

ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

В 2012 году заключительный этап Всероссийской математической олимпиады проходил с 23 по 28 апреля в Смоленске. Организатором олимпиады выступил Смоленский государственный университет.

В олимпиаде приняли участие юные математики, представляющие практически все регионы России. По трем параллелям (9, 10 и 11 классы) число участников составило соответственно 106, 93 и 82 школьника. Кроме команд регионов России в олимпиаде приняли участие команды Болгарии и Китая — стран, с которыми продолжается многолетнее сотрудничество и обмен делегациями.

Как обычно, в каждом из двух туров олимпиады участникам были предложены 4 задачи разной сложности и тематики. После олимпиады у школьников была возможность оценить предложенные им задачи. В этом «конкурсе красоты» призовые места получили: в параллели 9 классов задачи 8, 7 и 2, в параллели 10 классов — задачи 4, 7 и 3, в параллели 11 классов — задачи 4 и 1, а задачи 6 и 8 поделили третье место. Опрос показывает, что школьникам больше нравятся трудные и содержательные задачи, даже если они с ними не справились. Так, задачи 4 для 10 класса и 4 для 11 класса, несмотря на высокий рейтинг, не были решены на олимпиаде ни одним из участников.

Публикуем условия задач и список победителей и призеров заключительного этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. Пусть a_1, \dots, a_{11} — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Может ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \dots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \dots, 4a_{11}$ равна 2012?

Н. Агаханов

2. На окружности отмечены 2012 точек, делящих ее на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k -угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

Д. Храмов

3. См. задачу M2279 «Задачника «Кванта».

4. Положительные действительные числа a_1, \dots, a_n и k таковы, что $a_1 + \dots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \dots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел a_1, \dots, a_n отличаются больше чем на 1.

Н. Агаханов

5. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают

иначе, чем он, меняет свое мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

И. Богданов

6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC .

А. Полянский

7. Изначально на доске записаны 10 последовательных натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа на доске — обозначим их a и b — и заменить их на числа $a^2 - 2011b^2$ и ab . После нескольких таких операций на доске не осталось ни одного из исходных чисел. Могли ли там опять оказаться 10 последовательных натуральных чисел (записанных в некотором порядке)?

Н. Агаханов

8. В некотором городе сеть автобусных маршрутов устроена так, что любые два маршрута имеют ровно одну общую остановку и на каждом маршруте есть хотя бы 4 остановки. Докажите, что все остановки можно распределить между двумя компаниями так, что на каждом маршруте найдутся остановки обеих компаний.

В. Дольников

10 класс

1. Пусть a_1, \dots, a_{10} — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Может ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ равна 2012?

Н. Агаханов

2. Окружность ω , вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC , касается стороны BC в точке D . Пусть точка I — центр окружности ω , а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AID , пересекает вторично прямую AO в точке E . Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω .

Л. Емельянов

3. См. задачу M2280 «Задачника «Кванта».

4. Изначально на доске были написаны $n + 1$ одночленов $1, x, x^2, \dots, x^n$. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1 + x$, $S_2 = 1 + x + x^2$, $S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$, ..., $S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Докажите, что $m \geq 2n/(k + 1)$.

А. Шаповалов

5. См. задачу 5 для 9 класса.

6. Существуют ли натуральные числа a, b, c , большие 10^{10} и такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2012?

В.Сендеров

7. См. задачу M2281 «Задачника «Кванта».

8. Точка E – середина отрезка, соединяющего точку пересечения высот неравнобедренного остроугольного треугольника ABC с его вершиной A . Окружность, вписанная в этот треугольник, касается сторон AB и AC в точках C' и B' соответственно. Докажите, что точка F , симметричная точке E относительно прямой $B'C'$, лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

Л.Емельянов

11 класс

1. См. задачу M2278 «Задачника «Кванта».

2. См. задачу 3 для 10 класса.

3. Клетчатая плоскость раскрашена в шахматном порядке в черный и белый цвета. Затем белые клетки раскрасили в красный и синий цвета так, чтобы клетки, соседние по углу, были разноцветными. Пусть l – прямая, не параллельная сторонам клеток. Для каждого отрезка I , параллельного l , посчитаем разность сумм длин его красных и синих участков. Докажите, что существует число C (зависящее только от прямой l) такое, что все полученные разности не превосходят C .

