных $(\bar\Omega, g)$ и $\hat\rho\colon \Gamma \to \Gamma$, причём он единствен при фиксированных $\Gamma^\pm$. Мы также вводим понятие *почти стандартных* законов преломления для данного уровня энергии $E > 0$ (они образуют семейство, параметризованное «локальными» замкнутыми 1-формами на Γ) (пункт б) определения 2.4) и исследуем их существование и единственность (пункты а) и б) следствия 3.4).

Пример 1.1.

а) Если $\hat\rho = \mathrm{id}_\Gamma$, то склеенный геодезический поток назовём *обобщённым биллиардным потоком*, а закон преломления — *законом отражения*. Если при этом закон отражения ρ стандартен (т. е. согласован с принципом Гюйгенса — многомерным обобщением биллиардного закона «Угол отражения равен углу падения»), то получаем обычный биллиардный поток в римановом многообразии $(\bar\Omega, g)$ с краем. Важные примеры *интегрируемых* обобщённых биллиардных потоков (с необязательно стандартными законами отражения) можно найти в [4, 5] и разделе 7.

б) Пусть $\hat\rho$ — свободная инволюция (т. е. $\hat\rho^2 = \mathrm{id}_\Gamma$ и $\hat\rho$ не имеет неподвижных точек). Тогда склеенное конфигурационное псевдомногообразие $\bar\Omega_{\hat\rho}$ является гладким (не обязательно с гладкой римановой метрикой) многообразием и склеенный геодезический поток определён на открытом подмножестве его кокасательного расслоения. Если при этом закон преломления ρ стандартен (т. е. согласован с принципом Гюйгенса), то склеенный геодезический поток описывает стандартное распространение света в неоднородной среде, имеющей «гиперповерхность раздела» сред (т. е. выполнен принцип Гюйгенса и геодезические — это локально кратчайшие).

в) Если свободная инволюция $\hat\rho$ в пункте б) — изометрия, то $(\bar\Omega_{\hat\rho}, g)$ является «кусочно-гладким римановым многообразием», т. е. гладким многообразием с непрерывной и кусочно-гладкой римановой метрикой. Если при этом закон преломления ρ стандартен (т. е. согласован с принципом Гюйгенса), то получаем «обычный» геодезический поток на кусочно-гладком римановом многообразии $(\bar\Omega_{\hat\rho}, g)$. Примеры таких метрик можно найти в [1, пример 4.29; 3].

г) Пусть заданы риманово многообразие (Q, g), область $\Omega \subset Q$ с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega \subset Q$, диффеоморфизм $\hat\rho\colon \Gamma \to \Gamma$ и гладкая функция (потенциал) $V\colon Q \to \mathbb{R}$. *Натуральная механическая система* на римановом многообразии $(\bar\Omega, g)$ с *потенциалом* V — это гамильтонова система на (M, ω) с функцией Гамильтона $\tilde H = H + V \circ \pi$. Для такой системы аналогично (1)—(3) определяются *закон преломления* ρ, *склеенное фазовое пространство* M_ρ, *склеенная функция Гамильтона* $\tilde H_\rho$ и *склеенная натуральная механическая система*. Таким образом, склеенный геодезический поток — это частный случай (при $V = 0$) склеенной натуральной механической системы. В этом случае аналогично определению 2.4 вводится *стандартный* или *гюйгенсов* (соответственно *почти стандартный* или *почти гюйгенсов* для уровня энергии E) закон преломления. Аналогично пункту а) следствия 3.3 и пунктам а), б) следствия 3.4 показывается, что (для подходящих $\Gamma^\pm$) существует единственный стандартный закон преломления. Более того, если потенциал $V|_\Gamma$ ограничен сверху, то для любого достаточно большого уровня энергии $E > 0$ и любой гладкой функции $G_E\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, такой что 1-форма $E^{-1/2}\, dG_E$ на Γ «достаточно мала», существует (для подходящих $\Gamma^\pm$) единственный почти стандартный закон преломления с производящей функцией G_E для уровня энергии E.

Всюду в статье используется обозначение

$$\beta|_Y := i^*\beta$$

для любых гладкого многообразия X, гладкого подмногообразия $Y \subset X$ и дифференциальной формы β на X, где $i\colon Y \to X$ — отображение включения.

Если закон преломления ρ сохраняет симплектическую структуру, т. е. $\rho^*(\omega|_{\Gamma^-}) = \omega|_{\Gamma^+}$ (например, ρ является стандартным, т. е. гюйгенсовым, см. предложение 3.2), то выполнима общая процедура гамильтонова склеивания, введённая В. Лазуткиным [12, гл. I, § 4, 6]. Очевидно, что если закон преломления почти стандартен (т. е. почти гюйгенсов), то *отображение последования*

(13), (34) (называемое *биллиардным отображением* в случае пункта а) примера 1.1) симплектично. Итак, гюйгенсов и почти гюйгенсовы законы обладают следующими *гамильтоновыми свойствами*.

Предложение 1.2. *Пусть имеет место ситуация из пункта* г) *примера* 1.1. *Пусть* $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ — *закон преломления для риманова многообразия* $(\bar\Omega, g)$ *с краем* Γ, *потенциала* V *и диффеоморфизма* $\hat\rho$ *края.*

а) *Предположим, что закон преломления* ρ *стандартен* (*т. е. гюйгенсов*). *Тогда склеенная натуральная механическая система «гамильтоново сглаживаема» в следующем смысле*: *на склеенном фазовом пространстве* M_ρ *существуют гладкая структура и симплектическая структура* $\tilde\omega_\rho$, *такие что склеенная функция Гамильтона* $\tilde H_\rho\colon M_\rho \to \mathbb{R}$ *и проекция* $\pi_\rho\colon M \to M_\rho$ *являются гладкими и* $\pi_\rho^*\tilde\omega_\rho = \omega|_M$. (*См.* [12, гл. I, § 4, 6].)

б) *Предположим, что закон преломления* ρ *почти стандартен* (*т. е. почти гюйгенсов*) *для уровня энергии* $E \in \mathbb{R}$. *Тогда отображение последования* (*см.* (13) *и* (34)) *для ограничения склеенной натуральной механической системы на множество уровня энергии* $\tilde H_\rho^{-1}(E) \subset M_\rho$ *сохраняет симплектическую структуру.* $\square$

Итак, согласно пункту а) предложения 1.2 если закон преломления ρ стандартен (т. е. гюйгенсов), то склеенная натуральная механическая система *гамильтоново сглаживаема*, т. е. является гладкой гамильтоновой системой относительно некоторых гладкой и симплектической структур и некоторой гладкой функции Гамильтона $\tilde H_\rho$ на M_ρ, таких что проекция $\pi_\rho\colon M \to M_\rho$ является гладким симплектическим отображением и переводит функцию $\tilde H_\rho$ в $\tilde H$.

Из предложения 1.2 при $V = 0$ и теоремы Лиувилля (об условной периодичности решений гладкой гамильтоновой системы на любом компактном неособом совместном множестве уровня максимального инволютивного набора гладких первых интегралов) следуют, в частности, следующие известные результаты. Биллиардный поток в эллипсе с плоской метрикой является гладкой гамильтоновой системой, а потому интегрируем по Лиувиллю [9]; соответствующее биллиардное отображение тоже интегрируемо по Лиувиллю [15]; отсюда немедленно вытекает малая теорема Понселе о замыкании (1813 г., [13], рис. 1); геодезический поток на любом кусочно-гладком римановом многообразии вращения (и, в частности, на многообразиях из [1, пример 4.29] и [3]) является гладкой гамильтоновой системой, интегрируемой по Лиувиллю (по крайней мере в области фазового пространства, где «склеенные геодезические» не касаются края $\Gamma = \partial\Omega$).

Недавно А. Т. Фоменко и А. А. Ошемковым была поставлена задача об отыскании и доказательстве широкого класса теорем типа теоремы Понселе о замыкании при помощи теоремы Лиувилля. Если закон преломления ρ сохраняет симплектическую структуру (т. е. $\rho^*(\omega|_{\Gamma^-}) = \omega|_{\Gamma^+}$) и обладает дополнительным первым интегралом, то склеенный геодезический поток является *интегрируемой кусочно-гладкой гамильтоновой системой* $(M_\rho, \omega|_{T^*\Omega}, H_\rho)$

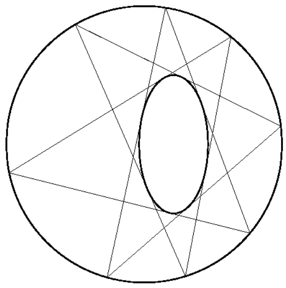

Рис. 1. Теорема Понселе о замыкании

в смысле определения А. Т. Фоменко [4, § 1.2]. Таким образом, склеенные геодезические потоки (введённые и изучаемые в настоящей статье) можно рассматривать как *кусочно-гладкие гамильтоновы системы*, обобщающие рассмотренные А. Т. Фоменко системы на случай произвольных (необязательно интегрируемых) склеенных потоков, отвечающих произвольному (необязательно сохраняющему симплектическую структуру) «склеивающему» диффеоморфизму ρ. Нетрудно убедиться, что если склеенный поток «гамильтоново сглаживаем» (см. выше), то любой локальный первый интеграл, имеющий гладкое ограничение на $T^*\Omega$, будет гладким в смысле гладкой структуры на M_ρ (см. пункт б) теоремы 2.6). Отсюда и из процедуры гамильтонова склеивания [12, гл. I, § 4] следует, что если интегрируемая кусочно-гладкая гамильтонова система в смысле А. Т. Фоменко получена из *гладкой* гамильтоновой системы с *гладкой* границей, фазовые траектории которой нигде не касаются границы, то такая кусочно-гладкая система в действительности является *гладкой* интегрируемой гамильтоновой системой.

Второй результат настоящей работы (предложение 3.2 и пункт а) теоремы 2.6) состоит в том, что для склеенного геодезического потока с $\mathbb{R}^*$-эквивариантным (пункт а) определения 2.3) законом преломления ρ следующие четыре условия равносильны:

(Hug) закон преломления ρ стандартен (т. е. гюйгенсов),

(Symp) закон преломления ρ сохраняет симплектическую структуру,

(Ham) склеенный геодезический поток «гамильтоново сглаживаем»,

(Dyn) склеенный геодезический поток «локально интегрируем по Лиувиллю», т. е. обладает следующим *динамическим свойством*: для некоторого (или любого) максимального инволютивного набора (однородных по импульсам) локальных первых интегралов склеенного геодезического потока «склеенные потоки», отвечающие этим первым интегралам, попарно коммутируют.

Мы также доказываем (см. пункт б) теоремы 2.6) единственность гладкой структуры на M_ρ в условии (Ham), т. е. в пункте а) предложения 1.2 при $V = 0$

(и даже при общей процедуре гамильтонова склеивания [12, гл. I, § 4]). Мы также получаем (в теореме 2.7) похожие условия (Symp′) и (Dyn′), равносильные условию

(Hug′) закон преломления ρ почти стандартен для уровня энергии $E>0$.

Ввиду равносильности (Hug) $\Longleftrightarrow$ (Ham) и (Hug′) $\Longleftrightarrow$ (Symp′) оба утверждения из предложения 1.2 обратимы в случае $V=0$.

Из наших критериев (Hug) $\Longleftrightarrow$ (Dyn) и (Hug′) $\Longleftrightarrow$ (Dyn′) легко получаем критерии того, когда интегрируемый склеенный геодезический поток обладает указанными выше динамическими свойствами.

Следствие 1.3. *Предположим, что закон преломления ρ является $\mathbb{R}^*$-эквивариантным и склеенный геодезический поток (например, обобщённый биллиардный поток) интегрируем в следующем смысле: существует $\hat{\mathbf{q}}$-максимальный (для всех точек $\hat{\mathbf{q}}\in\Gamma$) инволютивный набор $\mathbf{I}=(I_1,\dots,I_n)$ гладких первых интегралов, однородных по импульсам и таких, что $\mathbf{I}\circ\rho=\mathbf{I}|_{\Gamma^+}$ и $I_1=H$ (более подробную версию этого условия см. в условии* (Dyn$_1$) *пункта* а) *теоремы* 2.6). *Тогда*

а) *закон преломления ρ стандартен (т. е. гюйгенсов) тогда и только тогда, когда «склеенные потоки», отвечающие первым интегралам I_i, попарно коммутируют (т. е. на склеенном фазовом пространстве M_ρ существует локальное действие группы $(\mathbb{R}^n,+)$, ограничение которого на $\pi_\rho(T^*\Omega)$ совпадает с действием гамильтоновыми потоками, отвечающими функциям I_i);*

б) *закон преломления ρ почти стандартен (т. е. почти гюйгенсов) для уровня энергии $E=1/2$ тогда и только тогда, когда отображение последования (см.* (13) *и* (34)) *сохраняет (попарно коммутирующие) гамильтоновы векторные поля X_{J_i}, $2\leqslant i\leqslant n$, отвечающие ограничениям J_i первых интегралов I_i на секущую поверхность.* □

Пусть $E>0$ и $N\subseteq\Gamma^+\cap H^{-1}(E)$ — непустое подмножество. Скажем, что два закона преломления ρ и ρ_0 *совпадают в линейном приближении* на множестве N, если для любой точки $(\mathbf{q},\mathbf{p})\in N$ выполнено

$$\rho(\mathbf{q},\mathbf{p})=\rho_0(\mathbf{q},\mathbf{p}),\quad d\big(\rho|_{\Gamma^+\cap H^{-1}(E)}\big)(\mathbf{q},\mathbf{p})=d\big(\rho_0|_{\Gamma^+\cap H^{-1}(E)}\big)(\mathbf{q},\mathbf{p}).\tag{4}$$

Из нашего метода доказательства теорем 2.6 и 2.7 нетрудно также получить следующее уточнение следствия 1.3.

Теорема 1.4. *Предположим, что выполнены условия следствия* 1.3. *Для любого $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ обозначим через $T_{\mathbf{c}}:=\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})$ совместное множество уровня первых интегралов I_i. Фиксируем вектор $\hat{\mathbf{c}}\in\mathbb{R}^n$.*

а′) *Ограничения «склеенных потоков», отвечающих первым интегралам I_i, на «склеенное» совместное множество уровня $\pi_\rho(T_{\hat{\mathbf{c}}})$ попарно коммутируют (см. пункт* а) *следствия* 1.3) *тогда и только тогда, когда закон преломления ρ совпадает в линейном приближении (см.* (4)) *на $\Gamma^+\cap T_{\hat{\mathbf{c}}}$ с некоторым гюйгенсовым законом.*

б$'$) *Ограничение отображения последования* (см. (13) *и* (34)) *на пересечение секущей поверхности со «склеенным» совместным множеством уровня* $\pi_\rho(T_{\hat{\mathbf{c}}})$ *сохраняет* (*попарно коммутирующие*) *гамильтоновы векторные поля* X_{J_i}, $2 \leqslant i \leqslant n$, *отвечающие ограничениям* J_i *первых интегралов* I_i *на секущую поверхность, тогда и только тогда, когда закон преломления* ρ *совпадает в линейном приближении* (см. (4)) *на* $\Gamma^+ \cap T_{\hat{\mathbf{c}}}$ *с некоторым почти гюйгенсовым законом.* $\square$

Третий результат данной статьи состоит в построении (в разделе 7) широкого семейства примеров интегрируемых склеенных геодезических потоков (в частности, обобщённых биллиардных потоков) на двумерных римановых многообразиях с необязательно стандартными законами преломления (предложение 7.1). При этом мы явно (геометрически) задаём соответствующий закон преломления ρ. Мы также исследуем «интегрируемость по Лиувиллю» соответствующего склеенного геодезического потока, точнее его коммутирование со «склеенным потоком», отвечающим дополнительному первому интегралу (предложение 7.2).

Приведём краткий исторический обзор. Ж.-В. Понселе [13] доказал в 1813 г. *теорему о замыкании*: если на плоскости фиксированы два эллипса и существует замкнутая n-звенная ломаная, все вершины которой лежат на одном эллипсе и все звенья которой касаются другого эллипса (см. рис. 1), то любая точка первого эллипса является вершиной аналогичной замкнутой n-звенной ломаной. М. Шаль [10] доказал интегрируемость биллиарда в эллипсе с плоской метрикой (со стандартным — гюйгенсовым законом отражения): все звенья любой биллиардной траектории касаются некоторой квадрики, софокусной с данным эллипсом. С. В. Болотиным [2] (см. также [6]) доказано обратное утверждение: если биллиард в плоской области с кусочно-гладкой границей (со стандартным — гюйгенсовым законом отражения) интегрируем, то граница области состоит из дуг софокусных квадрик. А. Кэли [7] вывел аналитическое условие (используя теорию абелевых интегралов), позволяющее для двух заданных плоских квадрик определить, существует ли n-звенная замкнутая ломаная, вписанная в одну квадрику и описанная вокруг другой. В [9] проведено явное (точное) интегрирование (методом Гамильтона—Якоби) биллиардного потока в эллипсе (со стандартным — гюйгенсовым законом отражения), фактически доказана его интегрируемость по Лиувиллю, получены аналоги этих результатов для эллипсоида любой размерности и из них выведена теорема Понселе в любой размерности, а также её усиление: периметр замкнутой биллиардной ломаной одинаков для всех биллиардных ломаных с данной огибающей (каустикой). В [8] полная теорема Понселе (в любой размерности) доказана с помощью явного интегрирования из [9], приводится также геометрическое доказательство. В [15] фактически доказана интегрируемость по Лиувиллю биллиардного отображения (т. е. отображения последования двумерного сечения Пуанкаре в себя) для биллиарда в эллипсе. (Это слабее, чем интегрируемость по Лиувиллю биллиардного потока.) Из этого результата выведена теорема Понселе. В [12, гл. I, 4.12] предложена общая процедура гамильтонова склеивания, которая позволяет вывести «гамильтонову сглаживаемость» биллиардного потока (со стандартным — гюйгенсовым законом отражения) на любом римановом многообразии с гладким краем [12, гл. I, § 6].

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 даются точные определения и сформулированы основные результаты (теоремы 2.6 и 2.7) о динамической характеризации стандартного (т. е. гюйгенсова) и почти стандартных (т. е. почти гюйгенсовых) законов преломления. В разделе 3 получена симплектическая характеризация этих законов преломления (предложения 3.1 и 3.2). В разделе 4 сформулированы и доказаны леммы 4.1 и 4.2 о гамильтоновых и динамических свойствах первых интегралов геодезических потоков. Эти леммы использованы в разделах 5 и 6 в доказательстве основных теорем 2.6 и 2.7. В разделе 7 описан широкий класс примеров интегрируемых склеенных геодезических потоков (предложение 7.1) и исследованы их динамические свойства (предложение 7.2).

Отметим, что все рассматриваемые в настоящей работе пересечения фазовых траекторий с «гиперповерхностью раздела» являются трансверсальными (т. е. в случае обобщённого биллиарда все столкновения «регулярны») и гиперповерхность раздела не имеет «углов» (является гладкой). Случаи касания некоторых фазовых траекторий с «гиперповерхностью раздела» и наличие «углов» у гиперповерхности раздела частично изучены (см. работу [14] и ссылки в ней). Топология слоений Лиувилля для широкого класса интегрируемых биллиардов (и их обобщений) в таких локально плоских областях (включая области, край которых имеет углы или «строго вогнутые» гладкие участки) изучена в [4, 5].

