П.П.Кулиш

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ФРИЗА ДЛЯ СУПЕРКОНФОРМНОЙ АЛГЕБРЫ

Значительный интерес к уравнению Лиувилля и его квантованию [I,2] инициирован квантованием струны (бозонной и фермионной) методом континуального интеграла [3] . Интригующая программа квантования уравнения Лиувилля, намеченная в [I,2,4] , хотя еще и не завершена, но обнаружила удивительную связь с казалось бы далеким от квантовой теории уравнением Кортевега - де Фриза (КдФ)

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x, \quad u_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} u(x,t). \qquad (0.I)$$

Было показано, что вторая гамильтонова структура уравнения (0.I) со скобкой Пуассона

$$\{u(x), u(y)\} = -\frac{1}{2}\delta'''(x-y) + (2u(x)\partial_x + u_x(x))\delta(x-y), \qquad (0.2)$$

возникает после ряда замен переменных из уравнения Лиувилля, промежуточной из которых является преобразование Миуры $u = v^2 - v'$. При этом скобка (0.2) есть не что иное, как хорошо известная в теории струны алгебра Вирасоро [4] или конформная алгебра в функциональной реализации. Объяснение полученному факту было дано М.А.Семеновым-Тян-Шанским, применившим теоретико-групповую схему интегрирования нелинейных уравненйй [5] к алгебре Вирасоро. Он показал, что аффинная оболочка конформной алгебры естественно приводит к системе (0.I),(0.2) и линейной задаче $(-\partial_x^2 + \lambda + u(x))\,\psi(x,\lambda) = 0$, а коприсоединенное действие группы диффеоморфизмов $x \to g(x)$ на $u(x)$ - точку орбиты в коалгебре, определяется производной Шварца S : $(y = g(x)$, $x = g^{-1}(y))$

$$u(x) \longrightarrow ((g^{-1}(x))')^2\, u(g^{-1}(x)) - \frac{1}{2} S'(g^{-1}(x)), \qquad (0.3)$$

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2}\ln f' - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\ln f'\right)^2. \qquad (0.4)$$

Тот факт, что основное внимание в современных работах уделяется суперструне, объясняет наше стремление применить упомянутые подходы к суперконформной алгебре. Интегрирование нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) с коммутирующими и антикоммути-

рующими переменными методом обратной задачи рассеяния было начато сравнительно давно [6,7] на примере суперсимметричных моделей теории поля. В последнее время известные приемы интегрирования НЭУ были использованы для получения различных градуированных систем [8 - I2]. В частности, были даны суперобобщения КдФ [8,II]. Ниже устанавливается, что с суперконформной алгеброй связано уравнение из [8,I2]. Построения могут быть применены и для расширенных ($\mathcal{N}$ = 2,4) суперконформных алгебр (см., например, [I4]).

Общие сведения о суперконформной алгебре (СКА) излагаются в первом пункте работы [I5,I6], а второй содержит вывод отвечающих СКА интегрируемых НЭУ.

Обсуждения положений этой работы с Л.Д.Фаддеевым были очень полезны, А.Г.Рейман указал мне на результат М.А.Семенова-Тян-Шанского, Л.А.Тахтаджян разъяснил ряд вопросов алгебраической геометрии. Выражаю им мою признательность.

I. Суперконформная алгебра

Одномерное комплексное супермногообразие локально описывается парой координат: четной z и нечетной θ. Суперпроизводная

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\frac{\partial}{\partial z} \equiv \partial_\theta + \theta\partial_z, \quad D^2 = \partial_z \tag{I.I}$$

является квадратным корнем обычной производной. Аналитическая функция - решение уравнения $\bar{D}F = 0$, где $\bar{D} = \partial_{\bar\theta} + \bar\theta\partial_{\bar z}$, суть линейная комбинация двух обычных аналитических функций (со значениями в алгебре Грассмана) $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1$) $F(z,\theta) = f_0(z) + \theta f_1(z)$.