И.Богданов, К.Сухов

4. См. задачу M2285 «Задачника «Кванта».

5. Даны многочлен $P(x)$ и числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ такие, что $a_1 a_2 a_3 \neq 0$. Оказалось, что для любого действительного x выполняется равенство

$$P(a_1 x + b_1) + P(a_2 x + b_2) = P(a_3 x + b_3).$$

Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

А.Голованов, О.Дмитриев, К.Сухов

6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C – центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_A O_B O_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC .

А.Полянский

7. На окружности отмечены $2n + 1$ точек, делящих ее на равные дуги ($n \geq 2$). Двое по очереди стирают по одной точке. Если после хода игрока оказалось, что все треугольники с вершинами в еще отмеченных точках – тупоугольные, он немедленно выигрывает, и игра заканчивается. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его противник?

Ф.Ивлев

8. Для натурального n обозначим $S_n = 1! + 2! + \dots + n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель, больший 10^{2012} .

Ф.Петров

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Волгин Андрей – Москва, гимназия 1543,
Ершов Станислав – Воронеж, школа 1 с углубленным изучением отдельных предметов,
Симарова Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Крезов Дмитрий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»;

по 10 классам –

Воронецкий Егор – Петрозаводск, школа 42 с углубленным изучением английского языка и математики,
Баев Будимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 11 классам –

Крачун Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Калмынин Александр – Иркутск, лицей-интернат 1,
Рябцева Мария – Москва, СУНЦ МГУ,
Шабанов Лев – Москва, СУНЦ МГУ,
Григорьев Михаил – Казань, лицей 131,
Ишкуватов Руслан – Казань, лицей 131,
Осипов Павел – Томск, школа 54,
Рухович Алексей – Москва, СУНЦ МГУ.

Диплом призера

по 9 классам получили

Лебедева Дарья – Санкт-Петербург, лицей 533, Образовательный комплекс «Малая Охта»,
Новиков Александр – Новосибирск, гимназия 1,
Зайцева Юлия – Москва, школа 179,

Нарышкин Петр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Губкин Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зимин Александр – Ульяновск, школа 52,
Коротких Сергей – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Кочкин Иван – Киров, ФМЛ,
Лосев Илья – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Чернега Никита – Казань, гимназия 122,
Мелентьев Александр – Челябинск, лицей 31,
Холмогоров Ефим – Ижевск, ЭМЛ 29,
Данилюк Алексей – Екатеринбург, СУНЦ УФУ,
Гаркавий Андрей – Москва, Центр образования 218,
Зайков Александр – Краснодар, лицей Института современных технологий и экономики,
Кузнецов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Волостнов Алексей – Казань, гимназия 122,
Евтушевский Всеволод – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зерцалов Андрей – Москва, Центр образования 218,
Кузнецов Арсений – Нижний Новгород, лицей 82,
Мягков Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Нигметзянова Диана – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ,
Пластинин Виталий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Шигида Борис – Москва, школа 2007 с углубленным изучением физики и математики,
Якубов Ален – Краснодар, лицей Института современных технологий и экономики,
Киселев Сергей – Омск, лицей 64,
Сотников Сергей – Санкт-Петербург, лицей 533, Образовательный комплекс «Малая Охта»,
Фролов Иван – Москва, Центр образования 1329,

Замешина Мария – Челябинск, лицей 31,
Ягудин Михаил – Москва, гимназия 1543,
Гущенко-Чеведа Иван – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Милютин Петр – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Телегин Константин – Нижний Тагил, лицей,
Печатнов Юрий – Барнаул, гимназия 42,
Богданов Илья – Москва, школа 25,
Гусев Всеволод – Москва, школа 25,
Макаров Владислав – Санкт-Петербург, школа 450,
Нгуен Хюи Чьонг Нам – Москва, гимназия 1543,
Уваров Никита – Москва, лицей «Вторая школа»,
Урусов Антон – Вологда, школа 8 с углубленным изучением отдельных предметов,
Ходунов Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Яровиков Юрий – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ;