Отметим, что склеенные геодезические потоки (в частности, обобщённые биллиардные потоки), рассматриваемые в настоящей работе, не обязательно являются потоками в обычном понимании, т. е. являются лишь локальными потоками, которые вообще говоря неполны. В некоторых случаях биллиардный поток полон [11, теорема 3, пример].

Было бы интересно обобщить результаты настоящей работы на «склеенные натуральные механические системы» (см. пункт г) примера 1.1 и предложение 1.2).

Автор выражает благодарность К. Н. Алёшкину, С. Ю. Немировскому, С. С. Николаенко, В. В. Фокичевой и А. Т. Фоменко за ценные комментарии и указание уместных ссылок, А. А. Ошемкову и П. Звенгровски за ценные комментарии к первоначальной версии статьи, способствовавшие улучшению изложения.

2. Формулировка основных результатов

Напомним, что кокасательное расслоение T^*Q гладкого многообразия Q состоит из пар $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, таких что $\mathbf{q} \in Q$, $\mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}Q$. Если $\mathbf{q} = (q^1, \ldots, q^n)$ — локальные координаты на Q, то им соответствуют локальные координаты $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ на T^*Q. На $2n$-мерном многообразии T^*Q имеются канонические 1-форма

$$\alpha := \mathbf{p}\,d\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} p_i\,dq^i$$

(форма Лиувилля) и 2-форма

$$\omega = d\alpha = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i \tag{5}$$

(каноническая симплектическая структура). Рассмотрим действие однопараметрической группы $\mathbb{R}^* := (\mathbb{R}_{>0}, \times)$ на фазовом пространстве T^*Q преобразованиями

$$\varphi_\lambda\colon (\mathbf{q},\mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}), \quad \lambda > 0. \tag{6}$$

Обозначение 2.1.

а) Для любой гладкой функции $f \in C^\infty(T^*Q)$ обозначим через X_f векторное поле, для которого $df = \omega(\cdot, X_f)$; оно называется *гамильтоновым* векторным полем с *функцией Гамильтона* f. Для любой пары гладких функций $f, g \in C^\infty(T^*Q)$ *скобкой Пуассона* этой пары называется гладкая функция $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$. Аналогичным образом для любой 1-формы η на T^*Q обозначим через X_η такое векторное поле, что $\eta = \omega(\cdot, X_\eta)$. Например, для любой точной 1-формы $\eta = df$ получаем гамильтоново векторное поле $X_{df} = X_f$, а для формы Лиувилля α — векторное поле

$$X_\alpha = -\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} := -\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial p_i} = -\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} \varphi_\lambda,$$

т. е. генератор группы преобразований (6).

б) Предположим, что $U \subset T^*Q$ — открытое подмножество, инвариантное относительно преобразований (6). Пусть H — гладкая функция в U, однородная по импульсам степени $s \in \mathbb{R}$, т. е. $H(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = \lambda^s H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ для любых точки $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Так как любое преобразование вида (6) сохраняет 2-форму ω и функцию $H|_U$ с точностью до пропорциональности, оно переводит дуги фазовых траекторий на U в дуги фазовых траекторий.

Рассмотрим на симплектическом многообразии $(T^*Q,\, \omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q})$ гамильтоново векторное поле X_H с функцией Гамильтона

$$H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\mathbf{q}) p_i p_j, \tag{7}$$

где через $g^{ij}(\mathbf{q})$ обозначена матрица, обратная матрице $g_{ij}(\mathbf{q})$ метрического тензора в точке $\mathbf{q} \in Q$. Динамическая система $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) = X_H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ на T^*Q называется *геодезическим потоком*, отвечающим данной римановой метрике. В указанных локальных координатах эта система имеет вид уравнений Гамильтона

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial q^i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначение 2.2. Обозначим через $\tilde{\Gamma}^+ \subset T^*Q|_\Gamma$ ($\tilde{\Gamma}^- \subset T^*Q|_\Gamma$) множество всех пар $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*Q$, таких что выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\mathbf{q} \in \Gamma$ и касательный вектор $\pi_*(X_H(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \in T_\mathbf{q}Q$ трансверсален к Γ и направлен наружу (соответственно внутрь) области Ω;
2) $\mathbf{q} \in \Gamma$ и касательный вектор $X_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T_{(\mathbf{q},\mathbf{p})}(T^*Q)$ трансверсален к $T^*Q|_\Gamma$ и направлен наружу (соответственно внутрь) области $T^*\Omega \subset T^*Q$;
3) скобка Пуассона $\{H, \pi^*F\} = \omega(X_H, X_{\pi^*F})$ положительна (соответственно отрицательна) в точке $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, где F — гладкая функция на Q, такая что $\Omega = F^{-1}(-\infty, 0)$, $\Gamma = F^{-1}(0)$ и $dF(\mathbf{q}) \neq 0$ для любой точки $\mathbf{q} \in \Gamma$. Другими словами, для любой точки из $\tilde{\Gamma}^\varepsilon$ изоэнергетическая поверхность, содержащая эту точку, трансверсальна полю ядер формы $\omega|_{TQ|_\Gamma}$, причём коориентация изоэнергетической поверхности, заданная ростом H, и ориентация поля ядер, задаваемая полем $-X_{\pi^*F}$, согласованны при $\varepsilon = +$ и противоположны при $\varepsilon = -$.

Определение 2.3. Пусть $\Gamma^\pm \subset \tilde{\Gamma}^\pm$ — открытые подмножества, такие что $\pi(\Gamma^+) = \pi(\Gamma^-) = \Gamma$.

а) Диффеоморфизм
$$\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$$
назовём *законом преломления* для риманова многообразия $(\bar{\Omega}, g)$ с краем $\Gamma = \partial\Omega$ и диффеоморфизма $\hat{\rho}\colon \Gamma \to \Gamma$ края, если
$$\pi \circ \rho = \hat{\rho} \circ \pi, \quad H \circ \rho = H|_{\Gamma^+}.$$
Закон преломления ρ назовём $\mathbb{R}^*$-*эквивариантным*, если $\Gamma^\pm$ инвариантны относительно всех преобразований (6) и $\rho \circ \varphi_\lambda|_{\Gamma^+} = \varphi_\lambda \circ \rho$ для любого $\lambda > 0$ (т. е. ρ коммутирует с ограничениями этих преобразований на Γ^+ и Γ^-).

б) Рассмотрим гладкое многообразие
$$M := (T^*\Omega) \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^- \subset T^*\bar{\Omega}$$
с краем $\partial M = \Gamma^+ \sqcup \Gamma^-$. Пусть топологическое многообразие
$$M_\rho := M/\sim$$
получено из многообразия M с краем отождествлением края по диффеоморфизму ρ. Рассмотрим функцию H_ρ на M_ρ, такую что $H_\rho \circ \pi_\rho = H|_M$, где $\pi_\rho\colon M \to M_\rho$ — естественная проекция. Многообразие M_ρ назовём *склеенным фазовым пространством*, а H_ρ — *склеенной функцией Гамильтона*. Геодезический поток на M индуцирует *склеенный геодезический поток* на M_ρ (отвечающий движению вдоль «склеенных геодезических»). Ясно, что функция H_ρ является первым интегралом склеенного геодезического потока.

Определение 2.4. Пусть диффеоморфизм $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ является законом преломления для риманова многообразия $(\bar\Omega, g)$ с краем Γ и диффеоморфизма $\hat\rho\colon \Gamma \to \Gamma$ края.

а) Закон преломления ρ назовём *стандартным* или *гюйгенсовым*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий (8) и (9):

$$\rho^*(\alpha|_{\Gamma^-}) = \alpha|_{\Gamma^+}, \tag{8}$$

т. е. ρ сохраняет 1-форму Лиувилля $\alpha = \mathbf{p}\,d\mathbf{q}$;

$$\bigl\langle \mathbf{v}, \pi_*\bigl(X_H(\mathbf{q},\mathbf{p})\bigr)\bigr\rangle = \Bigl\langle \hat\rho_*(\mathbf{v}), \pi_*\Bigl(X_H\bigl(\rho(\mathbf{q},\mathbf{p})\bigr)\Bigr)\Bigr\rangle \quad \text{для всех } (\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \Gamma^+, \ \ \mathbf{v} \in T_{\mathbf{q}}\Gamma, \tag{9}$$

где через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение касательных векторов в смысле данной римановой метрики на Q.

б) Закон преломления ρ назовём *почти стандартным* или *почти гюйгенсовым* для уровня энергии $E > 0$, если любая точка $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in \Gamma^+ \cap H^{-1}(E)$ обладает окрестностью U в T^*Q, такой что выполнено одно из следующих эквивалентных условий (10) и (11):

$$\rho^*\bigl(\alpha|_{\rho(U)\cap\Gamma^-\cap H^{-1}(E)}\bigr) = \bigl(\alpha + d(G_E\circ\pi)\bigr)\big|_{U\cap\Gamma^+\cap H^{-1}(E)}, \tag{10}$$

$$\bigl\langle \mathbf{v}, \pi_*\bigl(X_H(\mathbf{q},\mathbf{p})\bigr) + \operatorname{grad} G_E(\mathbf{q})\bigr\rangle = \Bigl\langle \hat\rho_*(\mathbf{v}), \pi_*\Bigl(X_H\bigl(\rho(\mathbf{q},\mathbf{p})\bigr)\Bigr)\Bigr\rangle \tag{11}$$

для любых точки $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in U\cap\Gamma^+\cap H^{-1}(E)$ и касательного вектора $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{q}}\Gamma$, где $G_E = G_E(\mathbf{q})$ — некоторая гладкая функция в окрестности $\pi(U)\cap\Gamma$ точки $\hat{\mathbf{q}}$ в Γ. Функцию G_E назовём (локальной) *производящей функцией* закона преломления ρ на множестве уровня энергии E. В действительности $G_E\circ\pi|_{U\cap\Gamma^+\cap H^{-1}(E)}$ есть производящая функция симплектоморфизма $\rho|_{U\cap\Gamma^+\cap H^{-1}(E)}$.

Определение 2.5. Пусть U — окрестность точки $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in T^*Q$ в T^*Q.

А) Набор $\mathbf{I} = (I_1, \ldots, I_n)$ гладких функций в области U назовём *инволютивным*, если $\{I_i, I_j\} = 0$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$ (т. е. функции попарно находятся в инволюции). Набор назовём *максимальным* ($\hat{\mathbf{q}}$-*максимальным*), если n-форма $dI_1 \wedge \ldots \wedge dI_n$ не имеет нулей в U (соответственно n-форма $dI_1\wedge\ldots\wedge dI_n|_{U\cap(T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)}$ не имеет нулей в $U\cap(T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)$). Значит, любое совместное множество уровня вида $\mathbf{I}^{-1}\bigl(\mathbf{I}(\mathbf{q},\mathbf{p})\bigr)$, где $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in U$, является неособым n-мерным подмногообразием в T^*Q (соответственно любое множество уровня $\mathbf{I}^{-1}\bigl(\mathbf{I}(\hat{\mathbf{q}},\mathbf{p})\bigr)$, где $(\hat{\mathbf{q}},\mathbf{p}) \in U$, в некоторой окрестности множества $U\cap(T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)\cap\mathbf{I}^{-1}\bigl(\mathbf{I}(\hat{\mathbf{q}},\mathbf{p})\bigr)$ является неособым n-мерным подмногообразием, трансверсальным лагранжевому подмногообразию $T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q$).

Б) Пусть $\omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ — каноническая симплектическая 2-форма на T^*Q (см. (5)). Локальные координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ в U называются *каноническими*, если

$$\omega = d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y} := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Канонические координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в U назовём $\hat{\mathbf{q}}$-*каноническими*, если $\mathbf{x}(\hat{\mathbf{q}}, \cdot) = 0$ и n-форма $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n|_{(T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q) \cap U}$ не имеет нулей.

Теорема 2.6. *Пусть заданы риманово многообразие (Q, g), область $\Omega \subset Q$, такая что $\bar{\Omega}$ — многообразие с гладким краем $\Gamma = \partial\Omega \subset Q$, и диффеоморфизм $\hat{\rho}\colon \Gamma \to \Gamma$. Пусть $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ — $\mathbb{R}^*$-эквивариантный закон преломления для риманова многообразия $(\bar{\Omega}, g)$ с краем Γ и диффеоморфизма $\hat{\rho}$ края. Тогда*

а) *следующие пять условий* (Hug), (Ham), (Ham′), (Dyn) *и* (Coord) (*т. е. условия типа принципа Гюйгенса и гамильтонова склеивания* [12, гл. I, § 4], *динамическое и координатное условия*) *равносильны*:

(Hug) *закон преломления $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ является стандартным* (*т. е. гюйгенсовым*) *для риманова многообразия $(\bar{\Omega}, g)$ с краем и диффеоморфизма $\hat{\rho}$ края*;

(Ham) *существуют гладкая структура и симплектическая структура ω_ρ на склеенном фазовом пространстве M_ρ, такие что проекция $\pi_\rho\colon M \to M_\rho$ и склеенная функция Гамильтона $H_\rho\colon M_\rho \to \mathbb{R}$ являются гладкими и $\pi_\rho^*\omega_\rho = \omega|_M$* (см. [12, гл. I, § 4]);

(Dyn) *любая точка $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in \Gamma^+$ и её образ $\rho(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in \Gamma^-$ имеют непересекающиеся окрестности U^+ и U^- в T^*Q со следующими свойствами*:

(Dyn$_1$) *$\rho(U^+ \cap \Gamma^+) = U^- \cap \Gamma^-$, окрестности U^ε инвариантны относительно всех преобразований* (6) *и существуют $\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon$-максимальные инволютивные наборы $\mathbf{I}^\varepsilon = (I_1^\varepsilon, \ldots, I_n^\varepsilon)$ гладких функций в U^ε, $\varepsilon \in \{+, -\}$, такие что*

$$\mathbf{I}^- \circ \rho|_{U^+ \cap \Gamma^+} = \mathbf{I}^+|_{U^+ \cap \Gamma^+}, \quad I_1^\varepsilon = H|_{U^\varepsilon}, \quad I_i^\varepsilon(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = I_i^\varepsilon(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

для любых $i = 2, \ldots, n$, $\lambda > 0$, $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U^\varepsilon$ и $\varepsilon \in \{+, -\}$;

(Dyn$_2$) *на «склеенной» окрестности $U_\rho := \pi_\rho(M \cap (U^+ \cup U^-))$ точки $\pi_\rho(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})$ в M_ρ существует локально свободное локальное действие группы $(\mathbb{R}^n, +)$, ограничение которого на $U_\rho \backslash \pi_\rho(\Gamma^+) \subset T^*\Omega$ совпадает с действием потоками векторных полей $X_{I_1^\pm}, \ldots, X_{I_n^\pm}$, причём любое совместное множество уровня «склеенного» набора функций $\mathbf{I}_\rho$ на U_ρ, определяемого условиями $\mathbf{I}_\rho \circ \pi_\rho|_{U^\varepsilon \cap \Gamma^\varepsilon} = \mathbf{I}^\varepsilon|_{U^\varepsilon \cap \Gamma^\varepsilon}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, инвариантно относительно этого действия. Здесь обозначено $\hat{\mathbf{q}}_+ := \hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{q}}_- := \hat{\rho}(\hat{\mathbf{q}})$*;

(Ham′) *существуют окрестности U^ε гиперповерхностей Γ^ε в T^*Q, $\varepsilon \in \{+, -\}$, и симплектоморфизм $\tilde{\rho}\colon (U^+, \omega) \to (U^-, \omega)$, такие что $\tilde{\rho}|_{\Gamma^+} = \rho$ и $H \circ \tilde{\rho} = H|_{U^+}$*;

(Coord) *любая точка* $(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})\in\Gamma^+$ *и её образ* $\rho(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})\in\Gamma^-$ *обладают окрестностями* U^+ *и* U^- *в* T^*Q, *инвариантными относительно всех преобразований* (6) *и такими, что существуют* $\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon$*-канонические координаты* $(\mathbf{x}^\varepsilon,\mathbf{y}^\varepsilon)=(x_1^\varepsilon,\dots,x_n^\varepsilon,y_1^\varepsilon,\dots,y_n^\varepsilon)$ *в* U^ε, $\varepsilon\in\{+,-\}$, *со свойствами*

$$(\mathbf{x}^-,\mathbf{y}^-)\circ\rho|_{U^+\cap\Gamma^+}=(\mathbf{x}^+,\mathbf{y}^+)|_{U^+\cap\Gamma^+},$$
$$y_1^\varepsilon=H|_{U^\varepsilon},\quad y_i^\varepsilon(\mathbf{q},\lambda\mathbf{p})=y_i^\varepsilon(\mathbf{q},\mathbf{p})$$

для любых $i=2,\dots,n$, $\lambda>0$, $(\mathbf{q},\mathbf{p})\in U^\varepsilon$ *и* $\varepsilon\in\{+,-\}$. *Здесь обозначено* $\hat{\mathbf{q}}_+:=\hat{\mathbf{q}}$ *и* $\hat{\mathbf{q}}_-:=\hat{\rho}(\hat{\mathbf{q}})$;

б) *предположим, что выполнено условие* (Ham). *Тогда существует гладкая* 1*-форма* α_ρ *на* M_ρ, *такая что* $\omega_\rho=d\alpha_\rho$ *и* $\pi_\rho^*\alpha_\rho=\alpha|_M$. *Любая непрерывная функция, заданная на некотором открытом подмножестве* $U\subset M_\rho$, *ограничение которой на* $U\setminus\big(\pi_\rho(\Gamma^+)\big)$ *является гладкой фунцией и находится в инволюции с* H, *является гладкой на* U. *Гладкая структура и симплектическая структура* ω_ρ *на* M_ρ, *удовлетворяющие условию* (Ham), *единственны.*

Для каждого $\varepsilon\in\{+,-\}$ рассмотрим на $(2n-1)$-мерной изоэнергетической поверхности $H^{-1}(1/2)$ гиперповерхность

$$\sigma^\varepsilon:=\Gamma^\varepsilon\cap H^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),\quad \varepsilon\in\{+,-\},$$

Эта гиперповерхность (ввиду определения Γ^ε) трансверсальна фазовым траекториям геодезического потока на $H^{-1}(1/2)$, т. е. является «секущей поверхностью» (или «сечением Пункаре»). Поэтому существует окрестность U^ε гиперповерхности Γ^ε в T^*Q, состоящая из дуг фазовых траекторий вида

$$\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\colon\big(-2T(\mathbf{q},\mathbf{p}),2T(\mathbf{q},\mathbf{p})\big)\to T^*Q,\quad (\mathbf{q},\mathbf{p})\in\Gamma^\varepsilon,\tag{12}$$

таких что $\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(0)=(\mathbf{q},\mathbf{p})$, где $T\colon\Gamma^+\cup\Gamma^-\to\mathbb{R}$ — некоторая непрерывная положительная функция. «Сдвинем» секущую поверхность $\sigma^\varepsilon\subset\Gamma^+\subset\partial M$ вовнутрь M вдоль геодезического потока. Более точно, определим «сдвинутую секущую гиперповерхность» $\tilde{\sigma}^\varepsilon$ формулой

$$\tilde{\sigma}^\varepsilon:=\big\{\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\big(-\varepsilon T(\mathbf{q},\mathbf{p})\big)\bigm|(\mathbf{q},\mathbf{p})\in\sigma^\varepsilon\big\},\quad \varepsilon\in\{+,-\}.$$

Имеем $\tilde{\sigma}^\varepsilon\subset U^\varepsilon\cap H^{-1}(1/2)\cap M$ и диффеоморфизм (даже симплектоморфизм)

$$S_\varepsilon\colon\sigma^\varepsilon\to\tilde{\sigma}^\varepsilon,\quad S_\varepsilon(\mathbf{q},\mathbf{p}):=\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\big(-\varepsilon T(\mathbf{q},\mathbf{p})\big),\quad (\mathbf{q},\mathbf{p})\in\sigma^\varepsilon.$$

Сквозной диффеоморфизм

$$P:=S_-\circ\rho\circ S_+^{-1}\colon\tilde{\sigma}^+\to\tilde{\sigma}^-\tag{13}$$

назовём *локальным отображением последования* (или *локальным отображением Пуанкаре*) для склеенного геодезического потока на множестве уровня энергии $H_\rho^{-1}(1/2)\subset M_\rho$ (см. также (34)).

