Математические заметки

Том 105 выпуск 5 май 2019

УДК 517.91

Операторы преобразования для возмущенного гармонического осциллятора

Г. М. Масмалиев, А. Х. Ханмамедов

Рассматривается уравнение, порожденное возмущенным гармоническим осциллятором. С помощью операторов преобразования найдены представления решений этого уравнения с условиями на бесконечности. Получены оценки для ядер операторов преобразования.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: возмущенный гармонический осциллятор, уравнение Шрёдингера, оператор преобразования, гиперболическое уравнение второго порядка, функция Римана.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11774

1. Введение и основные результаты. Во многих аспектах теории обратных задач спектрального анализа важную роль играют так называемые операторы преобразования (см. [1] и цитированную там литературу). Эти операторы возникли из общих идей теории операторов обобщенного сдвига, созданной Дельсартом [2].

Для произвольных уравнений Штурма–Лиувилля операторы преобразования построил Повзнер [3]. Марченко [4] привлек операторы преобразования для исследования обратных спектральных задач и асимптотического поведения спектральной функции сингулярного оператора Штурма–Лиувилля. Левин [5] ввел новый вид операторов преобразования, сохраняющих асимптотики решений на бесконечности, Марченко [6] использовал их для решения обратной задачи теории рассеяния. Подобные вопросы для уравнения Шрёдингера с некоторыми неограниченными потенциалами рассматривались в работах [7]–[9].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + x^2 y + q(x)y = \lambda y, \qquad -\infty < x < \infty, \quad \lambda \in C, \tag{1.1}$$

где вещественный потенциал $q(x)$ удовлетворяет условиям

$$q(x) \in C^{(1)}(-\infty, \infty), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x^j||q(x)|\,dx < \infty, \quad j = 0, 1. \tag{1.2}$$

Отметим, что обратные спектральные задачи (задачи восстановления операторов по некоторым их спектральным данным) для возмущенного осциллятора, т.е. для уравнения (1.1), в различных контекстах изучалась многими авторами (см. [10]–[15]

и библиографию в них). В работах [10], [11] указан алгоритм восстановления возмущенных осцилляторов по определенным спектральным данным, имеющих одинаковый спектр, с потенциалами $q(x)$ из класса достаточно гладких и быстро убывающих на $\pm\infty$ функций. В работе [13] доказана единственность решения обратной задачи в более широком классе потенциалов $q(x)$. Более того, в работе [14] найдены условия для того, чтобы данная совокупность являлась спектральными данными для некоторого уравнения вида (1.1) с потенциалом $q(x)$ из класса $q'(x)$, $xq(x) \in L(-\infty, \infty)$. Подобная задача для возмущенного осциллятора на полуоси с краевым условием Дирихле исследовалась в работе [15].

Вводим также невозмущенное уравнение

$$-y'' + x^2 y = \lambda y, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

которое имеет [16] решения $\psi_\pm^0(x,\lambda)$ вида

$$\psi_\pm^0(x,\lambda) = D_{\lambda/2-1/2}(\pm\sqrt{2}x),$$

где $D_\nu(x)$ – функция Вебера. Хорошо известно [14], [16], что для каждого x функции $\psi_\pm^0(x,\lambda)$ являются целыми функциями и обладают равномерно при всех λ, взятых из ограниченной области, асимптотиками

$$\psi_\pm^0(x,\lambda) = (\pm\sqrt{2}x)^{(\lambda-1)/2} e^{-x^2/2}(1 + O(x^{-2})), \qquad x \to \pm\infty.$$

В работах [13]–[15] показано, что возмущенное уравнение (1.1) имеет решения $\psi_\pm(x,\lambda)$ с асимптотиками

$$\psi_\pm(x,\lambda) = \psi_\pm^0(x,\lambda)(1 + o(1)), \qquad x \to \pm\infty,$$

которые играют важную роль при исследовании обратной задачи. В настоящей работе с помощью операторов преобразования получены представления решений $\psi_\pm(x,\lambda)$. Насколько нам известно, последняя задача раньше не рассматривалась. Полученные результаты могут быть использованы при решении обратных спектральных задач для возмущенного осциллятора, основывающихся на формализме Гельфанда–Левитана–Марченко (см., например, [11]).