по 10 классам –

Жевнерчук Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Голованов Александр – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ,
Карпушкин Данил – Челябинск, лицей 31,
Хроменков Ярослав – Москва, СУНЦ МГУ,
Зверев Иван – Москва, СУНЦ МГУ,
Дидин Максим – Переславль-Залесский, гимназия,
Зув Антон – Москва, СУНЦ МГУ,
Александров Никита – Набережные Челны, гимназия 26,
Шарипова Анастасия – Сочи, гимназия «Школа бизнеса» Non-State School of Business,
Афризонов Денис – Курган, гимназия 47,
Ковалевский Максим – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Корякин Данил – Киров, ФМЛ,
Олухов Андрей – Курган, лицей 12,
Ахтямов Павел – Магнитогорск, школа с углубленным изучением математики,
Бубнова Анна – Курган, гимназия 19,
Мельниченко Петр – Москва, школа 315,
Мокин Александр – Москва, СУНЦ МГУ,
Целищев Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Горохов Павел – Москва, СУНЦ МГУ,
Крылов Василий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Фролов Алексей – Санкт-Петербург, Академическая гимназия,
Шайхеева Талия – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ,
Белов Дмитрий – Набережные Челны, гимназия 26,
Турбин Максим – Челябинск, лицей 31,
Акбаров Артур – Нижний Тагил, политехническая гимназия,

Евсюков Алексей – Владивосток, лицей «Технический»,
Крюков Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Мальгин Виталий – Киров, ФМЛ,
Уруев Андрей – Москва, СУНЦ МГУ,
Утиралова Александра – Москва, лицей «Вторая школа»,
Филиппов Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 11 классам –

Иванов Андрей – Екатеринбург, гимназия 9,
Исхаков Ленар – Ижевск, ЭМЛ 29,
Ахмедов Максим – Москва, СУНЦ МГУ,
Клюев Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Косинов Никита – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
Крохмаль Николай – Москва, СУНЦ МГУ,
Пышкин Игорь – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Хворых Павел – Омск, гимназия 84,
Матушкин Александр – Ижевск, ЭМЛ 29,
Млодик Михаил – Нижний Новгород, лицей 40,
Фещенко Илья – Москва, школа 1189 им. И.В. Курчатова,
Лазарев Денис – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Ненашев Денис – Елизово, школа 8,
Южаков Александр – Курган, гимназия 31,
Симонов Кирилл – Пермь, школа 9 им. А.С.Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла,
Соленко Никита – Тамбов, лицей 14,
Коротин Александр – Самара, медико-технический лицей,
Кравцов Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Лежнин Михаил – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Афанасьев Максим – Москва, СУНЦ МГУ,
Бесман Михаил – Курган, школа 48,
Болотников Алексей – Екатеринбург, гимназия 9,
Булгаков Артур – Казань, лицей 131,
Гальковский Егор – Санкт-Петербург, лицей 533, Образовательный комплекс «Малая Охта»,
Ерошенко Александр – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Завьялов Богдан – Омск, лицей 64,
Ковальчук Михаил – Красноярск, школа 7 с углубленным изучением отдельных предметов,
Кремнёв Олег – Нижний Новгород, школа 135,
Лопатников Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Миронов Максим – Ижевск, ЭМЛ 29,
Семенов Тимофей – Иркутск, лицей 36 РЖД,
Статник Евгений – Омск, гимназия 117,
Трошин Виктор – Москва, СУНЦ МГУ.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, И.Богданов, А.Гарбер, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

**Знаете ли вы, что с 2012 года издается новый журнал для любознательных школьников 5–8 классов – «Квантик»? Журнал посвящен занимательным вопросам и задачам по математике, лингвистике, физике и другим наукам. «Квантик» выходит ежемесячно. Подписаться на него можно в почтовых отделениях связи, подписной индекс 84252. Вышедшие номера можно купить в магазине МЦНМО по адресу:
 Москва, Б. Власьевский пер., д.11.
 Телефон редакции: (499) 241-74-83, e-mail: kvantik@mccme.ru,
 сайт: www.kvantik.com**