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6. *Тогда следующие условия* (Hug′), (Symp′), (Dyn′) (*т. е. условие типа принципа Гюйгенса, симплектическое и динамическое условия*) *равносильны*:

(Hug′) *закон преломления* $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ *является почти стандартным* (*т. е. почти гюйгенсовым*) *для уровня энергии* $E = 1/2$, *риманова многообразия* $(\bar\Omega, g)$ *с краем и диффеоморфизма* $\hat\rho$ *края*;

(Symp′) *локальное отображение последования* $P\colon \tilde\sigma^+ \to \tilde\sigma^-$ *из* (13) *является симплектоморфизмом, т. е.* $P^*(\omega|_{\tilde\sigma^-}) = \omega|_{\tilde\sigma^+}$;

(Dyn′) *любая точка* $(\tilde{\mathbf q}, \tilde{\mathbf p}) =\colon (\tilde{\mathbf q}_+, \tilde{\mathbf p}^+) \in \tilde\sigma^+$ *и её образ* $P(\tilde{\mathbf q}, \tilde{\mathbf p}) =\colon (\tilde{\mathbf q}_-, \tilde{\mathbf p}^-) \in \tilde\sigma^-$ *имеют окрестности* $\hat U^\pm$ *в* $\tilde\sigma^\pm$ *со свойством* $P(\hat U^+) = \hat U^-$, *и существуют инволютивные наборы* $\mathbf J^\varepsilon = (J_2^\varepsilon, \ldots, J_n^\varepsilon)$ *гладких функций в* $\hat U^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, *такие что*
$$\mathbf J^- \circ P|_{\hat U^+} = \mathbf J^+|_{\hat U^+}, \quad P_*(X_{J_i^+}) = X_{J_i^-}, \quad i = 2, \ldots, n,$$
и $(n-1)$-*форма* $dJ_2^\varepsilon \wedge \ldots \wedge dJ_n^\varepsilon|_{\hat U^\varepsilon \cap (T^*_{\tilde{\mathbf q}_\varepsilon} Q)}$ *отлична от* 0 *в точке* $(\tilde{\mathbf q}_\varepsilon, \tilde{\mathbf p}^\varepsilon)$, $\varepsilon \in \{+,-\}$.

3. Симплектическая характеризация гюйгенсова и почти гюйгенсовых законов преломления

Пусть в некоторой окрестности $U_{\hat{\mathbf q}}$ точки $\hat{\mathbf q} \in \Gamma$ в Q выбраны локальные координаты $(q_+^1, \ldots, q_+^n)$, такие что множество $U_{\hat{\mathbf q}} \cap \bar\Omega$ задаётся неравенством $q_+^1 \leqslant 0$. Пусть $\mathbf p^+ = (p_1^+, \ldots, p_n^+)$ — сопряжённые им импульсы. Выберем аналогичные локальные координаты $(q_-^1, \ldots, q_-^n)$ в окрестности $U_{\hat\rho(\hat{\mathbf q})}$ точки $\hat\rho(\hat{\mathbf q})$, такие что множество $U_{\hat\rho(\hat{\mathbf q})} \cap \bar\Omega$ задаётся неравенством $q_-^1 \leqslant 0$ и $q_-^i \circ \hat\rho|_{\Gamma\cap U_{\hat{\mathbf q}}} = q_+^i|_{\Gamma \cap U_{\hat{\mathbf q}}}$ для любого $i \in \{2, \ldots, n\}$. Пусть $\mathbf p^- = (p_1^-, \ldots, p_n^-)$ — сопряжённые им импульсы.

Предложение 3.1. *Пусть диффеоморфизм* $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ *является законом преломления для риманова многообразия* $(\bar\Omega, g)$ *с краем* Γ *и диффеоморфизма* $\hat\rho\colon \Gamma \to \Gamma$ *края, и пусть* $E > 0$. *Тогда следующие условия равносильны*:

а) *закон преломления* ρ *почти стандартен* (*т. е. почти гюйгенсов*) *для уровня энергии* E;

б) $\rho^*(\omega|_{\Gamma^-\cap H^{-1}(E)}) = \omega|_{\Gamma^+\cap H^{-1}(E)}$;

в) *для любой точки* $\hat{\mathbf q} \in \Gamma \cap H^{-1}(E)$ *в указанных выше локальных координатах в* $U_{\hat{\mathbf q}}$ *и* $U_{\hat\rho(\hat{\mathbf q})}$ *выполнено следующее*: *координаты любой фазовой точки* $(\mathbf q, \mathbf p) = (\mathbf q_+, \mathbf p^+) \in \Gamma^+ \cap (T^*U_{\hat{\mathbf q}}) \cap H^{-1}(E)$ *и её образа* $\rho(\mathbf q, \mathbf p) = (\mathbf q_-, \mathbf p^-) \in \Gamma^- \cap \big(T^*U_{\hat\rho(\hat{\mathbf q})}\big) \cap H^{-1}(E)$ *связаны соотношениями* $q_1^- = q_1^+ = 0$, $H(\mathbf q_-, \mathbf p^-) = H(\mathbf q_+, \mathbf p^+) = E$ *и*

$$(q_-^2,\dots,q_-^n,p_2^-,\dots,p_n^-) = \\ = \left(q_+^2,\dots,q_+^n,p_2^+ + \frac{\partial G_E(\mathbf{q}_+)}{\partial q_+^2},\dots,p_n^+ + \frac{\partial G_E(\mathbf{q}_+)}{\partial q_+^n}\right)$$

для некоторой гладкой функции G_E *на* $U_{\hat{\mathbf{q}}} \cap \Gamma$.

Доказательство. Обозначим $\sigma_E^\varepsilon := \Gamma^\varepsilon \cap H^{-1}(E)$ при $\varepsilon \in \{+,-\}$, $\hat{\mathbf{q}}_+ := \hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{q}}_- := \hat{\rho}(\hat{\mathbf{q}})$.

Докажем импликацию а) $\Longrightarrow$ г). По пункту а) определения 2.3 закона преломления имеем $H(\mathbf{q}_+,\mathbf{p}^+) = H(\mathbf{q}_-,\mathbf{p}^-) = E$. В данных локальных координатах имеем $\Gamma^\varepsilon \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}) = \{q_\varepsilon^1 = 0\}$, поэтому

$$\alpha|_{\Gamma^\varepsilon\cap(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})} = \sum_{i=2}^n p_i^\varepsilon\, dq_\varepsilon^i|_{\Gamma^\varepsilon\cap(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})}, \quad \varepsilon \in \{+,-\}.$$

По построению локальных координат $q_-^1 = q_+^1 = 0$ и $q_-^i = q_+^i$ для любого $i \in \{2,\dots,n\}$. Отсюда ввиду почти стандартности закона преломления ρ с производящей функцией G_E для уровня энергии E (пункт б) определения 2.4) получаем требуемое соотношение

$$(p_2^-,\dots,p_n^-) = (p_2^+,\dots,p_n^+) + \left(\frac{\partial G_E(\mathbf{q}_+)}{\partial q_+^2},\dots,\frac{\partial G_E(\mathbf{q}_+)}{\partial q_+^n}\right).$$

Докажем импликацию г) $\Longrightarrow$ в). В данных локальных координатах имеем

$$\sigma_E^\varepsilon \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}) \subset \Gamma^\varepsilon \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}) = \{q_\varepsilon^1 = 0\},$$

поэтому

$$\omega|_{\sigma_E^\varepsilon\cap(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})} = \sum_{i=2}^n dp_i^\varepsilon \wedge dq_\varepsilon^i|_{\sigma_E^\varepsilon\cap(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})}, \quad \varepsilon \in \{+,-\},$$

значит,

$$\rho^*(\omega|_{\sigma_E^-\cap(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})}) = \big(\omega + dd(G_E\circ\pi)\big)\big|_{\sigma_E^+\cap(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})} = \omega|_{\sigma_E^+\cap(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})}.$$

Докажем импликацию в) $\Longrightarrow$ а). Так как фазовые траектории геодезического потока в $T^*\bar{\Omega}$ выходят из $T^*\bar{\Omega}$ (входят в $T^*\bar{\Omega}$) через его граничную гиперповерхность $\tilde{\Gamma}^+$ (соответственно через $\tilde{\Gamma}^-$), трансверсально её пересекая (см. обозначение 2.2), то в данных локальных координатах

$$\varepsilon\,\frac{\partial H}{\partial p_1^\varepsilon}\bigg|_{(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})\cap\tilde{\Gamma}^\varepsilon} = \varepsilon \dot{q}_\varepsilon^1|_{(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})\cap\tilde{\Gamma}^\varepsilon} > 0, \quad \varepsilon \in \{+,-\}. \tag{14}$$

Отсюда и из теоремы о неявных функциях следует, что

$$(q_\varepsilon^2,\dots,q_\varepsilon^n,p_2^\varepsilon,\dots,p_n^\varepsilon) =: (x_\varepsilon^2,\dots,x_\varepsilon^n,y_2^\varepsilon,\dots,y_n^\varepsilon) = (\mathbf{x}_\varepsilon,\mathbf{y}^\varepsilon)$$

являются координатами на $\sigma_E^\varepsilon \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})$. В этих координатах по построению координат $(\mathbf{q}_\varepsilon,\mathbf{p}^\varepsilon)$ закон преломления

$$\rho|_{\sigma_E^+\cap(T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_+})}\colon \sigma_E^+ \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_+}) \to \sigma_E^- \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_-})$$

имеет вид $\rho(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}^+) = (\mathbf{x}_+, \mathbf{y}^+ + B) = (\mathbf{x}_-, \mathbf{y}^-)$ для некоторой $\mathbb{R}^{n-1}$-значной функции $B = B(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}^+)$ на $\sigma_E^+ \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_+})$. Так как в этих координатах

$$\alpha|_{\sigma_E^\varepsilon \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})} = \sum_{i=2}^n y_i^\varepsilon dx_\varepsilon^i,$$

то

$$\rho^*\bigl(\alpha|_{\sigma_E^- \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_-})}\bigr) - \alpha|_{\sigma_E^+ \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_+})} = \sum_{i=2}^n B_i(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}^+)\, dx_+^i =: \tilde{\beta}.$$

Так как $\rho|_{\sigma_E^+} \colon \sigma_E^+ \to \sigma_E^-$ — симплектоморфизм, то

$$d\bigl(\rho^*\bigl(\alpha|_{\sigma_E^-}\bigr) - \alpha|_{\sigma_E^+}\bigr) = \rho^*\bigl(\omega|_{\sigma_E^-}\bigr) - \omega|_{\sigma_E^+} = 0,$$

поэтому $d\tilde{\beta} = 0$. Отсюда получаем, что $\partial B_i(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}^+)/\partial y_j^+ = 0$, $j = 2, \ldots, n$, поэтому функции $B_i = B_i(\mathbf{x}_+, \mathbf{y}^+)$ не зависят от импульсов $\mathbf{y}^+$, т. е. имеют вид $B_i = B_i(\mathbf{x}_+)$. Значит, 1-форма $\tilde{\beta}$ поднимается с базы, т. е. имеет вид $\tilde{\beta} = \pi^*\beta$ для 1-формы

$$\beta := \sum_{i=2}^n B_i(\mathbf{x}_+) dx_+^i$$

на $\Gamma \cap U_{\hat{\mathbf{q}}_+}$, причём $d\beta = 0$. По лемме Пуанкаре $\beta = dG_E$ для некоторой гладкой функции G_E на $\Gamma \cap U_{\hat{\mathbf{q}}_+}$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть диффеоморфизм $\rho \colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ является законом преломления для риманова многообразия $(\bar{\Omega}, g)$ с краем Γ и диффеоморфизма $\hat{\rho} \colon \Gamma \to \Gamma$ края. Тогда следующие условия равносильны:*

а) *закон преломления ρ является стандартным (т. е. гюйгенсовым);*

б) *закон преломления ρ является $\mathbb{R}^*$-эквивариантным и $\rho^*\bigl(\alpha|_{\Gamma^- \cap H^{-1}(1/2)}\bigr) = \alpha|_{\Gamma^+ \cap H^{-1}(1/2)}$;*

в) *закон преломления ρ является $\mathbb{R}^*$-эквивариантным и $\rho^*(\omega|_{\Gamma^-}) = \omega|_{\Gamma^+}$;*

г) *для любой точки $\hat{\mathbf{q}} \in \Gamma$ в указанных выше локальных координатах в $U_{\hat{\mathbf{q}}}$ и $U_{\hat{\rho}(\hat{\mathbf{q}})}$ выполнено следующее: координаты любой фазовой точки $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}_+, \mathbf{p}^+) \in \Gamma^+ \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}})$ и её образа $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}_-, \mathbf{p}^-) \in \Gamma^- \cap \bigl(T^*U_{\hat{\rho}(\hat{\mathbf{q}})}\bigr)$ связаны соотношениями $q_1^- = q_1^+ = 0$, $q_-^i = q_+^i$ и $p_i^- = p_i^+$ при $2 \leqslant i \leqslant n$ и $H(\mathbf{q}_-, \mathbf{p}^-) = H(\mathbf{q}_+, \mathbf{p}^+)$.*

Доказательство. Обозначим $\hat{\mathbf{q}}_+ := \hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{q}}_- := \hat{\rho}(\hat{\mathbf{q}})$.

Импликация б) $\Longrightarrow$ а) справедлива, поскольку закон преломления ρ является $\mathbb{R}^*$-эквивариантным (т. е. его вторая компонента однородна по импульсам со степенью однородности 1), а генератор X_α группы преобразований (6) трансверсален $H^{-1}(1/2)$ и принадлежит ядру 1-формы α (так как $\alpha(X_\alpha) = \omega(X_\alpha, X_\alpha) = 0$).

Доказательство импликации а) $\Longrightarrow$ г) аналогично доказательству импликации а) $\Longrightarrow$ г) предложения 3.1 при $G_E = 0$ и любом $E > 0$.

Справедливость импликации г) $\Longrightarrow$ в) следует из того, что в данных локальных координатах $\Gamma^\varepsilon \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}) = \{q_\varepsilon^1 = 0\}$, поэтому

$$\omega|_{\Gamma^\varepsilon \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})} = \sum_{i=2}^n dp_i^\varepsilon \wedge dq_\varepsilon^i|_{\Gamma^\varepsilon \cap (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon})}, \quad \varepsilon \in \{+,-\}.$$

Докажем импликацию в) $\Longrightarrow$ б). Для любого $E > 0$ имеем

$$\rho^*\big(\omega|_{\Gamma^- \cap H^{-1}(E)}\big) = \omega|_{\Gamma^+ \cap H^{-1}(E)},$$

т. е. выполнено условие в) из предложения 3.1. Поэтому в силу предложения 3.1 выполнено его условие а), т. е. закон преломления ρ почти стандартен для любого уровня энергии $E > 0$. Ввиду $\mathbb{R}^*$-эквивариантности закона ρ имеем $dG_E = \sqrt{E}\, dG_1$, и поэтому

$$\rho^*\big(\alpha|_{\rho(U)\cap\Gamma^-}\big) = \big(\alpha + \sqrt{H} d(G_1 \circ \pi)\big)\big|_{U\cap\Gamma^+}. \tag{15}$$

Здесь мы использовали, что ограничения 1-форм в обеих частях равенства (15) на $U\cap\Gamma^+\cap H^{-1}(1)$ равны, а векторное поле X_α принадлежит ядрам этих 1-форм. Покажем, что функция $G_1 = G_1(\mathbf{q})$ на $\pi(U)\cap\Gamma$ есть константа. Действительно, применяя дифференциал к обеим частям равенства (15), ввиду условия в) получаем

$$0 = \rho^*\big(\omega|_{\rho(U)\cap\Gamma^-}\big) - \omega|_{U\cap\Gamma^+} = d\sqrt{H} \wedge d(G_1\circ\pi)|_{U\cap\Gamma^+},$$

поэтому $dH \wedge d(G_1\circ\pi)|_{U\cap\Gamma^+} = 0$, т. е. ковекторы $dH(\mathbf{q},\mathbf{p})|_{\Gamma^+}$ и $dG_1(\mathbf{q})$ пропорциональны в любой точке $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in U\cap\Gamma^+$ (с коэффициентом пропорциональности, зависящим от точки). Значит, либо $dG_1(\mathbf{q}) = 0$, либо $\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p})/\partial\mathbf{p} = 0$. Но последнее невозможно ввиду (14). Поэтому $dG_1 = 0$, а значит, соотношение (15) принимает вид (8). □

Следствие 3.3.

а) *Для любых риманова многообразия $(\bar{\Omega}, g)$ с краем $\Gamma = \partial\Omega$ и диффеоморфизма $\hat{\rho}\colon \Gamma \to \Gamma$ края существуют открытые подмножества $\Gamma^\pm \subset \tilde{\Gamma}^\pm$, инвариантные относительно всех преобразований* (6) *и такие, что $\pi(\Gamma^+) = \pi(\Gamma^-) = \Gamma$ и существует единственный стандартный* (*т. е. гюйгенсов*) *закон преломления $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$.*

б) *Если при этом $\hat{\rho}$ — изометрия, то для $\Gamma^\pm := \tilde{\Gamma}^\pm$ существует единственный стандартный* (*т. е. гюйгенсов*) *закон преломления $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$.*

Доказательство. Докажем утверждение а). Пусть $\hat{\mathbf{q}} \in \Gamma$ — любая точка. Ввиду равносильности а) $\Longleftrightarrow$ г) в предложении 3.2 в указанных выше локальных координатах стандартный закон преломления задаётся условиями $q_+^1 = q_-^1 = 0$, $(q_+^2, \dots, q_+^n, p_2^+, \dots, p_n^+) = (q_-^2, \dots, q_-^n, p_2^-, \dots, p_n^-)$ и $H(\mathbf{q}_+, \mathbf{p}^+) = H(\mathbf{q}_-, \mathbf{p}^-)$. Обозначим через g_ε^{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, компоненты тензора, обратного метрическому тензору, в точке $\mathbf{q}_\varepsilon \in U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon} \cap \Gamma$ в координатах $(q_\varepsilon^1, \dots, q_\varepsilon^n)$ в $U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$, $\hat{\mathbf{q}}_+ := \hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{q}}_- := \hat{\rho}(\hat{\mathbf{q}})$.