При аналитической замене переменных

$$\begin{aligned} \tilde z &= \tilde z(z,\theta) = g_0(z) + \theta g_1(z), \qquad g_0, \alpha_0 \in \Lambda_0, \\ \tilde\theta &= \tilde\theta(z,\theta) = \theta\alpha_0(z) + \alpha_1(z), \qquad g_1, \alpha_1 \in \Lambda_1 \end{aligned} \tag{I.2}$$

для суперпроизводной D имеем

$$D = (D\tilde\theta)\tilde D + (D\tilde z - \tilde\theta D\tilde\theta)\partial_{\tilde z}, \tag{I.3}$$

где $\tilde D = \partial_{\tilde\theta} + \tilde\theta\partial_{\tilde z}$, $D\tilde\theta = \alpha_0(z) + \theta\alpha_1'(z)$. Преобразование называется суперконформным, если производная преобразуется однородно

$$D = (D\tilde\theta)\tilde D, \quad \text{т.е. } D\tilde z = \tilde\theta D\tilde\theta, \tag{I.4}$$

или

$$g_1(z) + \theta g_0'(z) = \theta\left[\alpha_0^2(z) - \alpha_1(z)\alpha_1'(z)\right] + \alpha_0(z)\alpha_1(z). \tag{I.5}$$

Таким образом, четная часть суперконформного преобразования определяется нечетной частью

$$g_0'(z) = \alpha_0^2(z) - \alpha_1(z)\,\alpha_1'(z)\,, \quad g_1(z) = \alpha_0(z)\,\alpha_1(z)\,. \tag{I.6}$$

Если ввести I-форму ω и обозначение μ для $D\tilde{\theta}$

$$\omega = dz + \theta d\theta\,, \quad \mu \equiv D\tilde{\theta} = \alpha_0 + \theta\,\alpha_1'\,, \tag{I.7}$$

то форма ω также преобразуется однородно

$$\tilde{\omega} = d\tilde{z} + \tilde{\theta}\,d\tilde{\theta} = \mu^2\omega\,. \tag{I.8}$$

Векторное поле V_F, отвечающее инфинитезимальному суперконформному преобразованию, имеет вид ($F = f_0 + \theta f_1,\ f_{0,1} \in \Lambda_{0,1}$)

$$V_F = F\,\partial_z + \frac{1}{2}(\mathcal{D}F)\,\mathcal{D}\,, \tag{I.9}$$

$$V_F = \left(f_0 + \frac{1}{2}\theta f_1\right)\partial_z + \frac{1}{2}\left(f_1 + \theta f_0'\right)\partial_\theta\,.$$

Коммутатор таких векторных полей $[V_F, V_G] = V_{[F,G]}$ ведет к супералгебре $\mathcal{G}$

$$[F, G] = F\,\partial_z G - G\,\partial_z F + \frac{1}{2}\mathcal{D}F\cdot\mathcal{D}G \tag{I.10}$$

или в компонентах $F = f + \theta\gamma$, $G = g + \theta\beta$:

$$[F, G] = \left(fg' - gf' + \frac{1}{2}\gamma\beta\right) + \theta\left(f\beta' - \frac{1}{2}f'\beta - g\gamma' + \frac{1}{2}g'\gamma\right). \tag{I.11}$$

Последняя форма не связана с нечетностью функций γ, β и использовалась в [I3] .

Также как при переходе от алгебры векторных полей на S^1 к алгебре Вирасоро используется 2-коцикл $\Omega(u,v) = \int uv'''dx$, и здесь можно произвести центральное расширение алгебры $\mathcal{G}$ с помощью 2-коцикла

$$\Omega(F, G) = \int F\,DG''\,dx\,d\theta = \int (fg''' + \gamma\beta'')\,dx \tag{I.12}$$

Коммутатор элементов $(F, c) \in \mathcal{G}_c$ имеет вид $c_{1,2} \in \Lambda_0$,

$$[(F, c_1), (G, c_2)] = \left([F, G],\ \Omega(F, G) + \Omega_0(F, G)\right), \tag{I.13}$$

где для согласования с существующими в литературе формулами [I4, I5] мы добавили тривиальный 2-коцикл

$$\Omega_0(F,G) = \int (f g' + \tfrac{1}{4}\gamma\beta)\, dx . \qquad (I.14)$$

В базисе $L_m = ie^{imx}$, $G_r = \theta 2\sqrt{i}\, e^{irx}$ и с центральным зарядом $ik/2\pi$, позволяющим записывать пару (F, d) в виде прямой суммы $F + ikd/2\pi$, соотношения (I.13) принимают привычный для теории суперструны вид

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + k(m^3 - m)\delta_{m,-n} ,$$

$$[L_m, G_r] = (m/2 - r)\, G_{r+m} , \qquad (I.15)$$

$$[G_r, G_p] = 2L_{r+p} + 4k(p^2 - 1/4)\delta_{r+p,0} .$$

Индексы n и r принимают целые ($n \in \mathbb{Z}$) и полуцелые ($r \in \mathbb{Z} + 1/2$) значения, $\mathfrak{g}_c$ - алгебра Невье-Шварца, и в $\mathfrak{g}_c$ есть конечномерная подалгебра $osp(2|1)$, порожденная генераторами: L_0, $L_{+1}, L_{-1}, G_{1/2}, G_{-1/2}$.