Положим

$$\sigma_0^\pm(x) = \pm\int_x^{\pm\infty} |q(t)|\,dt, \qquad \sigma_1^\pm(x) = \pm\int_x^{\pm\infty} \sigma_0^\pm(t)\,dt.$$

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Если потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию (1.2), то (1.1) при всех значениях λ имеет решения $\psi_\pm(x,\lambda)$, представимые в виде*

$$\psi_\pm(x,\lambda) = \psi_\pm^0(x,\lambda) \pm \int_x^{\pm\infty} K^\pm(x,t)\psi_\pm^0(t,\lambda)\,dt, \tag{1.3}$$

где ядра $K^\pm(x,t)$ являются непрерывными функциями и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$|K^\pm(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma_0^\pm\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\sigma_1^\pm((x+t)/2)}, \tag{1.4}$$

$$K^\pm(x,x) = \pm\frac{1}{2}\int_x^{\pm\infty} q(t)\,dt. \tag{1.5}$$

2. Доказательство теоремы. Не нарушая общности, рассмотрим случай "+" и предположим, что $x \geqslant 0$. Подставляя представление (1.3) в уравнение (1.1), находим, что функция (1.3) заведомо удовлетворяет уравнению (1.1), если только ядро $K^+(x,t)$ удовлетворяет гиперболическому уравнению второго порядка

$$\frac{\partial K^+(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial K^+(x,t)}{\partial t^2} - (x^2 - t^2 - q(t))K^+(x,t) = 0, \qquad 0 < x < t, \tag{2.1}$$

и условиям

$$K^+(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt, \tag{2.2}$$

$$\lim_{x+t\to\infty} K^+(x,t) = 0. \tag{2.3}$$

Сведем уравнение (2.1) с условиями (2.2), (2.3) к интегральному уравнению. С этой целью приведем уравнение (2.1) к каноническому виду; для чего составим уравнение характеристик $(1/4)(dt^2 - dx^2) = 0$ и вводим новые переменные по формулам

$$\frac{t+x}{2} = \xi, \qquad \frac{t-x}{2} = \eta.$$

Полагая

$$U(\xi,\eta) = U\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = K^+(x,t) = K^+(\xi-\eta, \xi+\eta),$$

получаем для функции $U(\xi,\eta)$ следующее уравнение:

$$Lt[U] \equiv \frac{\partial^2 U(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} - 4\xi\eta U(\xi,\eta) = U(\xi,\eta)q(\xi+\eta) \tag{2.4}$$

и граничные условия

$$U(\xi,0) = \frac{1}{2}\int_\xi^\infty q(\alpha)\,d\alpha, \tag{2.5}$$

$$\lim_{\xi\to\infty} U(\xi,\eta) = 0, \qquad \eta > 0. \tag{2.6}$$

Введем функцию Римана $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ уравнения $L[U] = \psi(\xi,\eta)$, где $\psi(\xi,\eta) = U(\xi,\eta)q(\xi+\eta)$, т.е. функцию, удовлетворяющую уравнению

$$L^*(R) \equiv \frac{\partial^2 R}{\partial\xi\,\partial\eta} - 4\xi\eta R = 0, \qquad 0 < \eta < \eta_0, \quad \xi_0 < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < \xi, \tag{2.7}$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)|_{\xi=\xi_0} = 1, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0, \tag{2.8}$$

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)|_{\eta=\eta_0} = 1, \qquad \xi_0 \leqslant \xi < \infty. \tag{2.9}$$

Нам понадобятся некоторые свойства функции $R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)$. С этой целью следующие две леммы предпошлем доказательству теоремы.

Лемма 1. *Пусть*

$$z = 2\sqrt{(\xi^2 - \xi_0^2)(\eta_0^2 - \eta^2)}, \qquad \xi_0 < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < \eta_0. \tag{2.10}$$

Тогда функция $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$, *определенная формулой*

$$R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \tag{2.11}$$

где $J_n(z)$ – *функция Бесселя первого рода, удовлетворяет* (2.7)–(2.9). *Следовательно,* $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ *является функцией Римана уравнения* (2.4) *и обладает свойством симметричности* $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = R(\xi_0, \eta_0, \xi, \eta)$.

Доказательство. Функция (2.7) очевидно удовлетворяет условиям (2.8), (2.9). Далее, заметим, что

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = 2\xi(\eta_0^2 - \eta^2) J_0'(z) z^{-1}, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial \xi\, \partial \eta} = -4\xi\eta J_0''(z) - 4\xi\eta J_0'(z) z^{-1},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi\, \partial \eta} - 4\xi\eta R = -4\xi\eta(J_0''(z) + J_0'(z) z^{-1} + J_0(z)) = 0,$$

т.е. функция (2.6) является функцией Римана уравнения (1.4). Лемма доказана.