Пусть теперь $\delta > 0$ — достаточно малое число и набор $(p_2^+, \dots, p_n^+) = (p_2^-, \dots, p_n^-)$ таков, что $(p_2^+)^2 + \dots + (p_n^+)^2 < \delta$. Для каждого $\varepsilon \in \{+, -\}$ определим число $p_1^\varepsilon =: P_1^\varepsilon(p_2^+, \dots, p_n^+) \in \mathbb{R}$ условиями $H(\mathbf{q}_\varepsilon, \mathbf{p}^\varepsilon) = 1/2$ и $\varepsilon \sum_{i=1}^n g_\varepsilon^{1i} p_i^\varepsilon > 0$. (Последнее означает, что $(\mathbf{q}_\varepsilon, \mathbf{p}^\varepsilon) \in \tilde{\Gamma}^\varepsilon$, см. (14).) Такое p_1^ε существует, единственно и близко к $\varepsilon/\sqrt{g_\varepsilon^{11}}$, так как

$$2H(\mathbf{q}_\varepsilon, \mathbf{p}^\varepsilon) = g_\varepsilon^{11}(p_1^\varepsilon)^2 + 2\sum_{i=2}^n g_\varepsilon^{1i} p_1^\varepsilon p_i^\varepsilon + \sum_{i,j=2}^n g_\varepsilon^{ij} p_i^\varepsilon p_j^\varepsilon, \quad g_\varepsilon^{11} > 0.$$

Определим подмножество $\Gamma^\varepsilon_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon} \subset \tilde{\Gamma}^\varepsilon$ в указанных локальных координатах как множество точек $(\mathbf{q}_\varepsilon, \mathbf{p}^\varepsilon)$, таких что $q_\varepsilon^1 = 0$ и существует $\lambda > 0$ со свойствами $(p_2^\varepsilon)^2 + \dots + (p_n^\varepsilon)^2 < \delta\lambda^2$ и $p_1^\varepsilon = \lambda P_1^\varepsilon(p_2^\varepsilon/\lambda, \dots, p_n^\varepsilon/\lambda)$. Тогда $\Gamma^\varepsilon_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}$ открыто в $\tilde{\Gamma}^\varepsilon$, инвариантно относительно всех преобразований вида (6) и $\pi(\Gamma^\varepsilon_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}) = U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon} \cap \Gamma$. Определим «локальный закон преломления» $\rho_{\hat{\mathbf{q}}_+} : \Gamma^+_{\hat{\mathbf{q}}_+} \to \Gamma^-_{\hat{\mathbf{q}}_-}$ формулой

$$\left(0, q_+^2, \dots, q_+^n, \lambda P_1^+\left(\frac{p_2^+}{\lambda}, \dots, \frac{p_n^+}{\lambda}\right), p_2^+, \dots, p_n^+\right) \mapsto$$
$$\mapsto \left(0, q_-^2, \dots, q_-^n, \lambda P_1^-\left(\frac{p_2^-}{\lambda}, \dots, \frac{p_n^-}{\lambda}\right), p_2^-, \dots, p_n^-\right).$$

Он является стандартным законом преломления, причём единственным (для заданных метрики, диффеоморфизма $\hat{\rho}$, окрестностей $U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}$ и Γ^ε, $\varepsilon \in \{+, -\}$). Указанные окрестности вида $U_{\hat{\mathbf{q}}_+}$ (для всевозможных точек $\hat{\mathbf{q}}_+ \in \Gamma$) покрывают всё Γ, и на их попарных пересечениях построенные «локальные стандартные законы преломления» $\rho_{\hat{\mathbf{q}}_+}$ согласованны (ввиду их единственности в малой окрестности любой точки, см. выше). Поэтому эти законы определяют единый стандартный закон преломления $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$.

Докажем утверждение б). Предположим теперь, что $\hat{\rho}$ — изометрия. Тогда $g_+^{ij} = g_-^{ij}$ для любых $i, j = 2, \dots, n$. Поэтому указанное выше соотношение между p_1^+ и p_1^- принимает вид

$$g_+^{11}(p_1^+)^2 + 2\sum_{i=2}^n g_+^{1i} p_i^+ p_1^+ = g_-^{11}(p_1^-)^2 + 2\sum_{i=2}^n g_-^{1i} p_i^- p_1^-,$$

где

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n g_\varepsilon^{1i} p_i^\varepsilon > 0, \quad \varepsilon \in \{+, -\},$$

ввиду (14). Без ограничения общности мы можем и будем считать, что $g_+^{11} = g_-^{11} = 1$ и $g_+^{1i} = g_-^{1i} = 0$ для любого $i = 2, \dots, n$ (т. е. $\partial/\partial q_\varepsilon^1|_{U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon} \cap \Gamma}$ есть поле единичных нормалей к $U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon} \cap \Gamma$). Тогда указанное выше соотношение принимает вид $(p_1^+)^2 = (p_1^-)^2$, где $p_1^+ > 0$ и $p_1^- < 0$, т. е. вид $p_1^+ = -p_1^- > 0$. Значит, существует единственный стандартный закон преломления $\rho\colon \tilde{\Gamma}^+ \to \tilde{\Gamma}^-$. $\square$

Аналогично доказывается следующее усиление следствия 3.3.

Следствие 3.4.

а) *Пусть заданы риманово многообразие* $(\bar{\Omega}, g)$ *с краем* $\Gamma = \partial\Omega$, *диффеоморфизм* $\hat{\rho}\colon \Gamma \to \Gamma$ *края и гладкая функция* $G_E\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ *на крае, и пусть* $E > 0$. *Тогда следующие условия равносильны*:

i) *существует почти стандартный* (*т. е. почти гюйгенсов*) *закон преломления* $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ *с производящей функцией* G_E *для уровня энергии* E, *где* $\Gamma^\pm \subset \tilde{\Gamma}^\pm$ — *некоторые открытые подмножества, такие что* $\pi\big(\Gamma^+ \cap H^{-1}(1/2)\big) = \pi\big(\Gamma^- \cap H^{-1}(1/2)\big) = \Gamma$;

ii) 1-*форма* dG_E *на* Γ *«достаточно мала», а именно в любой точке* $\hat{\mathbf{q}} \in \Gamma$ *существует касательный вектор* $\mathbf{v} \in T_{\hat{\mathbf{q}}}\Gamma$, *такой что* $|\mathbf{v}| < 1$ *и* $|\hat{\rho}_*(\mathbf{v} + (2E)^{-1/2}\operatorname{grad} G_E)| < 1$, *где длины векторов и градиент функции понимаются в смысле ограничения римановой метрики на гиперповерхность* Γ.

б) *Пусть выполнено условие* ii) *из пункта* а). *Положим* $\lambda := \sqrt{2E}$,

$$
\begin{aligned}
&W_\lambda := \{\mathbf{v} \in T_{\hat{\mathbf{q}}}\Gamma \mid \hat{\mathbf{q}} \in \Gamma,\ |\mathbf{v}| < 1,\ |\hat{\rho}_*(\lambda\mathbf{v} + \operatorname{grad} G_{\lambda^2/2})| < \lambda\},\\
&\Gamma_0^+ := \{\lambda\langle \mathbf{v}, \cdot\rangle + \mu\, dF \mid \mathbf{v} \in W_\lambda,\ |\lambda\langle \mathbf{v}, \cdot\rangle + \mu\, dF| = \lambda,\ \lambda, \mu > 0\},\\
&\Gamma_0^- := \{\langle \hat{\rho}_*(\lambda\mathbf{v} + \operatorname{grad} G_{\lambda^2/2}), \cdot\rangle - \mu\, dF \mid \mathbf{v} \in W_\lambda,\ |\lambda\langle \mathbf{v}, \cdot\rangle - \mu\, dF| = \lambda,\\
&\qquad \lambda, \mu > 0\},
\end{aligned}
$$

где F — *гладкая функция на* Q, *такая что* $\Omega = F^{-1}(-\infty, 0)$, $\Gamma = F^{-1}(0)$ *и* $|dF(\mathbf{q})| = 1$ *для любой точки* $\mathbf{q} \in \Gamma$. *Тогда* $\Gamma_0^\pm \subset \tilde{\Gamma}^\pm$, *подмножества* $\Gamma_0^\pm$ *инвариантны относительно всех преобразований* (6), *и для них существует* $\mathbb{R}^*$-*эквивариантный закон преломления* ρ_0 *со свойствами из пункта* а). *Если для некоторых* $\Gamma^\pm$ *существует закон преломления* ρ *со свойствами из пункта* а), *то* $\Gamma^\pm \subset \Gamma_0^\pm$ *и* $\rho = \rho_0|_{\Gamma_0^+}$ (*и, в частности, такой закон преломления* ρ *единствен*).

в) *Если* $\hat{\rho}$ — *изометрия, то условие* ii) *из пункта* а) *равносильно тому, что* $|\operatorname{grad} G_E| < 2\sqrt{2E}$ *всюду на* Γ. □

4. Гамильтоновы и динамические свойства первых интегралов геодезического потока

Следующие две леммы понадобятся нам для доказательства импликаций

$$(\mathrm{Ham}) \Longrightarrow (\mathrm{Coord}), \quad (\mathrm{Dyn}) \Longrightarrow (\mathrm{Hug})$$

из пункта а) теоремы 2.6 и импликаций

$$(\mathrm{Symp}') \Longrightarrow (\mathrm{Dyn}') \Longrightarrow (\mathrm{Hug}')$$

из теоремы 2.7. Обозначим $\Gamma^\pm := \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

Лемма 4.1. *Пусть заданы риманово многообразие* (Q, g) *и область* $\Omega \subset Q$ *с гладкой границей* $\Gamma = \partial\Omega \subset Q$. *Пусть функция* H *и гиперповерхности* $\Gamma^{\pm} := \tilde{\Gamma}^{\pm} \subset T^*_{\Gamma}Q$ *в* T^*Q *такие же, как в* (7) *и обозначении* 2.2. *Тогда*

а) *множество*

$$\sigma := \Gamma^{\pm} \cap H^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

является $(2n-2)$*-мерным симплектическим подмногообразием в* T^*Q, *а* $\sigma \cap (T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)$ — $(n-1)$*-мерным лагранжевым подмногообразием в* σ. *Любая точка* $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in \sigma$ *обладает окрестностью* $\hat{U}$ *в* σ, *на которой существует максимальный инволютивный набор функций* $J_2, \ldots, J_n$, *такой что* $(n-1)$*-форма* $dJ_2 \wedge \ldots \wedge dJ_n|_{\hat{U} \cap (T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)}$ *не имеет нулей*;

б) *для любых окрестности* $\hat{U}$ *и набора функций* $J_2, \ldots, J_n$ *в* $\hat{U}$ *со свойствами из пункта* а) *существует окрестность* U *точки* $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})$ *в* T^*Q, *инвариантная относительно преобразований* (6) *и такая, что* $U \cap \sigma \subset \hat{U}$ *и существует* $\hat{\mathbf{q}}$*-максимальный инволютивный набор функций* $I_1, \ldots, I_n$ *в* U *со свойствами*

$$I_1 = H|_U, \quad I_i|_{U \cap \sigma} = J_i|_{U \cap \sigma}, \quad I_i(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = I_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

для любых $i = 2, \ldots, n$, $\lambda > 0$ *и* $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Фиксируем точку $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in \sigma$. Пусть $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ — локальные координаты в области $T^*U_{\hat{\mathbf{q}}}$ в T^*Q, введённые перед предложением 3.1. В силу соотношения $q^1|_{\hat{U}} = 0$, неравенства (14) и теоремы о неявной функции множество

$$\hat{U} := (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}}) \cap \sigma$$

является $(2n-2)$-мерным подмногообразием, причём $(q^2, \ldots, q^n, p_2, \ldots, p_n)|_{\hat{U}}$ — гладкие (регулярные) координаты на $\hat{U}$. Значит,

$$\omega|_{\hat{U}} = \sum_{i=2}^{n} dp_i \wedge dq^i.$$

Поэтому подмногообразие $\hat{U}$ (а значит, и σ) симплектично. Отсюда также получаем, что $(T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q) \cap \sigma$ является лагранжевым $(n-1)$-мерным подмногообразием в $\hat{U}$ и что существует инволютивный набор функций $\mathbf{J} = (J_2, \ldots, J_n)$ на $\hat{U}$, такой что $(n-1)$-форма $dJ_2 \wedge \ldots \wedge dJ_n|_{\hat{U} \cap (T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)}$ не имеет нулей. (Например, в качестве такого набора можно взять $\mathbf{J} := (p_2, \ldots, p_n)|_{\hat{U}}$.)

Докажем утверждение б). Пусть теперь $\hat{U}$ — окрестность точки $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})$ в σ и $\mathbf{J} = (J_2, \ldots, J_n)$ — набор функций на $\hat{U}$, обладающие указанными в пункте а) леммы свойствами. (Отметим, что равенства $\hat{U} = (T^*U_{\hat{\mathbf{q}}}) \cap \sigma$ и $\mathbf{J} = (p_2, \ldots, p_n)|_{\hat{U}}$ не обязаны быть выполнены.) Пусть $U \subset T^*U_{\hat{\mathbf{q}}}$ — «достаточно малая» окрестность точки $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})$ в T^*Q, инвариантная относительно всех преобразований (6) и целиком состоящая из дуг фазовых траекторий геодезического потока, проходящих через $U \cap \Gamma^{\pm}$. Без ограничения общности считаем, что $U \cap \sigma \subset \hat{U}$.

Продолжим инволютивный набор $\mathbf{J}$ на всю гиперповерхность $U \cap \Gamma^{\pm}$, полагая $\tilde{J}_i|_{U\cap\sigma} := J_i|_{U\cap\sigma}$ и $\tilde{J}_i(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) := J_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ для любых $\lambda > 0$ и $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U \cap \sigma$, $i = 2, \dots, n$. Продолжим полученные функции $\tilde{J}_i$ на всю окрестность U так, чтобы продолженные функции I_i были постоянны вдоль любой фазовой траектории геодезического потока (а значит, $\{H, I_i\} = 0$), $i = 2, \dots, n$. Положим $I_1 := H|_U$.

Покажем, что построенный набор функций $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_n)$ в U является инволютивным, т. е. что $\{I_i, I_j\} = 0$ для любых $i, j = 1, \dots, n$. По построению $\{I_1, I_j\} = \{H, I_j\} = 0$. Так как функции I_i, I_j и симплектическая структура ω инвариантны относительно геодезического потока, то скобка Пуассона $\{I_i, I_j\}$ тоже инвариантна относительно геодезического потока. Поэтому достаточно проверить равенство $\{I_i, I_j\}|_{U\cap\Gamma^{\pm}} = 0$ при $2 \leqslant i, j \leqslant n$. Проведём проверку в три шага; попутно докажем (на шаге 2), что $I_i(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = I_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ для любых $i = 2, \dots, n$, $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U$ и $\lambda > 0$.

Шаг 1. Проверим сначала равенство $\{I_i, I_j\}|_{U\cap\sigma} = 0$ при $2 \leqslant i, j \leqslant n$. Для любого $i = 1, \dots, n$ рассмотрим гамильтоново векторное поле $V_i := X_{I_i}$ в U, а также векторное поле $\bar{V}_i$ на $U \cap \sigma$, касательное к $U \cap \sigma$ и определяемое условием

$$\omega(\bar{W}, \bar{V}_i) = dI_i(\bar{W})$$

для любого векторного поля $\bar{W}$ на $U \cap \sigma$, касательного к подмногообразию $U \cap \sigma$. Так как

$$\omega(\bar{W}, V_i|_{U\cap\sigma}) = dI_i(\bar{W}) = \omega(\bar{W}, \bar{V}_i)$$

для любого векторного поля $\bar{W}$, касательного к подмногообразию $U \cap \sigma$, то векторное поле

$$\Delta_i := V_i|_{U\cap\sigma} - \bar{V}_i$$

косоортогонально подмногообразию $U \cap \sigma$. Поэтому

$$\Delta_i = \lambda_i V_1|_{U\cap\sigma} + \mu_i \frac{\partial}{\partial p_1}\bigg|_{U\cap\sigma} \tag{16}$$

для некоторых гладких функций λ_i, μ_i на $U \cap \sigma$. Покажем, что $\mu_i = 0$. Действительно, для любых векторных полей $\bar{W}$, $W^{\perp}$ на $U \cap \sigma$, таких что $\bar{W}$ касательно к подмногообразию $U \cap \sigma$, а $W^{\perp}$ косоортогонально $U \cap \sigma$, имеем

$$\begin{aligned}\omega(\bar{W} + W^{\perp}, V_i) = \omega(\bar{W} + W^{\perp}, \bar{V}_i + \Delta_i) = \\ = \omega(\bar{W}, \bar{V}_i) + \omega(W^{\perp}, \Delta_i) = dI_i(\bar{W}) + \omega(W^{\perp}, \Delta_i).\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\omega(\bar{W} + W^{\perp}, V_i) = dI_i(\bar{W} + W^{\perp}) = dI_i(\bar{W}) + dI_i(W^{\perp}).$$

Поэтому

$$dI_i(W^{\perp}) = \omega(W^{\perp}, \Delta_i). \tag{17}$$

В качестве $W^{\perp}$ можно взять любое векторное поле вида

$$W^{\perp} = aV_1|_{\sigma} + b\frac{\partial}{\partial p_1}\bigg|_{U\cap\sigma},$$

где a, b — любые гладкие функции на $U \cap \sigma$. Значит, $dI_i(W^\perp) = b\partial I_i/\partial p_1|_{U\cap\sigma}$ и

$$\omega(W^\perp, \Delta_i) = \omega\left(aV_1 + b\frac{\partial}{\partial p_1}, \lambda_i V_1 + \mu_i \frac{\partial}{\partial p_1}\right) = (\lambda_i b - \mu_i a)\frac{\partial H}{\partial p_1}\bigg|_{U\cap\sigma}.$$

Поэтому равенство (17) переписывается в виде

$$b\frac{\partial I_i}{\partial p_1}\bigg|_\sigma = (\lambda_i b - \mu_i a)\frac{\partial H}{\partial p_1}\bigg|_{U\cap\sigma}.$$

Так как a, b любые и выполнено (14), то $\mu_i = 0$ и $\lambda_i = (\partial I_i/\partial p_1)/(\partial H/\partial p_1)|_{U\cap\sigma}$.

Итак, $\mu_i = 0$ в (16), поэтому векторы Δ_i попарно косоортогональны. Так как векторы $\bar V_i$ и Δ_j тоже косоортогональны, то

$$\begin{aligned}\{I_i, I_j\}|_{U\cap\sigma} = \omega(V_i, V_j)|_{U\cap\sigma} = \omega(\bar V_i + \Delta_i, \bar V_j + \Delta_j) = \omega(\bar V_i, \bar V_j) = \\ = \{I_i|_{U\cap\sigma}, I_j|_{U\cap\sigma}\} = \{J_i, J_j\}|_{U\cap\sigma} = 0\end{aligned}$$

ввиду инволютивности набора $\mathbf{J} = (J_2, \ldots, J_n)$ на $\hat U \supset U \cap \sigma$ (см. выше).

Шаг 2. Покажем теперь, что $I_i(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = I_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ для любых индекса $i = 2, \ldots, n$, точки $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U$ и числа $\lambda > 0$. Пусть $\gamma(t) = \big(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)\big)$, $t \in (t_0, t_1)$ — дуга фазовой траектории геодезического потока в U, проходящая через точку $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Без ограничения общности $t_0 < 0 < t_1$, $\gamma(0) \in U \cap \Gamma^\pm$ и $\gamma(t_*) = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ для некоторого $t_* \in (t_0, t_1)$. Так как функция Гамильтона H однородна по импульсам степени $s = 2$, то согласно пункту б) обозначения 2.1 путь

$$\gamma_\lambda(t) := \big(\mathbf{q}(\lambda^{s-1}t), \lambda\mathbf{p}(\lambda^{s-1}t)\big) = \big(\mathbf{q}(\lambda t), \lambda\mathbf{p}(\lambda t)\big)$$

тоже является фазовой траекторией геодезического потока в U. Так как $\big(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)\big) = \gamma(0) \in U \cap \Gamma^\pm$, то по построению $I_i\big(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)\big) = I_i\big(\mathbf{q}(0), \lambda\mathbf{p}(0)\big)$ при $i = 2, \ldots, n$. Так как функции I_i по построению постоянны вдоль любой фазовой траектории, то

$$I_i\big(\mathbf{q}(t_*), \mathbf{p}(t_*)\big) = I_i\big(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)\big) = I_i\big(\mathbf{q}(0), \lambda\mathbf{p}(0)\big) = I_i\big(\mathbf{q}(t_*), \lambda\mathbf{p}(t_*)\big),$$

т. е. выполнено требуемое равенство $I_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = I_i(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p})$ в U при любых $i = 2, \ldots, n$ и $\lambda > 0$.