Используя представления элементов $\mathfrak{g}$ как $F = f(x) + \theta\gamma(x)$ и формы объема как $d\theta\, dx$, для элементов коалгебры $\mathfrak{g}^*$ и линейной формы получаем

$$U = \theta u(x) + \alpha(x), \quad \langle U, F \rangle = \int (fu + \gamma\alpha)\, dx . \qquad (I.16)$$

Для суперконформной алгебры к $\mathfrak{g}^*$ нужно добавить еще одномерное подпространство $\mathfrak{g}_c^* = \mathfrak{g}^* \oplus \Lambda_0 \ni (U, c_1)$

$$\langle (U, c_1), (F, c_2) \rangle = c_1 c_2 + \int (fu + \gamma\alpha)\, dx \qquad (I.17)$$

Коприсоединенное действие группы суперконформных диффеоморфизмов (I.2). (I.6) $\varphi : (z, \theta) \to (\tilde{z}, \tilde{\theta})$, $\mu = D\tilde{\theta}$, $\nu = \tilde{D}\theta$

$$Ad^*_\varphi(U, c) = (\nu^3 U \circ \varphi^{-1} - S_1[\nu], c) \qquad (I.18)$$

приводит к появлению супершварциана $S_1[\nu]$ - аналога производной Шварца (0.4), [15][1)]

$$S_1[\nu] \equiv S_1(\tilde{\theta}, \theta) = \nu^{-2}(\nu \tilde{D}^3 \nu - 2\tilde{D}^2 \nu \tilde{D} \nu) . \qquad (I.19)$$

---

1) Аналоги производной Шварца для расширенных суперконформных алгебр вычислены А.О.Радулом, который указал и соответствующие дифференциальные операторы.

Индекс в обозначение S введен поскольку существуют шварцианы и для расширенных СКА, $N = 2,4$ [1]. Производная (I.I9) обладает свойствами, аналогичными свойствам обычного шварциана (0.4).

а) $S_1(\theta, \tau(\theta)) = 0,$

где $\tilde{z} = \tau(z)$, $\tilde{\theta} = \tau(\theta)$ - аналог дробно-линейного преобразования [I6]

$$\tilde{z} = \tau(z) = (az + b + \theta\tau(\theta) + \beta\alpha)(cz + d)^{-1}, \quad (I.20)$$

$$\tilde{\theta} = \tau(\theta) = \alpha + (\theta + \beta)(cz + d)^{-1}, \quad (I.2I)$$

величины a, b, c, d (четные) и α, β (нечетные) - параметры преобразования;

б) $S_1(\theta, \tilde{\tilde{\theta}}) = S_1(\theta, \tilde{\theta}) + (\mathcal{D}\tilde{\theta})^3 S_1(\tilde{\theta}, \tilde{\tilde{\theta}});$

в) $S_1(\tilde{\theta}, \theta) = -\nu^3 S_1(\theta, \tilde{\theta}) \circ \varphi^{-1},$

где φ^{-1} - обратное к φ преобразование;

г) $U = -S_1[1/y]$ есть суперпотенциал в уравнении

$$(-\mathcal{D}^3 + U)\, y(x, \theta) = 0, \quad (I.22)$$

которое является аналогом линейной задачи Штурма-Лиувилля в суперслучае.

Приведенных сведений о СКА нам будет достаточно для применения теоретико-группового подхода построения интегрируемых НЭУ [5] к этой алгебре.

2. Нелинейные эволюционные уравнения

Рассмотрим аффинную оболочку $\tilde{\mathfrak{g}}$ алгебры суперконформных векторных полей на суперокружности $S^{1|1}$

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}],$$

которая состоит из векторных полей вида (I.9) с коэффициентами - рядами Лорана по λ: $F(x, \theta, \lambda) = \sum_{n \geq -N(F)} F_n(x, \theta)\lambda^n$ (далее мы ограничиваемся четными F).