Лемма 2. *При всех* $\xi_0 < \xi < \infty$, $0 < \eta < \eta_0$ *справедливо неравенство*

$$|R| \leqslant 1. \tag{2.12}$$

Кроме того, при каждом $\eta \in (0, \eta_0)$ *имеют место соотношения*

$$\begin{gathered} \frac{\partial R}{\partial \xi} = O(\xi), \quad \frac{\partial R}{\partial \eta} = O(\xi), \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \xi\, \partial \eta} = O(\xi), \qquad \xi \to \infty, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} = O(\xi^2), \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} = O(\xi^2), \qquad \xi \to \infty. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Доказательство. Так как z принимает действительные значения, то $|J_n(z)| \leqslant 1$ (см. [16]). Отсюда следует неравенство (2.12). Далее, пользуясь известными [15] соотношениями

$$J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{x} J_n(z), \qquad J_n'(z) = -J_{n+1}(z) + \frac{n J_n(z)}{z},$$

получим

$$\left|\frac{J_1(z)}{z}\right| \leqslant 1, \qquad J_0''(z) - J_0'(z) z^{-1} = J_2(z).$$

Дифференцируя (2.11) и учитывая последние соотношения, получаем

$$\frac{\partial R}{\partial \xi} = -2\xi(\eta_0^2 - \eta^2) J_1(z) z^{-1}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \eta} = 2\eta(\xi^2 - \xi_0^2) J_1(z) z^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} = 2(\eta^2 - \eta_0^2) J_1(z) z^{-1} + 4\xi^2(\eta_0^2 - \eta^2)^2 J_2(z) z^{-2},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} = -2(\xi^2 - \xi_0^2) J_1(z) z^{-1} + 4\eta^2(\xi^2 - \xi_0^2)^2 J_2(z) z^{-2}, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial \xi\, \partial \eta} = 4\xi\eta J_0(z).$$

Из последних соотношений вытекает (2.13). Лемма доказана.

Применив метод Римана (см., например, [17]) к уравнению (2.4), получим следующее интегральное уравнение для $U(\xi_0, \eta_0)$:

$$U(\xi_0,\eta_0) = \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} R(\xi,0;\xi_0,\eta_0)q(\xi)\,d\xi - \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_0^{\eta_0} U(\xi,\eta)q(\xi+\eta)R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\eta. \tag{2.14}$$

Таким образом, для решения уравнения (2.4) с условиями (2.5), (2.6) достаточно решить относительно $U(\xi_0, \eta_0)$ интегральное уравнение (2.14).

Теперь приступим к исследованию интегрального уравнения (2.14). Будем решать это интегральное уравнение методом последовательных приближений. Положим

$$U_0(\xi_0,\eta_0) = \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} R(\xi,0;\xi_0,\eta_0)q(\xi)\,d\xi,$$
$$U_n(\xi_0,\eta_0) = -\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_0^{\eta_0} U_{n-1}(\xi,\eta)q(\xi+\eta)R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\eta.$$

Учитывая оценку $|R| \leqslant 1$, имеем

$$|U_0(\xi_0,\eta_0)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} |R(\xi,0;\xi_0,\eta_0)||q(\xi)|\,d\xi \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\infty} |q(\xi)|\,d\xi \leqslant \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} |q(\xi)|\,d\xi,$$

поскольку $\xi > \xi_0$, $\eta < \eta_0$. Тогда будем иметь

$$|U_0(\xi_0,\eta_0)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma_0^+(\xi_0).$$

Далее, найдем, что

$$\begin{aligned}
|U_1(\xi_0,\eta_0)| &\leqslant \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_0^{\eta_0} |U_0(\xi,\eta)| \cdot |q(\xi+\eta)| \cdot R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\eta \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_0^{\eta_0} \sigma_0^+(\xi)|q(\xi+\eta)|\,d\eta \leqslant \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} \sigma_0^+(\xi)\,d\xi \int_0^{\eta_0} |q(\xi+\eta)|\,d\eta \\
&\leqslant \frac{\sigma_0^+(\xi_0)}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_0^{\eta_0} |q(\xi+\eta)|\,d\eta = \frac{\sigma_0^+(\xi_0)}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\eta_0+\xi} |q(\alpha)|\,d\alpha \\
&\leqslant \frac{\sigma_0^+(\xi_0)}{2}\int_{\xi_0}^{\infty}\int_{\xi}^{\infty} |q(\alpha)|\,d\alpha\,d\xi \leqslant \frac{\sigma_0^+(\xi_0)}{2}\int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} |q(\alpha)|\,d\alpha \\
&= \frac{\sigma_0^+(\xi_0)}{2}\sigma_1^+(\xi_0).
\end{aligned}$$