Шаг 3. Проверим теперь равенство $\{I_i, I_j\}|_{U\cap\Gamma^\pm} = 0$ при $2 \leqslant i, j \leqslant n$. Так как функция Гамильтона H однородна по импульсам степени s и $H|_{U\cap\Gamma^\pm} > 0$ (в действительности $s = 2$, но мы это не будем использовать), то для любой точки $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U \cap \Gamma^\pm$ имеем

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{p}}{\sqrt[s]{2H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}}\right) = \frac{H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{2H(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \frac{1}{2}$$

т. е. $\big(\mathbf{q}, \mathbf{p}/\sqrt[s]{2H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}\big) \in U \cap \sigma$. Поэтому достаточно показать, что для любых точки $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U \cap \sigma$ и числа $\lambda > 0$ выполнено $\{I_i, I_j\}(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = 0$. По шагу 2 функции $I_2, \ldots, I_n$ однородны по импульсам степени 0, поэтому

$\partial I_i(\mathbf{q},\lambda\mathbf{p})/\partial q^k = \partial I_i(\mathbf{q},\mathbf{p})/\partial q^k$ и $\partial I_i(\mathbf{q},\lambda\mathbf{p})/\partial p_k = (1/\lambda)\partial I_i(\mathbf{q},\mathbf{p})/\partial p_k$ для любых $i=2,\dots,n$ и $k=1,\dots,n$. Значит,

$$\{I_i,I_j\}(\mathbf{q},\lambda\mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda}\{I_i,I_j\}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = 0,$$

где последнее равенство следует из шага 1 ввиду $(\mathbf{q},\mathbf{p})\in U\cap\sigma$.

Итак, построенный набор функций $\mathbf{I}=(I_1,\dots,I_n)$ в U действительно является инволютивным. Покажем, что он $\hat{\mathbf{q}}$-максимален. Так как изоэнергетическая поверхность $U\cap H^{-1}(1/2)$ есть объединение дуг фазовых траекторий в U, проходящих через $U\cap\sigma$, то совместное множество уровня $\mathbf{I}^{-1}\big(\mathbf{I}(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})\big)$ есть объединение дуг фазовых траекторий в U, проходящих через $U\cap\sigma\cap\mathbf{J}^{-1}\big(\mathbf{J}(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})\big)$. Отсюда (и из условия на дифференциалы функций набора $\mathbf{J}$) следует, что ограничение проекции $\pi\colon T^*Q\to Q$ на малую окрестность точки $(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})$ в этом совместном множестве уровня является локальным диффеоморфизмом. Последнее доказывает $\hat{\mathbf{q}}$-максимальность инволютивного набора $\mathbf{I}$ в U. □

Лемма 4.2. *Пусть Q — гладкое n-мерное многообразие. Предположим, что $(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})\in T^*Q$ и в некоторой окрестности $\tilde U$ точки $(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})$ в T^*Q задан $\hat{\mathbf{q}}$-максимальный набор функций $\mathbf{I}=(I_1,\dots,I_n)$. Тогда существуют $\delta>0$, окрестность $U_{\hat{\mathbf{q}}}$ точки $\hat{\mathbf{q}}$ в Q, гомеоморфная n-мерному шару, и окрестность $U\subset\tilde U$ точки $(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})$ в T^*Q, такие что*

а) *окрестность $U_{\hat{\mathbf{q}}}$ является образом окрестности U при проекции $\pi\colon T^*Q\to Q$. Для любого вектора*

$$\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n,$$

принадлежащего δ-окрестности вектора $\hat{\mathbf{c}}:=\mathbf{I}(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})\in\mathbb{R}^n$, совместное множество уровня $U\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})$ функций набора $\mathbf{I}$ в U является n-мерным подмногообразием, а отображение

$$\pi_{\mathbf{c}} := \pi|_{U\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})}\colon U\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})\to U_{\hat{\mathbf{q}}}$$

является диффеоморфизмом. Если набор $\mathbf{I}$ инволютивен, то это подмногообразие лагранжево;

б) *для каждого вектора $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$, $|\mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}}|<\delta$, существуют однозначно определённые приведёнными ниже условиями наборы векторных и ковекторных полей в окрестности $U_{\hat{\mathbf{q}}}\subset Q$:*

i) *ковекторное поле $\mathbf{p}_{\mathbf{c}}$, значение которого $\mathbf{p}_{\mathbf{c}}|_{\mathbf{q}}$ в любой точке $\mathbf{q}\in U_{\hat{\mathbf{q}}}$ определено условием*

$$(\pi_{\mathbf{c}})^{-1}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q},\mathbf{p}_{\mathbf{c}}|_{\mathbf{q}}),$$

т. е. условиями

$$(\mathbf{q},\mathbf{p}_{\mathbf{c}}|_{\mathbf{q}})\in U,\quad \mathbf{I}(\mathbf{q},\mathbf{p}_{\mathbf{c}}|_{\mathbf{q}})=\mathbf{c};$$

ii) *набор векторных полей*

$$V_{\mathbf{c},i} := (\pi_{\mathbf{c}})_*\big(X_{I_i}|_{U\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})}\big),\quad i=1,\dots,n,$$

линейно независимых в каждой точке;

iii) *набор 1-форм* $\xi_{\mathbf{c},1},\dots,\xi_{\mathbf{c},n}$, *определённый условием*

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n}\xi_{\mathbf{c},i}(\mathbf{v})V_{\mathbf{c},i} \tag{18}$$

для любого векторного поля $\mathbf{v}$ *на* $U_{\hat{\mathbf{q}}}$ (*т. е. ковекторные поля* $\xi_{\mathbf{c},1},\dots,\xi_{\mathbf{c},n}$ *в любой точке* $\mathbf{q}\in U_{\hat{\mathbf{q}}}$ *образуют базис пространства* $T^*_{\mathbf{q}}Q$, *двойственный базису* $V_{\mathbf{c},1}|_{\mathbf{q}},\dots,V_{\mathbf{c},n}|_{\mathbf{q}}$ *пространства* $T_{\mathbf{q}}Q$);

в) *если функция* H *в* T^*Q *имеет вид* (7), *окрестность* U *инвариантна относительно преобразований* (6) *и набор функций* $\mathbf{I}$ *обладает свойствами*

$$I_1=H|_U,\quad I_i(\mathbf{q},\lambda\mathbf{p})=I_i(\mathbf{q},\mathbf{p})$$

для любых $i=2,\dots,n$, $\lambda>0$, $(\mathbf{q},\mathbf{p})\in U$, *то верны равенства* 1-*форм в* $U_{\hat{\mathbf{q}}}$:

$$\xi_{\mathbf{c},1}=\frac{1}{2c_1}\mathbf{p}_{\mathbf{c}}=\frac{1}{2c_1}\langle V_{\mathbf{c},1},\cdot\rangle,\quad \xi_{\mathbf{c},i}=2c_1\frac{\partial\xi_{\mathbf{c},1}}{\partial c_i}=\frac{\partial\mathbf{p}_{\mathbf{c}}}{\partial c_i},\quad i=2,\dots,n, \tag{19}$$

для любого вектора $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$, *такого что* $|\mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}}|<\delta$, *где через* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *обозначено скалярное произведение касательных векторов в смысле римановой метрики на* Q;

г) *если набор* $\mathbf{I}$ *инволютивен, то для любого вектора* $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{R}^n$, *такого что* $|\mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}}|<\delta$, *векторные поля* $V_{\mathbf{c},1},\dots,V_{\mathbf{c},n}$ *попарно коммутируют и* 1-*формы* $\xi_{\mathbf{c},1},\dots,\xi_{\mathbf{c},n}$ *замкнуты.*

Доказательство. Докажем утверждения а) и б). Пусть $\delta>0$ и окрестность $U\subset\tilde{U}$ достаточно малы. Рассмотрим любой вектор $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$, такой что $|\mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}}|<\delta$. Так как набор $\mathbf{I}$ является максимальным в (достаточно малой) окрестности U, то (при достаточно малых $\delta>0$ и U) любое совместное множество уровня $U\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})$ является n-мерным подмногообразием, а гамильтоновы векторные поля $X_{I_1},\dots,X_{I_n}$ линейно независимы в любой его точке.

Из теоремы о неявных функциях следует, ввиду $\hat{\mathbf{q}}$-максимальности набора $\mathbf{I}$, что отображение $\pi_{\mathbf{c}}$ инъективно и является локальным диффеоморфизмом (если окрестность U и число $\delta>0$ достаточно малы), а векторные поля $V_{\mathbf{c},i}$, $i=1,\dots,n$, из пункта б) линейно независимы в каждой точке множества $\pi_{\mathbf{c}}\big(U\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})\big)=\pi\big(U\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})\big)$. Так как $\pi_{\mathbf{c}}$ инъективно и является локальным диффеоморфизмом, то ковекторное поле $\mathbf{p}_{\mathbf{c}}$ из пункта б) определено корректно и является гладким.

Пусть $U_{\hat{\mathbf{q}}}$ — столь малая окрестность точки $\hat{\mathbf{q}}$ в Q, что $U_{\hat{\mathbf{q}}}\subset\pi_{\mathbf{c}}\big(U\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})\big)$ при любом $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^n$, $|\mathbf{c}-\hat{\mathbf{c}}|<\delta$. Заменим окрестность U на «меньшую» окрестность $U\cap\pi^{-1}(U_{\hat{\mathbf{q}}})$.

Докажем утверждение в). Для доказательства первой формулы в (19) докажем сначала формулу

$$\xi_{\mathbf{c},1}(\mathbf{v})=\frac{\langle\mathbf{v},V_{\mathbf{c},1}\rangle}{|V_{\mathbf{c},1}|^2}=\frac{\langle\mathbf{v},V_{\mathbf{c},1}\rangle}{2c_1}, \tag{20}$$

где $\mathbf{v}$ — любое векторное поле на $U_{\hat{\mathbf{q}}}$. Действительно, для любого $i = 1, \dots, n$ и любой точки $\mathbf{q} \in U_{\hat{\mathbf{q}}}$ в координатах $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ на $T^*U_{\hat{\mathbf{q}}}$ имеем

$$V_{\mathbf{c},i}|_{\mathbf{q}} = \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}}). \tag{21}$$

В частности,

$$V_{\mathbf{c},1}|_{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}}) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\mathbf{q}) p_{\mathbf{c},j} \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad \mathbf{q} \in U_{\hat{\mathbf{q}}}. \tag{22}$$

Поэтому при $i = 2, \dots, n$ имеем

$$\langle V_{\mathbf{c},1}, V_{\mathbf{c},i} \rangle|_{\mathbf{q}} = \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}} \left(\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}}) \right) = 0, \quad \mathbf{q} \in U_{\hat{\mathbf{q}}},$$

так как $I_i(\mathbf{q}, \lambda \mathbf{p}) = I_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ для любого $\lambda > 0$ по условию.

Учитывая последнее равенство, скалярно умножим обе части равенства (18) на векторное поле $V_{\mathbf{c},1}$:

$$\langle \mathbf{v}, V_{\mathbf{c},1} \rangle = \xi_{\mathbf{c},1}(\mathbf{v}) |V_{\mathbf{c},1}|^2.$$

Так как

$$|V_{\mathbf{c},1}|^2|_{\mathbf{q}} = 2H(\mathbf{q}, \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}}) = 2I_1(\mathbf{q}, \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}}) = 2c_1 > 0,$$

формула (20) доказана.

Из формул (20) и (22) выводим

$$\xi_{\mathbf{c},1}(\mathbf{v})|_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2c_1} \langle \mathbf{v}|_{\mathbf{q}}, V_{\mathbf{c},1}|_{\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{2c_1} \mathbf{p_c}(\mathbf{v})|_{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} \in U_{\hat{\mathbf{q}}},$$

что доказывает первую формулу в (19).

Докажем теперь вторую формулу в (19). Пусть $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Для любой точки $\mathbf{q} \in U_{\hat{\mathbf{q}}}$ частная производная обеих частей равенства $I_i(\mathbf{q}, \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}}) = c_i$ по c_j даёт

$$\frac{\partial \mathbf{p_c}}{\partial c_j} \left(\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}}) \right) = \delta_{ij}, \quad \mathbf{q} \in U_{\hat{\mathbf{q}}}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

где $(\partial I_i / \partial \mathbf{p})(\mathbf{q}, \mathbf{p_c}|_{\mathbf{q}})$ рассматривается как касательный вектор в точке $\mathbf{q}$, т. е. как элемент пространства $T_{\mathbf{q}}Q$. Отсюда ввиду (21) получаем следующее равенство функций в $U_{\hat{\mathbf{q}}}$:

$$\frac{\partial \mathbf{p_c}}{\partial c_j}(V_{\mathbf{c},i}) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Учитывая последнее равенство, вычислим значение ковекторного поля $\partial \mathbf{p_c} / \partial c_j$ на векторном поле, равном обеим частям равенства (18):

$$\frac{\partial \mathbf{p_c}}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{p_c}}{\partial c_j}(V_{\mathbf{c},i}) \xi_{\mathbf{c},i} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \xi_{\mathbf{c},i} = \xi_{\mathbf{c},j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Полученная формула ввиду первой формулы из (19) даёт следующее равенство 1-форм в $U_{\hat{\mathbf{q}}}$:

$$\frac{\partial(2c_1\xi_{\mathbf{c},1})}{\partial c_j} = \xi_{\mathbf{c},j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Подставляя сюда $j = 2, \ldots, n$, сразу получаем вторую формулу из (19).

Докажем утверждение г). Ввиду инволютивности набора $\mathbf{I}$ для любого вектора $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, такого что $|\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}| < \delta$, n-мерное подмногообразие $U \cap \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})$ является лагранжевым в U, а гамильтоновы векторные поля $X_{I_1}, \ldots, X_{I_n}$ попарно коммутируют, являются касательными к этому подмногообразию и образуют базис его касательного пространства в любой его точке. Ввиду пункта а) отсюда следует, что векторные поля $V_{I_1}, \ldots, V_{I_n}$ тоже попарно коммутируют и $\xi_{\mathbf{c},1}, \ldots, \xi_{\mathbf{c},n}$ — это замкнутые 1-формы в $U_{\hat{\mathbf{q}}}$. □

5. Динамическая характеризация гюйгенсова закона преломления

В этом разделе доказывается теорема 2.6.

Докажем утверждение а). Покажем справедливость импликаций

$$(\mathrm{Ham}') \Longrightarrow (\mathrm{Ham}) \Longrightarrow (\mathrm{Coord}) \Longrightarrow (\mathrm{Dyn}) \Longrightarrow (\mathrm{Hug}) \Longrightarrow (\mathrm{Ham}').$$

Отметим, что первые три импликации рутинные, в отличие от двух последних.

Докажем импликацию $(\mathrm{Ham}') \Longrightarrow (\mathrm{Ham})$. Пусть $U^{\pm}$ и $\tilde{\rho}$ такие, как в условии (Ham'). Определим отображение

$$\tilde{\pi}_\rho\colon M \cup U^+ \cup U^- \to M_\rho$$

следующим образом. Для любой точки $x \in M$ положим $\tilde{\pi}_\rho(x) := \pi_\rho(x)$. При $x \in U^+ \setminus M$ положим $\tilde{\pi}_\rho(x) := \pi_\rho\big(\tilde{\rho}(x)\big)$, а при $x \in U^- \setminus M$ положим $\tilde{\pi}_\rho(x) := \pi_\rho\big(\tilde{\rho}^{-1}(x)\big)$. Это определение корректно, так как симплектоморфизм $\tilde{\rho}\colon U^+ \to U^-$ переводит Γ^+ в Γ^- и фазовые траектории в фазовые таектории, а потому он переводит объединение $U^+ \setminus M$ «вышедших» из M через Γ^+ дуг фазовых траекторий в объединение $M \cap (U^- \setminus \Gamma^-)$ «вошедших» в M через Γ^- дуг фазовых траекторий, а объединение $M \cap (U^+ \setminus \Gamma^+)$ «выходящих» из M через Γ^+ дуг фазовых траекторий — в объединение $U^- \setminus M$ «входящих» в M через Γ^- дуг фазовых траекторий.

Построенное отображение $\tilde{\pi}_\rho$ непрерывно, так как при $x \in \Gamma^+$ выполнено $\pi_\rho(x) = \pi_\rho\big(\rho(x)\big) = \pi_\rho\big(\tilde{\rho}(x)\big)$, а при $y := \rho(x) \in \Gamma^-$ выполнено $\pi_\rho\big(\tilde{\rho}^{-1}(y)\big) = \pi_\rho(y)$. Склеенное фазовое пространство M_ρ является $2n$-мерным многообразием, так как гиперповерхность $\pi_\rho(\Gamma^+) = \pi_\rho(\Gamma^-)$ в M_ρ имеет окрестность $\pi_\rho(U^+) = \pi_\rho(U^-)$, гомеоморфную U^+ и U^-. Отображение $\tilde{\pi}_\rho$ локально является гомеоморфизмом, так как его ограничение на любое из открытых подмножеств $M \setminus (\Gamma^+ \cup \Gamma^-)$ и $U^{\pm}$ является гомеоморфизмом на свой образ. Определим на M_ρ

единственную гладкую структуру и единственную симплектическую структуру ω_ρ, такие что $\tilde{\pi}_\rho$ гладкое и $\tilde{\pi}_\rho^*\omega_\rho = \omega$. (Обе такие структуры существуют, так как $\tilde{\rho}$ — симплектоморфизм.)

Склеенная функция Гамильтона H_ρ на M_ρ гладкая, так как (ввиду условия $H \circ \tilde{\rho} = H|_{U^+}$) на $\pi_\rho(U^+) = \pi_\rho(U^-)$ она совпадает с функцией $H \circ (\tilde{\pi}_\rho|_{U^+})^{-1} = H \circ (\tilde{\pi}_\rho|_{U^-})^{-1}$ и $\tilde{\pi}_\rho$ локально является диффеоморфизмом (ввиду $\tilde{\pi}_\rho^*\omega_\rho = \omega$ и невырожденности ω).

Докажем импликацию (Ham) $\Longrightarrow$ (Coord). Обозначим

$$\sigma := \Gamma^\pm \cap H^{-1}\big(H(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})\big),$$
$$(\hat{\mathbf{q}}_+, \hat{\mathbf{p}}^+) := (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}), \quad (\hat{\mathbf{q}}_-, \hat{\mathbf{p}}^-) := \rho(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}), \quad (\hat{\mathbf{q}}_\rho, \hat{\mathbf{p}}_\rho) := \pi_\rho(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}).$$

По утверждению а) леммы 4.1 σ является симплектическим $(2n-2)$-мерным подмногообразием и существуют окрестность $\hat{U}^+$ точки $(\hat{\mathbf{q}}_+, \hat{\mathbf{p}}^+)$ в σ и максимальный инволютивный набор функций $\mathbf{J}^+ = (J_2^+, \dots, J_n^+)$ в $\hat{U}^+$, дифференциалы которых обладают свойством из утверждения а) леммы 4.1.