Продолжим коцикл (I.I2) на $\mathfrak{g}$ с помощью вычета

$$\tilde{\Omega}(F, G) = \operatorname*{Res}_{\lambda=0} \frac{1}{\lambda}\, \Omega(F, G). \quad (2.I)$$

Произведем разложение супералгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ на две подалгебры в соот-

ветствии со степенями λ, которые входят в определяющие их элементы ряды

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_+ + \tilde{\mathfrak{g}}_-, \quad F_{(-)}^{+} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ (n<0)}} F_n(x,\theta)\lambda^n \in \tilde{\mathfrak{g}}_{(-)}^{+} . \qquad (2.2)$$

Это разложение позволяет ввести r-матричный 2-коцикл

$$\Omega_r(F,G) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Omega}(rF,G) + \tilde{\Omega}(F,rG)\right) = \Omega(F_0, G_0), \qquad (2.3)$$

где оператор r определяется соотношением

$$rF \equiv r(F_+ + F_-) = F_+ - F_-$$

Используя Ω_r перейдем к центральному расширению $\tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_r$, $(F,c_1),(G,c_2) \in \tilde{\mathfrak{g}}_r$

$$[(F,c_1),(G,c_2)] = ([F,G], \Omega_r(F,G)) \qquad (2.4)$$

Для $\tilde{\mathfrak{g}}_r$ - центрального расширения аффинной оболочки СКА, дуальное пространство состоит из формальных рядов вида: $U = \sum_n U_n(x,\theta)\lambda^n$, $U_n(x,\theta) \in C^\infty(S^{1/1})$. Линейные функционалы на $\tilde{\mathfrak{g}}_r$ также определяются с использованием вычета

$$\langle (U,c_1),(F,c_2)\rangle = c_1c_2 + \mathrm{Res}\,\frac{1}{\lambda}\int UF\,d\theta\,dx . \qquad (2.5)$$

На дуальном пространстве к $\tilde{\mathfrak{g}}_r$, $(\tilde{\mathfrak{g}}_r)^*$, которое изоморфно $(\tilde{\mathfrak{g}}_c)^*$, действует группа суперконформных преобразований $\tilde{G}_-$, элементы которой - формальные ряды по обратным степеням λ. Ее действие на U то же, что и в пункте 1.

Скобки Пуассона на дуальном пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}_r^*$ определяются умножением Ли (2.4). Выберем простейшую орбиту $U(x,\theta,\lambda) = \theta(\lambda + u(x)) + \alpha(x)$, параметризуемую двумя функциями на S^1: четной $u(x)$ и нечетной $\alpha(x)$, а константу, связанную с центральным расширением положим равной -1. Пользуясь общей формулой для скобок Пуассона функционалов $\varphi_{1,2}$ на $\mathfrak{g}^* \ni \ell$

$$\{\varphi_1, \varphi_2\}(\ell) = \langle \ell, [d\varphi_1, d\varphi_2]\rangle , \qquad (2.6)$$

получаем набор скобок для функций $u(x)$, $\alpha(x)$:

$$\{u(x), u(y)\} = -\frac{1}{2}\delta'''(x-y) + 2u(x)\delta'(x-y) + u'(x)\delta(x-y), \qquad (2.7)$$

$$\{u(x), \alpha(y)\} = \frac{1}{2}\left(3\alpha(x)\delta'(x-y) + \alpha'(x)\delta(x-y)\right) , \qquad (2.8)$$

$$\{\alpha(x), \alpha(y)\} = \frac{1}{2}\left(u(x) - \frac{d^2}{dx^2}\right)\delta(x-y). \qquad (2.9)$$

Скобки (2.7)-(2.9) задают функциональную реализацию суперконформной алгебры (I.I5).

Построение гамильтонианов - функционалов на $\tilde{\mathfrak{g}}^*_\Gamma$, которые вместе со скобками (2.7)-(2.9) приводят к интегрируемым НЭУ, можно производить в соответствии с общей теорией [I7], приводя с помощью калибровочного действия (I.I8) точку орбиты к каноническому виду. Мы не будем обсуждать канонической формы "орбиты", а воспользуемся тем, что известна вспомогательная линейная задача (I.22).