Пусть теперь

$$|U_{n-1}(\xi_0,\eta_0)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma(\xi_0)\frac{(\sigma_1^+(\xi_0))^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}|U_n(\xi_0,\eta_0)| &\leqslant \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \int_0^{\eta_0} |q(\xi+\eta)R(\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)U_{n-1}(\xi,\eta)|\,d\eta \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sigma_0^+(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}\frac{(\sigma_1^+(\xi))^{n-1}}{(n-1)!}\int_{\xi}^{\infty}|q(\alpha)|\,d\alpha\,d\xi \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sigma_0^+(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}\frac{(\sigma_1^+(\xi))^{n-1}}{(n-1)!}\int_{\xi}^{\infty}|q(\alpha)|\,d\alpha\,d\xi \\ &= -\frac{1}{2}\sigma_0^+(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\infty}\frac{(\sigma_1^+(\xi))^{n-1}}{(n-1)!}\,d\sigma_1(\xi) = \frac{1}{2}\sigma_0^+(\xi_0)\frac{(\sigma_1^+(\xi_0))^n}{n!}.\end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, следует, что ряд $U(\xi_0,\eta_0)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(\xi_0,\eta_0)$ абсолютно и равномерно сходится, а его сумма является решением уравнения (2.14) и $U(\xi_0,\eta_0)$ удовлетворяет неравенству

$$|U(\xi_0,\eta_0)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma_0^+(\xi_0)e^{\sigma_1^+(\xi_0)}. \tag{2.15}$$

Далее, дифференцируя уравнения (2.14) и используя (1.2), (2.13), находим, что функция $U(\xi_0,\eta_0)$ и, тем самым, функция $K^+(x,t)=U((t+x)/2,(t-x)/2)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Более того, при каждом фиксированном x имеют место соотношения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial K^+(x,t)}{\partial x}=O(t^2), \quad \frac{\partial K^+(x,t)}{\partial t}=O(t^2),\\ &\frac{\partial^2 K^+(x,t)}{\partial x^2}=O(t^4), \quad \frac{\partial^2 K^+(x,t)}{\partial t^2}=O(t^4), \qquad t\to\infty.\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.15) следует, что функция $K^+(x,t)=U((t+x)/2,(t-x)/2)$ удовлетворяет задаче (2.1)–(2.3). Тем самым завершается доказательство теоремы.

В заключение авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.
[2] J. Delsarte, “Sur une extension de la formule de Taylor”, *J. Math. Pures Appl.*, **17** (1938), 213–231.
[3] А. Я. Повзнер, “О дифференциальных уравнениях типа Штурма–Лиувилля на полуоси”, *Матем. сб.*, **23 (65)**:1 (1948), 3–52.
[4] В. А. Марченко, “Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **72**:3 (1950), 457–460.
[5] Б. Я. Левин, “Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **106**:2 (1956), 187–190.
[6] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова Думка, Киев, 1977.
[7] М. Г. Гасымов, Б. А. Мустафаев, “Обратная задача рассеяния для ангармонического уравнения на полуоси”, *Докл. АН СССР*, **228**:1 (1976), 11–14.
[8] Yi Shen Li, “One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis”, *Chinese Ann. Math.*, **2**:2 (1981), 147–155.

[9] А. П. Качалов, Я. В. Курылев, “Метод операторов преобразования в обратной задаче рассеяния. Одномерный штарк-эффект”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 19, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **179**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1989, 73–87.

[10] H. P. McKean, E. Trubowitz, “The spectral class of the quantum-mechanical harmonic oscillator”, *Comm. Math. Phys.*, **82**:4 (1982), 471–495.

[11] Б. М. Левитан, “Об операторах Штурма–Лиувилля на всей прямой с одинаковым дискретным спектром”, *Матем. сб.*, **132 (174)**:1 (1987), 73–103.

[12] D. Gurarie, “Asymptotic inverse spectral problem for anharmonic oscillators with odd potentials”, *Inverse Problems*, **5**:3 (1989), 293–306.

[13] D. Chelkak, P. Kargaev, E. Korotyaev, “The inverse problem for an harmonic oscillator perturbed by potential: Uniqueness”, *Lett. Math. Phys.*, **64**:1 (2003), 7–21.

[14] D. Chelkak, P. Kargaev, E. Korotyaev, “Inverse problem for harmonic oscillator perturbed by potential, Characterization”, *Comm. Math. Phys.*, **249**:4 (2004), 133–196.

[15] D. Chelkak, E. Korotyaev, “The inverse problem for perturbed harmonic oscillator on the half-line with Dirichlet boundary condition”, *Ann. Henri Poincaré*, **8**:6 (2007), 1115–1150.

[16] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.

[17] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. Vol. II: *Partial Differential Equations*, Interscience Publ., New York, 1962.

Г. М. Масмалиев
Бакинский государственный университет;
Институт математики и механики НАН Азербайджана
E-mail: hacimasmaliyev@hotmail.com

А. Х. Ханмамедов
Бакинский государственный университет;
Институт математики и механики НАН Азербайджана;
Университет “Азербайджан”
E-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

Поступило
21.08.2017
После доработки
20.02.2018
Принято к публикации
20.04.2018