Рассмотрим окрестность $\hat{U}^- := \rho(\hat{U}^+)$ точки $(\hat{\mathbf{q}}_-, \hat{\mathbf{p}}^-)$ в σ (здесь $\hat{U}^- \subset \sigma$ в силу условия $H \circ \rho = H|_{\Gamma^+}$ из пункта а) определения 2.3 закона преломления). В этой окрестности определим набор функций $\mathbf{J}^- = (J_2^-, \dots, J_n^-)$ условием

$$\mathbf{J}^- \circ \rho|_{\hat{U}^+} = \mathbf{J}^+. \tag{23}$$

Так как закон преломления $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ стандартен, то $\rho|_\sigma$ сохраняет симплектическую 2-форму $\omega|_\sigma = d\alpha|_\sigma$, т. е. $\rho|_\sigma$ — симплектоморфизм. Значит, набор функций $\mathbf{J}^-$ в $\hat{U}^-$ тоже (как и набор $\mathbf{J}^+$ в $\hat{U}^+$) является максимальным инволютивным. Дифференциалы функций набора $\mathbf{J}^-$ (как и дифференциалы функций набора $\mathbf{J}^+$) обладают свойством из утверждения а) леммы 4.1, так как $\rho((T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q) \cap \hat{U}^+) \subset (T^*_{\bar{\rho}(\hat{\mathbf{q}})}Q) \cap \hat{U}^-$ ввиду условия $\pi \circ \rho = \bar{\rho} \circ \pi$ из пункта а) определения 2.3 закона преломления.

По утверждению б) леммы 4.1 для любого $\varepsilon \in \{+,-\}$ существует окрестность U^ε точки $(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)$ в T^*Q, инвариантная относительно преобразований (6) и такая, что $U^\varepsilon \cap \sigma \subset \hat{U}^\varepsilon$ и существует $\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon$-максимальный инволютивный набор $\mathbf{I}^\varepsilon = (I_1^\varepsilon, \dots, I_n^\varepsilon)$ в U^ε со свойствами

$$I_1^\varepsilon = H|_{U^\varepsilon}, \quad I_i^\varepsilon|_{U^\varepsilon \cap \sigma} = J_i^\varepsilon|_{U^\varepsilon \cap \sigma}, \quad I_i^\varepsilon(\mathbf{q}, \lambda\mathbf{p}) = I_i^\varepsilon(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{24}$$

для любых $i = 2, \dots, n$, $\lambda > 0$ и $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U^\varepsilon$. Без ограничения общности мы можем и будем считать, что окрестность U^ε целиком состоит из дуг фазовых траекторий геодезического потока, проходящих через $U^\varepsilon \cap \Gamma^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+,-\}$.

Определим в «склеенной окрестности» U_ρ точки $(\hat{\mathbf{q}}_\rho, \hat{\mathbf{p}}_\rho)$ «склеенный набор» $\mathbf{I}_\rho = (I_{1,\rho}, \dots, I_{n,\rho})$ условием

$$\mathbf{I}_\rho \circ \pi_\rho|_{U^\varepsilon \cap M} = \mathbf{I}^\varepsilon|_{U^\varepsilon \cap M}, \quad \varepsilon \in \{+,-\}. \tag{25}$$

Такой набор существует, так как (в силу (23), (24) и $\mathbb{R}^*$-эквивариантности закона преломления ρ) выполнено $\mathbf{I}^- \circ \rho|_{U^+ \cap \Gamma^+} = \mathbf{I}^+|_{U^+ \cap \Gamma^+}$. Склеенный набор $\mathbf{I}_\rho$ является гладким, так как он постоянен на каждой дуге фазовой траектории в U_ρ (ввиду $\{H_\rho, I_{i,\rho}\} = 0$, $i = 1, \dots, n$) и его ограничение на гиперповерхность

$\pi_\rho(U^+\cap\Gamma^+)$ совпадает с гладким набором $\mathbf{I}^+\circ(\pi_\rho|_{U^+\cap\Gamma^+})^{-1}$. Склеенный набор $\mathbf{I}_\rho$ инволютивен, так как таковы оба набора $\mathbf{I}^+$ и $\mathbf{I}^-$, а $\pi_\rho^*\omega_\rho=\omega|_M$.

При каждом $\varepsilon\in\{+,-\}$ дополним набор $\mathbf{y}^\varepsilon:=\mathbf{I}^\varepsilon$ до канонических координат

$$(\mathbf{x}^\varepsilon,\mathbf{y}^\varepsilon)=(x_1^\varepsilon,\dots,x_n^\varepsilon,y_1^\varepsilon,\dots,y_n^\varepsilon)$$

в U^ε (уменьшив U^ε, если нужно), таких что $\mathbf{x}^\varepsilon(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon,\cdot)=0$. Более точно, на каждом совместном множестве уровня набора функций $\mathbf{I}^\varepsilon$, близком к множеству $(\mathbf{I}^\varepsilon)^{-1}\big(\mathbf{I}^\varepsilon(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon,\hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)\big)$, введём локальные координаты $\mathbf{x}^\varepsilon=(x_1^\varepsilon,\dots,x_n^\varepsilon)$ в окрестности точки $(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon,\hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)$ в T^*Q условиями

$$\mathbf{x}^\varepsilon(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon,\cdot)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}=X_{I_i^\varepsilon}. \tag{26}$$

Получим набор функций $\mathbf{x}^\varepsilon$ в (быть может, меньшей) окрестности точки $(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon,\hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)$. Так как n-форма $dy_1^\varepsilon\wedge\ldots\wedge dy_n^\varepsilon|_{T^*_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}Q}$ отлична от 0 в точке $(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon,\hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)$, то $dx_1^\varepsilon\wedge\ldots\wedge dx_n^\varepsilon\wedge dy_1^\varepsilon\wedge\ldots\wedge dy_n^\varepsilon\neq0$ в точке $(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon,\hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)$, а потому $(\mathbf{x}^\varepsilon,\mathbf{y}^\varepsilon)$ являются локальными координатами в некоторой окрестности точки $(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon,\hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)$. Непосредственно проверяется (как при доказательстве теоремы Дарбу), что в (быть может, меньшей) окрестности выполнено

$$\omega=d\mathbf{x}^\varepsilon\wedge d\mathbf{y}^\varepsilon=\sum_{i=1}^n dx_i^\varepsilon\wedge dy_i^\varepsilon,$$

т. е. эти координаты канонические. Эти координаты являются $\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon$-каноническими ввиду $\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon$-максимальности инволютивного набора $\mathbf{I}^\varepsilon$ (см. выше).

Аналогичным образом дополним склеенный набор $\mathbf{y}_\rho:=\mathbf{I}_\rho$ до канонических координат

$$(\mathbf{x}_\rho,\mathbf{y}_\rho)=(x_{1,\rho},\dots,x_{n,\rho},y_{1,\rho},\dots,y_{n,\rho})$$

в U_ρ, таких что $\mathbf{x}_\rho|_{U_\rho\cap\pi_\rho(T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)}=0$. При этом надо воспользоваться тем, что $U^+\cap(T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)$ — это лагранжева поверхность, трансверсальная совместному множеству уровня $(\mathbf{I}^+)^{-1}\big(\mathbf{I}^+(\hat{\mathbf{q}},\hat{\mathbf{p}})\big)$ (ввиду инволютивности и $\hat{\mathbf{q}}$-максимальности набора $\mathbf{I}^+$), а потому её образ $U_\rho\cap\pi_\rho(T^*_{\hat{\mathbf{q}}}Q)$ при симплектическом отображении $\pi_\rho\colon(M,\omega)\to(M_\rho,\omega_\rho)$ — это лагранжева поверхность, трансверсальная совместному множеству уровня $\mathbf{I}_\rho^{-1}\big(\mathbf{I}_\rho(\hat{\mathbf{q}}_\rho,\hat{\mathbf{p}}_\rho)\big)$. Тогда

$$(\mathbf{x}_\rho,\mathbf{y}_\rho)\circ\pi_\rho|_{U^\varepsilon\cap M}=(\mathbf{x}^\varepsilon,\mathbf{y}^\varepsilon)|_{U^\varepsilon\cap M},\quad \varepsilon\in\{+,-\}$$

ввиду (25) и $\pi_\rho^*\omega_\rho=\omega|_M$. Значит, $(\mathbf{x}^-,\mathbf{y}^-)\circ\rho|_{U^+\cap\Gamma^+}=(\mathbf{x}^+,\mathbf{y}^+)|_{U^+\cap\Gamma^+}$. Отсюда и из (24) получаем, что построенные координаты $(\mathbf{x}^\pm,\mathbf{y}^\pm)$ обладают всеми требуемыми свойствами из условия (Coord).

Докажем импликацию (Coord) $\Longrightarrow$ (Dyn). Так как координаты $(\mathbf{x}^\pm,\mathbf{y}^\pm)$ из условия (Coord) являются $\hat{\mathbf{q}}$-каноническими, то инволютивный набор $\mathbf{I}^\pm:=\mathbf{y}^\pm$ является $\hat{\mathbf{q}}$-максимальным. Ввиду того что $(\mathbf{x}^-,\mathbf{y}^-)\circ\rho|_{U^+\cap\Gamma^+}=(\mathbf{x}^+,\mathbf{y}^+)|_{U^+\cap\Gamma^+}$, на «склеенной» окрестности U_ρ корректно определены «склеенные» координаты $(\mathbf{x}_\rho,\mathbf{y}_\rho)$, индуцированные координатами $(\mathbf{x}^+,\mathbf{y}^+)$ и $(\mathbf{x}^-,\mathbf{y}^-)$. Определим локальное действие группы $(\mathbb{R}^n,+)$ на «склеенной» окрестности U_ρ так, что в «склеенных» координатах $(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{y}_\rho)$ любой элемент $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, достаточно малый по модулю, действует сдвигом $(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{y}_\rho) \mapsto (\mathbf{x}_\rho + \mathbf{t}, \mathbf{y}_\rho)$. Ограничение этого локального действия на $U_\rho \setminus \pi_\rho(\Gamma^+) \subset T^*\Omega$ совпадает с действием потоками коммутирующих векторных полей $X_{I_1}, \dots, X_{I_n}$, так как координаты $(\mathbf{x}^\varepsilon, \mathbf{y}^\varepsilon)$ канонические и $\mathbf{I}^\varepsilon = \mathbf{y}^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+,-\}$.

Докажем импликацию (Dyn) $\Longrightarrow$ (Hug). Пусть $\tilde U^\pm$ — окрестности точек $(\hat{\mathbf{q}}_+, \hat{\mathbf{p}}^+) := (\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in \Gamma^+$ и $(\hat{\mathbf{q}}_-, \hat{\mathbf{p}}^-) := \rho(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in \Gamma^-$ в T^*Q и $\mathbf{I}^\pm$ — наборы функций в $\tilde U^\pm$, удовлетворяющие условию (Dyn). Для каждого $\varepsilon \in \{+,-\}$ применим лемму 4.2 к набору функций $\mathbf{I}^\varepsilon$. Так как этот набор $\hat{\mathbf{q}}$-максимален, то в силу леммы 4.2 существуют достаточно малые $\delta > 0$, окрестность $U^\varepsilon \subset \tilde U^\varepsilon$ точки $(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)$ в T^*Q и окрестность $U_{\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon}$ точки $\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon$ в Q, обладающие свойствами, указанными в лемме 4.2. Без ограничения общности считаем, что $U_{\hat{\mathbf{q}}_-} \cap \Gamma = \hat\rho(U_{\hat{\mathbf{q}}_+} \cap \Gamma)$.

Для любого вектора $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, принадлежащего δ-окрестности вектора $\hat{\mathbf{c}} := \mathbf{I}^+(\hat{\mathbf{q}}_+, \hat{\mathbf{p}}^+) = \mathbf{I}^-(\hat{\mathbf{q}}_-, \hat{\mathbf{p}}^-) \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим совместное множество уровня $(\mathbf{I}^\varepsilon)^{-1}(\mathbf{c})$ функций $\mathbf{I}^\varepsilon$ в U^ε, $\varepsilon \in \{+,-\}$. Согласно лемме 4.2 и ввиду инволютивности набора $\mathbf{I}^\varepsilon$ это совместное множество уровня является n-мерным лагранжевым подмногообразием в U^ε, а гамильтоновы векторные поля $X_{I_1^\varepsilon}, \dots, X_{I_n^\varepsilon}$ попарно коммутируют, касательны этому совместному множеству уровня и образуют базис его касательного пространства в любой его точке. Поэтому на окрестности U^ε точки $(\hat{\mathbf{q}}_\varepsilon, \hat{\mathbf{p}}^\varepsilon)$ в T^*Q существует локально свободное локальное действие группы $(\mathbb{R}^n, +)$ потоками коммутирующих векторных полей $X_{I_1^\varepsilon}, \dots, X_{I_n^\varepsilon}$, такое что любое совместное множество уровня набора функций $\mathbf{I}^\varepsilon$ на U^ε инвариантно относительно этого действия.

Существование локального действия группы $(\mathbb{R}^n, +)$ на «склеенной» окрестности U_ρ со свойствами из условия (Dyn) влечёт то (и даже равносильно тому), что для любого $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $|\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}| < \delta$, верны следующие равенства 1-форм на гиперповерхности $U_{\hat{\mathbf{q}}_+} \cap \Gamma$ в $U_{\hat{\mathbf{q}}_+}$:

$$\hat\rho^*(\xi^-_{\mathbf{c},i}|_{U_{\hat{\mathbf{q}}_-} \cap \Gamma}) = \xi^+_{\mathbf{c},i}|_{U_{\hat{\mathbf{q}}_+} \cap \Gamma}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{27}$$

В частности, равенство (27) верно при $i = 1$. Ввиду формул для 1-форм $\xi^\pm_{\mathbf{c},1}$, аналогичных первой формуле из (19), равенство (27) при $i = 1$ переписывается в виде

$$\hat\rho^*(\mathbf{p}^-_{\mathbf{c}}|_{U_{\hat{\mathbf{q}}_-} \cap \Gamma}) = \mathbf{p}^+_{\mathbf{c}}|_{U_{\hat{\mathbf{q}}_+} \cap \Gamma}. \tag{28}$$

Равенство (28) равносильно (ввиду равенств $\mathbf{I}^- \circ \rho|_{U^+ \cap \Gamma^+} = \mathbf{I}^+|_{U^+ \cap \Gamma^+}$ и $\pi \circ \rho = \hat\rho \circ \pi|_{\Gamma^+}$) равенству $\rho^*(\alpha|_{U^- \cap \Gamma^-}) = \alpha|_{U^+ \cap \Gamma^+}$, где $\alpha = \mathbf{p}\, d\mathbf{q}$ — форма Лиувилля. Так как точка $\hat{\mathbf{q}} \in \Gamma$ любая, то $\rho^*(\alpha|_{\Gamma^-}) = \alpha|_{\Gamma^+}$, т. е. закон преломления ρ стандартен.

Докажем импликацию (Hug) $\Longrightarrow$ (Ham$'$). Приведём два способа доказательства этой импликации.

Первый способ. Наши доказательства предыдущих импликаций обратимы, точнее, позволяют получить импликации

$$\text{(Hug)} \Longrightarrow \text{(Dyn)} \Longrightarrow \text{(Coord)} \Longrightarrow \text{(Ham}'\text{)}.$$

Второй способ. Так как $\rho\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ — закон преломления, то (по пункту а) определения 2.3 закона преломления) $H\circ\rho = H|_{\Gamma^+}$ и фазовые траектории гамильтоновой системы с функцией Гамильтона H на симплектическом многообразии (M,ω) с краем $\partial M = \Gamma^+ \sqcup \Gamma^-$ выходят из M (входят в M) через его граничную гиперповерхность Γ^+ (соответственно через Γ^-) и трансверсально пересекают $\Gamma^\pm$ (см. обозначение 2.2). Так как по условию (Hug) закон преломления ρ стандартен, то $\rho^*(\omega|_{\Gamma^-}) = \omega|_{\Gamma^+}$. Отсюда согласно общей процедуре «гамильтонова склеивания» Лазуткина [12, гл. I, § 4 и 6] следует, что существуют окрестности U^ε гиперповерхностей Γ^ε в T^*Q, $\varepsilon \in \{+,-\}$, и симплектоморфизм $\tilde\rho\colon (U^+,\omega) \to (U^-,\omega)$, такие что $\tilde\rho|_{\Gamma^+} = \rho$ и $H\circ\tilde\rho = H$.

Докажем утверждение б) теоремы 2.6. Предположим, что выполнено условие (Ham$'$) из утверждения а) и каждая окрестность U^ε является объединением дуг фазовых траекторий в T^*Q, имеющих непустые пересечения с гиперповерхностью Γ^ε, $\varepsilon\in\{+,-\}$. Покажем, что $\tilde\rho\colon U^+\to U^-$ коммутирует с любым преобразованием (6). Другими словами, нам нужно проверить равенство $\rho(\mathbf{q},\lambda\mathbf{p}) = (\mathbf{q}',\lambda\mathbf{p}')$ для любой точки $(\mathbf{q},\mathbf{p})\in U^+$ и её образа $\rho(\mathbf{q},\mathbf{p}) =: (\mathbf{q}',\mathbf{p}')\in U^-$. В случае $(\mathbf{q},\mathbf{p})\in U^+\cap\Gamma^+$ это равенство выполнено в силу $\mathbb{R}^*$-эквивариантности отображения $\tilde\rho|_{\Gamma^+}=\rho$ (см. пункт а) определения 2.3). Аналогично шагу 2 в доказательстве утверждения б) леммы 4.1 отсюда и из однородности функции H по импульсам выводится требуемое равенство для любой точки $(\mathbf{q},\mathbf{p})\in U^+$ (поскольку симплектоморфизм $\tilde\rho$ сохраняет H и ω, а потому переводит фазовые траектории в фазовые траектории). Итак, симплектоморфизм $\tilde\rho\colon U^+\to U^-$ коммутирует с любым преобразованием (6). Значит, он сохраняет векторное поле X_α (см. обозначение 2.1), а потому и 1-форму Лиувилля α.

Предположим, что выполнено условие (Ham) утверждения а) теоремы 2.6. Так как (Ham) влечёт (Ham$'$), то существует симплектоморфизм $\tilde\rho\colon U^+\to U^-$ со свойствами из условия (Ham$'$). Значит, по доказанному выше $\tilde\rho^*\alpha|_{U^-} = \alpha|_{U^+}$. Продолжим проекцию $\pi_\rho\colon M\to M_\rho$ до отображения $\pi_{\tilde\rho}\colon M\cup U^+\cup U^-\to M_\rho$ следующим образом. Для любой точки $x\in M$ положим $\pi_{\tilde\rho}(x) := \pi_\rho(x)$, при $x\in U^+\setminus M$ положим $\pi_{\tilde\rho}(x) := \pi_\rho(\tilde\rho(x))$, а при $x\in U^-\setminus M$ положим $\pi_{\tilde\rho}(x) := \pi_\rho\bigl(\tilde\rho^{-1}(x)\bigr)$. Нетрудно проверяется, что построенное отображение $\pi_{\tilde\rho}$ корректно определено и гладкое и что существует гладкая 1-форма α_ρ на M_ρ, такая что $\pi_{\tilde\rho}^*\alpha_\rho = \alpha$. Поэтому $\pi_\rho^*\alpha_\rho = \alpha|_M$ и $\omega_\rho = d\alpha_\rho$ (ввиду $\pi_\rho^*(d\alpha_\rho) = d\alpha = \omega = \pi_\rho^*\omega_\rho$).