Распишем эту задачу в компонентах:

$$\left[-\partial_\theta \partial_x - \theta\partial_x^2 + \theta(u(x)+\lambda) + \alpha(x)\right](\psi + \theta f) = 0 \qquad (2.10)$$

Компонента $f(x,\lambda)$ легко выражается через $\psi(x,\lambda)$, для которой получаем уравнение

$$\left(-\partial_x^2 + \lambda + u(x) - \alpha(x)\int^x \alpha(y)\cdot dy\right)\psi(x,\lambda) = 0, \qquad (2.11)$$

совпадающее с [8]. Асимптотическое разложение $\psi(x,\lambda) = \exp(x\sqrt{-\lambda} + \sigma(x,\lambda))$ по $1/\sqrt{\lambda}$ приводит к бесконечной последовательности гамильтонианов. Выпишем первые три:

$$J_0 = \int u\,dx, \quad J_1 = \int (u^2 - 4\alpha\alpha')\,dx,$$

$$J_2 = \int ((u')^2 + 2u^3 - 16\alpha'\alpha'' - 24\alpha\alpha' u). \qquad (2.12)$$

Гамильтониан J_1 и скобки (2.7)-(2.9) приводят к уравнению супер-КдФ

$$u_t = \{H, u\} = -u_{xxx} + 6uu_x + 12(\alpha\alpha_x)_x, \qquad (2.13)$$

$$\alpha_t = \{H, \alpha\} = -4\alpha_{xxx} + 6u\alpha_x + 3u_x\alpha.$$

Связь второй гамильтоновой структуры уравнения с - КдФ с СКА отмечалась также Т.Г.Хововой.

Отношение приведенных результатов к суперсимметричному уравнению Лиувилля [6,I8] устанавливается как в [I,2,4]. Вспомогательная линейная задача (2.I0) может быть записана в форме Захарова-Шабата [I2] и ведет к алгебре $osp(2|1)$, как и для супер-уравнения Лиувилля. Суперпуанцар (I.I9) дает суперпреобразование Миуры. Аналогичные результаты справедливы для расширенных СКА, $N=2,4$, а также для дискретных систем [I9].

Литература

1. G e r v a i s J.L., N e v e u A. Nucl.Phys., 1982, v.B209, p.125-131; 1983, v.B224, p.329-341.
2. F a d d e e v L.D., T a k h t a j a n L.A. Preprint, LPTHE - Paris, 1985, 85/26, 14 p.
3. P o l y a k o v A.M. Phys.Lett., 1981, v.103B, p.207-214.
4. G e r v a i s J.L. Phys.Lett., 1985, v.160B, p.277-282.
5. R e y m a n A.G., S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M.A. Invent.Math., 1979, v.54, p.81-100; idb.1981, v.63, p.423-432.
6. C h a i c h i a n M., K u l i s h P. Phys.Lett., 1978, v.78B, p.413-415.
7. M i k h a i l o v A.V. JETPH Lett., 1978, v.28, p.518-520.
8. K u p e r s h m i d t B.A. Phys.Lett., 1984, v.102A, p.213--215.
9. S a v e l i e v M.V. Commun.Math.Phys., 1985, v.95, p.199--211.
10. K u l i s h P.P. Lett.Math.Phys., 1985, v.10, p.87-91.
11. Manin Yu.I., Radul A.O. Commun.Math.Phys., 1985, v.98, p.65-77.
12. G ü r s e s M., O ğ u z Ö. Lett.Math.Phys., 1986, v.11, p.233-239.
13. K i r i l l o v A.A. Lect.Notes Math., 1982, v.970, p.101-123.
14. N a m S. Phys.Lett., 1986, v.172B, p.323-327.
15. F r i e d a n D. Proc. of the Santa Barbara Workshop on Unified String Theories, eds.Gross D. and Green M., World Press, 1986,
16. M a r t i n e c E. Conformal Field Theory on a super-Riemann Surface. Preprint Prinston Univ., 1986, 75 p.
17. С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Функц.анализ и его прилож., 1983, т.17, № 4, с.17-33.
18. И в а н о в Е.А., К р и в о н о с С.О. Проблемы квантовой теории поля. Труды УП Междунар.совещания. Алушта 84, 1984, с.257-271.
19. В о л к о в А.Ю. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1986, т.150, с.17-25.