Пусть $U\subset M_\rho$ — открытое подмножество и $I\colon U\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, гладкая и находящаяся в инволюции с H на $U\setminus\bigl(\pi_\rho(\Gamma^+)\bigr)$. Покажем, что I гладкая на U. Для любой точки $x\in\Gamma^+$ рассмотрим дугу фазовой траектории $\gamma\colon(-2\varepsilon,2\varepsilon)\to U^+$, такую что $\gamma(0)=x$. Пусть $y:=\gamma(-\varepsilon)$ и $g^t_{H_\rho}$ — фазовый поток гамильтоновой системы $(M_\rho,\omega_\rho,H_\rho)$. Отображение $g^\varepsilon_{H_\rho}$ диффеоморфно переводит малую окрестность $U_y\subset M_\rho\setminus\pi_\rho(\Gamma^+)\approx M\setminus(\Gamma^+\cup\Gamma^-)$ точки $\pi_\rho(y)$ в некоторую окрестность U_x точки $\pi_\rho(x)$ в M_ρ. Так как I постоянна вдоль фазовых траекторий, то $I\circ g^\varepsilon_{H_\rho}|_{U_y} = I|_{U_y}$. Отсюда и из гладкости функции $I|_{U_y}$ получаем гладкость функции $I|_{U_x}$. Значит, I гладкая всюду на U.

Покажем, что гладкая структура на M_ρ, удовлетворяющая условию (Ham), единственна. Снабдим M_ρ любой такой гладкой структурой. Так как ω_ρ — гладкая 2-форма на M_ρ и $\pi_\rho^*\omega_\rho = \omega$, то дифференциал отображения π_ρ в любой точке $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in M$ является изоморфизмом, поэтому π_ρ диффеоморфно переводит любое гладкое подмногообразие в M в гладкое подмногообразие в M_ρ. Значит, π_ρ диффеоморфно переводит гладкое подмногообразие $\Gamma^+ \subset \partial M$ в гладкое $(2n-1)$-мерное подмногообразие $\pi_\rho(\Gamma^+) = \pi_\rho(\Gamma^-) \subset M_\rho$. Так как $H_\rho \circ \pi_\rho = H|_{\Gamma^+}$ и фазовые траектории геодезического потока трансверсальны подмногообразию Γ^+, то фазовые траектории «склеенной» гамильтоновой системы $(M_\rho, \omega_\rho, H_\rho)$ трансверсальны подмногообразию $\pi_\rho(\Gamma^+) = \pi_\rho(\Gamma^-)$. Легко показать, что существует гладкая положительная функция $T\colon \Gamma^+ \to \mathbb{R}$, такая что существуют дуги фазовых траекторий $\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\colon (-2T(\mathbf{q},\mathbf{p}), 0] \to M$ и $\gamma_{\rho(\mathbf{q},\mathbf{p})}\colon \big[0, 2T(\mathbf{q},\mathbf{p})\big) \to M$ в M, $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \hat{U}$, причём $\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(0) = (\mathbf{q},\mathbf{p})$ и эти дуги попарно не пересекаются. Пусть $(x^1, \ldots, x^{2n-1})$ — регулярные координаты на открытом подмножестве $\hat{U} \subset \Gamma^+$ в Γ^+. Пусть U — объединение дуг $\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(-2T(\mathbf{q},\mathbf{p}), 0]$ и $\gamma_{\rho(\mathbf{q},\mathbf{p})}\big[0, 2T(\mathbf{q},\mathbf{p})\big)$, таких что $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \hat{U}$. Тогда U является окрестностью подмногообразия $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ в M, а $U_\rho := \pi_\rho(U)$ — окрестностью подмногообразия $\pi_\rho(\Gamma^+)$ в M_ρ. Определим в U функции $(y^1, \ldots, y^{2n})$ условиями $y^i|_{\hat{U}\cup\rho(\hat{U})} = x^i$, $i = 1, \ldots, 2n-1$, $y^n\big(\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(t)\big) := t$ при $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \hat{U}$ и $-2T(\mathbf{q},\mathbf{p}) < t \leqslant 0$, $y^n\big(\gamma_{\rho(\mathbf{q},\mathbf{p})}(t)\big) := t$ при $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \hat{U}$ и $0 \leqslant t < 2T(\mathbf{q},\mathbf{p})$. Легко убедиться, что такие функции $(y^1, \ldots, y^{2n})$ существуют и индуцируют корректно определённые «склеенные» функции $(y_\rho^1, \ldots, y_\rho^{2n})$ на U_ρ, такие что $y_\rho^i \circ \pi_\rho = y^i$, $i = 1, \ldots, 2n$. Отсюда следует, что $(y_\rho^1, \ldots, y_\rho^{2n})$ являются регулярными координатами в $U_\rho \subset M_\rho$. Значит, такие локальные координаты $(y_\rho^1, \ldots, y_\rho^{2n})$ и всевозможные локальные регулярные координаты на $M \setminus \partial M$ образуют гладкий атлас на M_ρ, согласованный с рассматриваемой гладкой структурой на M_ρ. Отсюда следует единственность изучаемой гладкой структуры на M_ρ.

Единственность симплектической структуры ω_ρ очевидна. Действительно, на открытом подмножестве $\pi_\rho(M \setminus \partial M) \subset M_\rho$ (а потому и на его замыкании M_ρ) она однозначно определена условием $\pi_\rho^*\omega_\rho = \omega$, так как отображение $\pi_\rho|_{M\setminus\partial M}$ является гладким гомеоморфизмом на свой образ.

Теорема 2.6 доказана. □

6. Динамическая характеризация почти гюйгенсовых законов преломления

В этом разделе доказывается теорема 2.7. Докажем следующие импликации:

$$(\mathrm{Symp}') \Longrightarrow (\mathrm{Dyn}') \Longrightarrow (\mathrm{Hug}') \Longrightarrow (\mathrm{Symp}').$$

Докажем импликацию $(\mathrm{Symp}') \Longrightarrow (\mathrm{Dyn}')$. По утверждению а) леммы 4.1 точка $(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \in \sigma^+$ обладает окрестностью $\hat{U}$ в σ^+, на которой существует инволютивный набор функций $\mathbf{J} = (J_2, \ldots, J_n)$, такой что $(n-1)$-форма

$dJ_2\wedge\ldots\wedge dJ_n|_{\hat U\cap(T^*_{\hat{\mathbf q}}Q)}$ отлична от 0 в точке $(\hat{\mathbf q},\hat{\mathbf p})$. По условию (Symp′) локальное отображение последования (13) является симплектоморфизмом. Так как отображение $S_+\colon\sigma^+\to\tilde\sigma^+$ тоже является симплектоморфизмом, то набор функций $\mathbf J^+:=\mathbf J\circ S_+^{-1}$ на $\hat U^+:=S_+(\hat U)\subset\tilde\sigma^+$ и набор функций $\mathbf J^-:=\mathbf J^+\circ P^{-1}$ на $\hat U^-:=P(\hat U^+)\subset\tilde\sigma^-$ тоже инволютивны. Из соотношений $P^*(\omega|_{\tilde\sigma^-})=\omega|_{\tilde\sigma^+}$ и $\mathbf J^-\circ P|_{\hat U^+}=\mathbf J^+|_{\hat U^+}$ получаем требуемое соотношение между гамильтоновыми векторными полями: $P_*(X_{J_i^+})=X_{J_i^-}$, $i=2,\ldots,n$.

Докажем импликацию (Dyn′) $\Longrightarrow$ (Hug′) Для каждого $\varepsilon\in\{+,-\}$ применим утверждение б) леммы 4.1 к набору функций $\mathbf J^\varepsilon\circ S_\varepsilon$, заданному в некоторой окрестности $\hat U^\varepsilon$ точки $(\hat{\mathbf q}_\varepsilon,\hat{\mathbf p}^\varepsilon):=S_\varepsilon^{-1}(\tilde{\mathbf q},\tilde{\mathbf p})\in\sigma^\varepsilon$ в σ^ε. Получим окрестность U^ε точки $(\hat{\mathbf q}_\varepsilon,\hat{\mathbf p}^\varepsilon)$ в T^*Q, такую что $U^\varepsilon\cap\sigma^\varepsilon\subset\hat U^\varepsilon$, и соответствующий $\hat{\mathbf q}_\varepsilon$-максимальный инволютивный набор функций $\mathbf I^\varepsilon$ в окрестности U^ε. К полученному набору функций $\mathbf I^\varepsilon$ применим лемму 4.2 и дальнейшие рассуждения из доказательства импликации (Dyn) $\Longrightarrow$ (Hug) утверждения а) теоремы 2.6 (см. раздел 5). При этом без ограничения общности считаем, что $|\mathbf I^\varepsilon(\mathbf q,\mathbf p)-\hat{\mathbf c}|<\delta$ для любого $(\mathbf q,\mathbf p)\in U^\varepsilon$.

По условию (Dyn′) имеем $P_*(X_{J_i^+})=X_{J_i^-}$, $i=2,\ldots,n$. Это условие влечёт то (и даже равносильно тому), что для любого $\mathbf c\in\mathbb R^n$, такого что $|\mathbf c-\hat{\mathbf c}|<\delta$ и $c_1=1/2$, верны все равенства в (27), кроме первого, т. е. верны следующие равенства 1-форм на гиперповерхности $U_{\hat{\mathbf q}_+}\cap\Gamma$ в $U_{\hat{\mathbf q}_+}$:

$$\hat\rho^*(\xi^-_{\mathbf c,i}|_{U_{\hat{\mathbf q}_-}\cap\Gamma})=\xi^+_{\mathbf c,i}|_{U_{\hat{\mathbf q}_+}\cap\Gamma},\quad i=2,\ldots,n.$$

Эти равенства, ввиду формул для 1-форм $\xi^\pm_{\mathbf c,i}$, $i=1,\ldots,n$, аналогичных формулам из (19), переписываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\big(\hat\rho^*(\mathbf p^-_{\mathbf c}|_{U_{\hat{\mathbf q}_-}\cap\Gamma})-\mathbf p^+_{\mathbf c}|_{U_{\hat{\mathbf q}_+}\cap\Gamma}\big)=0,\quad i=2,\ldots,n,$$

значит, 1-форма

$$\hat\rho^*\big(\mathbf p^-_{\mathbf c}|_{U_{\hat{\mathbf q}_-}\cap\Gamma}\big)-\mathbf p^+_{\mathbf c}|_{U_{\hat{\mathbf q}_+}\cap\Gamma}=:\beta \tag{29}$$

в $U_{\hat{\mathbf q}_+}\cap\Gamma$, где $\mathbf c=(c_1,\ldots,c_n)$ и $c_1=1/2$, в действительности не зависит от параметров $c_2,\ldots,c_n$, т. е. является одной 1-формой (а не семейством 1-форм) в $U_{\hat{\mathbf q}_+}\cap\Gamma$.

Так как набор $\mathbf I^\varepsilon$ инволютивен, то по утверждениям в) и г) леммы 4.2 1-форма $\mathbf p^\varepsilon_{\mathbf c}$ замкнута для любого $\mathbf c\in\mathbb R^n$, $|\mathbf c-\hat{\mathbf c}|<\delta$, $\varepsilon\in\{+,-\}$. Поэтому 1-форма β в (29) тоже замкнута, а значит, точна в силу леммы Пуанкаре (так как по построению окрестность $U_{\hat{\mathbf q}_+}\cap\Gamma$ гомеоморфна диску), т. е. имеет вид

$$\beta=dG$$

для некоторой гладкой функции G в $U_{\hat{\mathbf q}_+}\cap\Gamma$.

Так как $\pi\circ\rho=\hat\rho\circ\pi$ и $\alpha|_{U^\pm\cap(T^*_{\hat{\mathbf q}}Q)}=0$ для любой точки $(\mathbf q,\mathbf p)\in U^\pm\cap\Gamma^\pm$, то

$$\rho^*(\alpha|_{U^-\cap\sigma^-})-\alpha|_{U^+\cap\sigma^+}=(\pi^*\beta)|_{U^+\cap\sigma^+}=d(G\circ\pi)|_{U^+\cap\sigma^+},$$

где $\alpha = \mathbf{p}\,d\mathbf{q}$ — форма Лиувилля. Значит, закон преломления ρ почти стандартен для уровня энергии $E = 1/2$.

Докажем импликацию (Hug′) $\Longrightarrow$ (Symp′). Из условия (Hug′) ввиду импликации (a) $\Longrightarrow$ (c) из предложения 3.1 получаем, что $\rho|_{\sigma^+}\colon \sigma^+ \to \sigma^-$ — симплектоморфизм. Так как $\rho|_{\sigma^+}$ и $S_\pm$ — симплектоморфизмы, то $P = S_- \circ \rho \circ S_+^{-1}$ тоже симплектоморфизм.

Теорема 2.7 доказана. □

7. Примеры интегрируемых склеенных геодезических потоков. Критерий интегрируемости по Лиувиллю и аналог теоремы Понселе

Пусть теперь $Q \subset \mathbb{R}^2$ — открытое подмножество с римановой метрикой g, $n = \dim Q = 2$, $\Omega \subset Q$ — область, замыкание которой $\bar\Omega$ является компактным многообразием с непустым гладким краем $\Gamma = \partial\Omega \subset Q$. В частности, $\Gamma = \partial\Omega$ — замкнутая регулярная (необязательно связная) кривая. Пусть задана гладкая функция $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Рассмотрим однопараметрическое семейство замкнутых подмножеств

$$\gamma_c := \Phi^{-1}(c) \subset \Omega, \quad c \in (a,b), \tag{30}$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ — связные компоненты области Ω, $\Gamma_i := \partial\Omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $\Gamma_{N+1} := \Gamma_1$. Обозначим

$$\Omega' := \Phi^{-1}(a,b), \quad \Omega'_i := \Omega_i \cap \Omega'.$$

Предположим, что для любой связной компоненты Ω_i и любого $c \in (a,b)$ выполнены следующие условия:

(i) множество $\gamma_c \cap \bar\Omega_i$ непусто, компактно, связно и является неособой линией уровня функции Φ (т. е. $d\Phi|_{\mathbf{q}} \neq 0$ для любой точки $\mathbf{q} \in \gamma_c$);

(ii) кривая $\gamma_c \cap \bar\Omega_i$ имеет ненулевую геодезическую кривизну (в смысле римановой метрики g на Q) в любой своей точке;

(iii) любая геодезическая $L \subset \bar\Omega_i$, касательная к кривой $\gamma_c \cap \bar\Omega_i$, трансверсально пересекает граничную кривую Γ_i ровно в двух точках, и обе эти точки не сопряжены (в смысле метрики g) с точкой касания вдоль L;

(iv) если геодезическая $L \subset \bar\Omega_i$ касается кривой $\gamma_c \cap \bar\Omega_i$, то пересечение $L \cap \Omega'_i$ линейно связно.

Мы покажем (в (36) в разделе 7.2), что в этом случае геодезическая L из п. (iv) касается кривой $\gamma_c \cap \bar\Omega_i$ в единственной точке. Ориентированную геодезическую L назовём *положительной*, если её вектор скорости в точке касания индуцирует положительную (против часовой стрелки) ориентацию кривой $\gamma_c \cap \bar\Omega_i$.

Мы строим (в разделе 7.2) открытое подмножество $U \subset T^*\bar{\Omega}$, образованное поднятиями положительных геодезических в $T^*\bar{\Omega}$ и такое, что пересечения U с лагранжевыми подмногообразиями $T^*_{\mathbf{q}}Q$, $\mathbf{q} \in \Gamma$, имеют вид

$$U \cap (T^*_{\mathbf{q}}Q) = U^+_{\mathbf{q}} \cup U^-_{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} \in \Gamma, \tag{31}$$

для некоторых непустых открытых подмножеств $U^\varepsilon_{\mathbf{q}} \subset \tilde{\Gamma}^\varepsilon \cap (T^*_{\mathbf{q}}Q)$, $\varepsilon \in \{+,-\}$ (см. обозначение 2.2), где $\varphi_{-1}\colon T^*Q \to T^*Q$, $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q},-\mathbf{p})$ (ср. (6)). Мы также строим гладкий дополнительный первый интеграл

$$I\colon U \cup \varphi_{-1}(U) \to (a,b) \subset \mathbb{R} \tag{32}$$

геодезического потока, обладающий следующими свойствами:

(v) функция I является $\mathbb{R}^*$-инвариантной (т. е. инвариантной относительно всех преобразований (6)) и φ_{-1}-инвариантной;

(vi) для любой точки $\mathbf{q} \in \Gamma$ инволютивная пара функций

$$\mathbf{I} = (H, I)\colon U \cup \varphi_{-1}(U) \to \mathbb{R}_{>0} \times (a,b) \subset \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{q}$-максимальна (пункт а) определения 2.5), а её ограничения на лагранжевы подмногообразия $U^\pm_{\mathbf{q}}$ из (31) являются диффеоморфизмами $U^\pm_{\mathbf{q}} \to \mathbb{R}_{>0} \times (a,b)$.

Из свойств (v) и (vi) функции I легко получаем следующее предложение.

Предложение 7.1. *Предположим, что двумерное риманово многообразие $(\bar{\Omega}, g)$ с краем $\Gamma = \partial\Omega$ и функция $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям* (i)—(iv) *выше. Тогда для любого диффеоморфизма $\hat{\rho}\colon \Gamma \to \Gamma$ (например, как в пунктах* а)—в) *примера* 1.1), *такого что $\hat{\rho}(\Gamma_i) = \Gamma_{i+1}$, и любого $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in \{1,-1\}^N$ существует единственный закон преломления $\rho = \rho_{\mathbf{I},\boldsymbol{\varepsilon}}\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ для риманова многообразия $(\bar{\Omega}, g)$ и диффеоморфизма $\hat{\rho}$, где $\Gamma^\pm := \big(U \cup \varphi_{-1}(U)\big) \cap \tilde{\Gamma}^\pm$, сохраняющий пару функций $\mathbf{I}$ и переводящий $U \cap \Gamma^+ \cap T^*\bar{\Omega}_i$ в $\varphi_{\varepsilon_i}(U) \cap \Gamma^- \cap T^*\bar{\Omega}_{i+1}$, т. е. определённый условиями*

$$\pi \circ \rho = \hat{\rho} \circ \pi|_{\Gamma^+}, \quad \mathbf{I} \circ \rho = \mathbf{I}|_{\Gamma^+},$$
$$\rho(U \cap \Gamma^+ \cap T^*\bar{\Omega}_i) = \varphi_{\varepsilon_i}(U) \cap \Gamma^- \cap T^*\bar{\Omega}_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Этот закон преломления $\mathbb{R}^*$-эквивариантен. Соответствующий склеенный геодезический поток имеет дополнительный «склеенный» первый интеграл I_ρ, который удовлетворяет всем условиям следствия 1.3 (*т. е. условию* (Dyn_1) *из утверждения* а) *теоремы* 2.6). □

Введём в области Ω' функцию

$$L = L(\mathbf{q}) := \eta_i \frac{|\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{q})|}{k(\mathbf{q})}, \quad \mathbf{q} \in \Omega'_i,$$

где через $k(\mathbf{q})$ обозначена геодезическая кривизна кривой $\gamma_{\Phi(\mathbf{q})}$ в точке $\mathbf{q}$, а знак $\eta_i \in \{+,-\}$ показывает, сонаправлен ли вектор $\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{q})$ с внешней нормалью кривой $\gamma_{\Phi(\mathbf{q})}\cap\Omega_i'$. Из построения функции I (см. раздел 7.2 ниже) легко следует, что при любом $\mathbf{c}=(E,c)\in\mathbb{R}_{>0}\times(a,b)$ множество

$$\tilde\gamma_{\mathbf{c}}:=\pi^{-1}(\gamma_c)\cap\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})$$

является несвязным объединением $2N$ гладких окружностей $\tilde\gamma^+_{\mathbf{c},i}\subset U\cap T^*\Omega_i'$ и $\tilde\gamma^-_{\mathbf{c},i}=\varphi_{-1}(\tilde\gamma^+_{\mathbf{c},i})$, причём каждая окружность $\tilde\gamma^\pm_{\mathbf{c},i}$ допускает параметризацию $\tilde\gamma^\pm_{\mathbf{c},i}(s)$, такую что $\alpha(d\tilde\gamma^\pm_{\mathbf{c},i}(s)/ds)=2E$. Нетрудно проверяется, что

$$\frac{d\tilde\gamma^\pm_{\mathbf{c},i}(s)}{ds}=\left(X_H+\frac{2E}{L\circ\pi}X_I\right)\bigg|_{\tilde\gamma^\pm_{\mathbf{c},i}(s)} \tag{33}$$

и что множество

$$\sigma_E:=\bigcup_{c\in(a,b)}\tilde\gamma_{\mathbf{c}}\subset H^{-1}(E)$$

является гладкой двумерной поверхностью, трансверсальной векторному полю X_H в $H^{-1}(E)$ (т. е. является секущей поверхностью или сечением Пуанкаре). Так как множества $\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{c})$ компактны, определено *отображение последования*

$$P_E\colon\sigma_E\to\sigma_E \tag{34}$$

для склеенного геодезического потока, аналогичное отображению (13).

Применим к закону преломления $\rho=\rho_{\mathbf{I},\boldsymbol{\varepsilon}}$ (см. предложение 7.1) критерии из следствия 1.3 и теоремы 1.4. Для этого фиксируем пару чисел $\hat{\mathbf{c}}=(\hat E,\hat c)\in\mathbb{R}_{>0}\times(a,b)$. Рассмотрим ограничение склеенного геодезического потока на совместное множество уровня $T^\pm_{\hat{\mathbf{c}}}:=\mathbf{I}_\rho^{-1}(\hat{\mathbf{c}})$ «склеенных» первых интегралов $\mathbf{I}_\rho:=(H_\rho,I_\rho)$ (т. е. *задачу о вписанно-описанных ломаных*, см. раздел 7.1). Из утверждений а) и б) предложения 1.2 и утверждений а$'$) и б$'$) теоремы 1.4 получаем следующее достаточное (и, в действительности, необходимое) условие того, что (интегрируемый при помощи «склеенных» первых интегралов $\mathbf{I}_\rho$) склеенный геодезический поток *интегрируем по Лиувиллю* на торе $T^\pm_{\hat{\mathbf{c}}}$ (в смысле аналога условия (Dyn) из утверждения а) теоремы 2.6 или условия (Dyn$'$) из теоремы 2.7), а значит, выполнен аналог утверждения теоремы Понселе о замыкании.

Предложение 7.2. *Множество $T^\pm_{\hat{\mathbf{c}}}:=\mathbf{I}_\rho^{-1}(\hat{\mathbf{c}})$ является либо двумерным тором, либо несвязным объединением двух двумерных торов $T^+_{\hat{\mathbf{c}}}$ и $T^-_{\hat{\mathbf{c}}}=\varphi_{-1}(T^+_{\hat{\mathbf{c}}})$ в зависимости от знака $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_N$ (-1 или $+1$), и $\tilde\gamma_{\hat{\mathbf{c}}}=\sigma_{\hat E}\cap T^\pm_{\hat{\mathbf{c}}}$. Предположим, что закон преломления ρ из предложения 7.1 либо* а) *гюйгенсов, либо* б) *почти гюйгенсов для уровня энергии $\hat E$, либо хотя бы совпадает в линейном приближении (см. (4)) на замкнутой кривой $\Gamma^+\cap T^\pm_{\hat{\mathbf{c}}}$ с некоторым* а$'$) *гюйгенсовым или* б$'$) *почти гюйгенсовым для уровня энергии $\hat E$ законом. Тогда*

а) *склеенный геодезический поток в некоторой окрестности тора $T^\pm_{\hat{\mathbf{c}}}$,*

б) *отображение последования 34 при $E=\hat E$ в некоторой окрестности замкнутой кривой $\tilde\gamma_{\hat{\mathbf{c}}}=\sigma_{\hat E}\cap T^\pm_{\hat{\mathbf{c}}}$,* а$'$) *ограничение склеенного геодезического потока на тор* $T^{\pm}_{\hat{\mathbf{c}}}$,

б$'$) *ограничение отображения последования* (34) *на замкнутую кривую* $\tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}}}$

(*соответственно*) *интегрируемо по Лиувиллю* (*т. е. верны свойства из утверждений* а), б) *следствия* 1.3 *или утверждений* а$'$), б$'$) *теоремы* 1.4 *соответственно*)*. В частности, движение по тору* $T^{\pm}_{\hat{\mathbf{c}}}$*, порождённое склеенным геодезическим потоком, является условно-периодичным* (*с точностью до перепараметризации «скленных фазовых траекторий» в случаях* б), б$'$))*. Более того,* 1*-форма* $\big(\alpha/(L\circ\pi)\big)|_{\tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}}}}$ (*и отвечающая ей мера*) *на кривой* $\tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}}}$ *не имеет нулей и сохраняется при отображении последования* $P_{\hat{E}}|_{\tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}}}}\colon \tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}}}\to\tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}}}$*. Поэтому отображение последования* $P^N_{\hat{E}}|_{\tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}},1}}\colon \tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}},1}\to\tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}},1}$ *является жёстким поворотом в некоторой регулярной параметризации окружности* $\tilde{\gamma}_{\hat{\mathbf{c}},1}$. □

Отметим, что условия а), б), а$'$), б$'$) в предложении 7.2 ослабить нельзя ввиду критериев из утверждений а), б) следствия 1.3 и утверждений а$'$), б$'$) теоремы 1.4 соответственно.

7.1. Приложение к задаче о вписанно-описанных ломаных

Определение 7.3. Пусть Ω связно (т. е. $N=1$). Для любого $c\in(a,b)$ обозначим через $\Omega_c\subset\Omega$ область (плоское кольцо), ограниченную кривыми Γ и γ_c (см. (30)).

а) *Вписанно-описанной ломаной* в области Ω_c назовём ломаную геодезическую, вписанную во «внешнюю» граничную кривую Γ и описанную около «внутренней» граничной кривой γ_c. Таким образом, все вершины этой ломаной геодезической принадлежат кривой Γ, а все её звенья касаются кривой γ_c.

б) Рассмотрим двухпараметрическое семейство (кусочно-гладких) задач (типа обобщённого биллиарда, см. пример 1.1) о движении частицы с постоянной (в смысле метрики g) скоростью вдоль таких ломаных в направлении против часовой стрелки, где параметрами семейства являются числа $E>0$ (кинетическая энергия частицы) и $c\in(a,b)$. Это семейство задач назовём (*кусочно-гладкой*) *задачей о вписанно-описанных ломаных* (*в области, ограниченной плоской кривой* Γ *и одной из плоских кривых* γ_c данного семейства).

Из явной конструкции дополнительного первого интеграла I (см. раздел 7.2) следует, что вписанно-описанная ломаная в области Ω_c — это «склеенная геодезическая» обобщённого биллиардного потока на $(\bar{\Omega},g)$ с законом отражения $\rho=\rho_{\mathbf{I},1}$ для $\hat{\rho}=\mathrm{id}_\Gamma$ (см. пример 1.1 и предложение 7.1), т. е. проекция на $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_{\hat{\rho}}$ «склеенной фазовой траектории» на торе $T^{\pm}_{\mathbf{c}}:=\mathbf{I}_\rho^{-1}(\mathbf{c})$ в «склеенном фазовом пространстве», где $\mathbf{c}=(E,c)$ и $2E>0$ — это квадрат скорости движения. Другими словами, при $\hat{\rho}=\mathrm{id}_\Gamma$ и $\rho=\rho_{\mathbf{I},1}$ любая «склеенная геодезическая» обобщённого биллиардного потока имеет *огибающую* (т. е. *каустику*), совпадающую с одной из кривых γ_c.

Таким образом, если $\hat{\rho} = \mathrm{id}_\Gamma$ в предложении 7.1 и для некоторого $\hat{\mathbf{c}} = (\hat{E}, \hat{c}) \in \mathbb{R}_{>0} \times (a,b)$ выполнен один из случаев а), б), а$'$), б$'$) из предложения 7.2, то $\boldsymbol{\varepsilon} = 1$ и задача о вписанно-описанных ломаных в области $\Omega_{\hat{c}}$ удовлетворяет аналогу утверждения *теоремы Понселе о замыкании*: если одна из вписанно-описанных ломаных является n-звенной замкнутой ломаной, то и любая другая вписанно-описанная ломаная является n-звенной замкнутой ломаной. Если при этом выполнен случай а) или а$'$), то длины этих ломаных равны.

7.2. Построение первого интеграла I геодезического потока на $(\bar{\Omega}, g)$ с помощью функции Φ

Предположим, что выполнены условия (i)—(iv) из начала раздела 7. Опишем построение дополнительного первого интеграла I геодезического потока в $(\bar{\Omega}, g)$, для которого верны свойства (v) и (vi) для (32), а потому и предложения 7.1 и 7.2.

Для любой точки $\mathbf{q} \in \Omega_i'$ обозначим через $\mathbf{v_q} \in T_\mathbf{q}Q$ единичный (в смысле метрики g) касательный вектор к кривой $\gamma_{\Phi(\mathbf{q})}$ в точке $\mathbf{q}$, индуцирующий положительную (против часовой стрелки) ориентацию кривой $\gamma_{\Phi(\mathbf{q})} \cap \bar{\Omega}_i$. Ввиду непрерывности функции Φ подмножество $\Omega_i' \subset \Omega_i$ открыто в Ω_i. Согласно условию (i) вектор $\mathbf{v_q}$ непрерывно зависит от точки $\mathbf{q} \in \Omega_i'$. Рассмотрим ковектор

$$\eta_\mathbf{q} := \langle \mathbf{v_q}, \cdot \rangle \in T^*_\mathbf{q}Q.$$

Для любой точки $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*\Omega_i$ обозначим через

$$\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(t), \quad t \in [-t_-, t_+], \tag{35}$$

фазовую траекторию геодезического потока в $T^*\bar{\Omega}_i$, такую что $\gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(0) = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\pi \circ \gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(-t_-) \in \Gamma_i$ и $\pi \circ \gamma_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(t_+) \in \Gamma_i$, где $t_- = t_-(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > 0$, $t_+ = t_+(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > 0$. (Из теоремы о неявной функции и первой части условия (iii) нетрудно вывести, что такие функции t_-, t_+ существуют и являются гладкими в окрестности любой точки вида $(\mathbf{q}, \eta_\mathbf{q}) \in T^*\Omega_i'$.) Определим подмножество $\Pi_i \subset \Omega_i' \times \mathbb{R}$, отображение $f_i \colon \Pi_i \to T^*\bar{\Omega}_i$ и подмножество $U_i \subset T^*\bar{\Omega}_i$ формулами

$$\Pi_i := \{(\mathbf{q}, t) \in \Omega_i' \times \mathbb{R} \mid t \in [-t_-(\mathbf{q}, \eta_\mathbf{q}), t_+(\mathbf{q}, \eta_\mathbf{q})]\} \subset \Omega_i' \times \mathbb{R},$$

$$f_i \colon \Pi_i \times \mathbb{R}_{>0} \to T^*\bar{\Omega}_i, \quad f_i(\mathbf{q}, t, \lambda) := \varphi_\lambda\big(\gamma_{\mathbf{q},\eta_\mathbf{q}}(t)\big), \quad (\mathbf{q}, t, \lambda) \in \Pi_i \times \mathbb{R}_{>0},$$

$$U_i := f_i(\Pi_i \times \mathbb{R}_{>0}) \subset T^*\bar{\Omega}_i.$$

Из условий (ii), (iv) и теоремы о неявной функции следует, что U_i открыто в $T^*\bar{\Omega}_i$, векторное поле X_H трансверсально поверхности $\{(\mathbf{q}, \eta_\mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \Omega_i'\}$, а f_i является диффеоморфизмом на свой образ, поэтому

$$\tilde{\gamma}_\mathbf{c} = \{(\mathbf{q}, \pm\sqrt{2E}\eta_\mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \gamma_c\}, \quad \sigma_E = \{(\mathbf{q}, \pm\sqrt{2E}\eta_\mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in \Omega'\}. \tag{36}$$

Ввиду первой части условия (iii) имеем $U_i \cap (T^*Q|_\Gamma) \subset \tilde{\Gamma}^+ \cup \tilde{\Gamma}^-$ (см. обозначение 2.2). Положим

$$U := \cup_{i=1}^N U_i, \quad \Gamma_i^\varepsilon := U_i \cap \tilde{\Gamma}^\varepsilon = \{f_i(\mathbf{q}, \varepsilon t_\varepsilon(\mathbf{q}, \eta_\mathbf{q}), \lambda) \mid \mathbf{q} \in \bar{\Omega}_i', \ \lambda > 0\}, \quad \varepsilon \in \{+, -\}$$

(см. (6)) и определим на $U \cup \varphi_{-1}(U)$ функцию I формулой

$$I\colon U \cup \varphi_{-1}(U) \to \mathbb{R}, \quad I\Big(\varphi_{\pm 1}\big(f_i(\mathbf{q}, t, \lambda)\big)\Big) := \Phi(\mathbf{q}), \quad (\mathbf{q}, t, \lambda) \in \Pi_i \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Функция I гладкая, так как $f_i\colon \Pi_i \times \mathbb{R}_{>0} \to U_i$ — диффеоморфизм (см. выше) и Φ гладкая. Так как $I\Big(\varphi_{\pm 1}\big(f_i(\mathbf{q}, t, \lambda)\big)\Big) := \Phi(\mathbf{q})$ не зависит от (t, λ), то I является первым интегралом геодезического потока в $U \cup \varphi_{-1}(U)$, инвариантным относительно φ_{-1} и всех преобразований (6). В частности, пара $\mathbf{I} = (H, I)$ инволютивна и функция I обладает свойством (v) для (32).

Докажем свойство (vi) функции I из (32). Из второй части условия (iii) следует, что в любой точке $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Gamma_i^{\pm} \cap H^{-1}(1/2)$ дифференциал функции $I|_{(T^*_{\mathbf{q}}Q) \cap H^{-1}(1/2)}$ отличен от нуля. Значит, пара функций $\mathbf{I} = (H, I)$ на $U \cup \varphi_{-1}(U)$ является $\mathbf{q}$-максимальной для всех точек $\mathbf{q} \in \Gamma$.

Из условий (i)—(iii) нетрудно вывести, что если $c \in (a, b)$ и точка $\mathbf{q}$ движется с постоянной скоростью вдоль кривой γ_c и совершает полный оборот, то при любом $\varepsilon \in \{+, -\}$ точка $\gamma_{\mathbf{q}, \eta_{\mathbf{q}}}\big(\varepsilon t_\varepsilon(\mathbf{q}, \eta_{\mathbf{q}})\big)$ движется с положительной скоростью вдоль граничной кривой Γ и тоже совершает полный оборот. Поэтому для любых $\mathbf{q} \in \Gamma$ и $\varepsilon \in \{+, -\}$ лагранжево подмногообразие $U^\varepsilon_{\mathbf{q}}$ из разложения (31) непусто и ограничение отображения $\mathbf{I}\colon U \to \mathbb{R}_{>0} \times (a, b)$ на это лагранжево подмногообразие является биекцией. Эта биекция является диффеоморфизмом ввиду (доказанной выше) $\mathbf{q}$-максимальности пары функций $\mathbf{I} = (H, I)$. Свойство (vi) функции I из (32) доказано.

Докажем формулу (33). Рассмотрим такую параметризацию $\gamma_{\mathbf{c},i}(s)$ окружности $\gamma_{c,i} := \gamma_c \cap \Omega'_i$, что $d\gamma_{\mathbf{c},i}(s)/ds = \sqrt{2E}\mathbf{v}_{\gamma_{\mathbf{c},i}(s)}$. Поднимем эту параметризацию до параметризации $\tilde{\gamma}^+_{\mathbf{c},i}(s)$ окружности $\tilde{\gamma}^+_{\mathbf{c},i}$. Ясно, что $\alpha(d\tilde{\gamma}^+_{\mathbf{c},i}(s)/ds) = 2E$. Формула (33) выводится из формулы $X_I(\mathbf{q}, \sqrt{2E}\eta_{\mathbf{q}}) = \big(0, -d\Phi(\mathbf{q})\big)$, $\mathbf{q} \in \gamma_c$, и того, что ковариантное ускорение пути $\gamma_{\mathbf{c},i}(s)$ равно $2Ek\big(\gamma_{\mathbf{c},i}(s)\big)\mathbf{n}(s)$, где $\mathbf{n}(s)$ — внутренняя единичная нормаль окружности $\gamma_{c,i}$ в точке $\gamma_{\mathbf{c},i}(s)$.

Литература

[1] Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.

[2] Болотин С. В. Интегрируемые бильярды Биркгофа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 33—36.

[3] Сыпченко И. В., Тимонина Д. С. Замкнутые геодезические на кусочно-гладких поверхностях вращения постоянной кривизны // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 5. — С. 127—160.

[4] Фокичева В. В. Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 10. — С. 127—176.

[5] Фокичева В. В., Фоменко А. Т. Топология и особенности биллиардов // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна» — 2014. — Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 2014. — С. 372—385.

[6] Amiran E. Y. Smooth convex planar domains for which the billiard ball map is integrable are ellipses: Preprint. — Bellingam: Math. Depart. Western Washington Univ., 1991.

[7] Cayley A. Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon // Philosophical Mag. — 1854. — Vol. 7. — P. 339—345.

[8] Chang S. J., Crespi B., Shi K. J. Elliptical billiard systems and the full Poncelet's theorem in n dimensions // J. Math. Phys. — 1993. — Vol. 34. — P. 2242—2256.

[9] Chang S. J., Friedberg R. Elliptical billiards and Poncelet's theorem // J. Math. Phys. — 1988. — Vol. 29. — P. 1537—1550.

[10] Chasles M. Géométrie pure. Théorèmes sur les sections coniques confocales // Ann. Math. Pures Appl. — 1827/1828. — Vol. 18. — P. 269—276.

[11] Halpern B. Strange billiard tables // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 237. — P. 297—305.

[12] Lazutkin V. KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions. — Berlin: Springer, 1993.

[13] Poncelet J.-V. Traité des propriétés projectives des figures. — Paris: Mett, 1822.

[14] Rom-Kedar V., Turaev D. Billiards: A singular perturbation limit of smooth Hamiltonian flows // Chaos. — 2012. — Vol. 22. — P. 026102.

[15] Tabachnikov S. Poncelet's theorem and dual billiards // Enseign. Math. — 1993. — Vol. 39. — P. 189—194.