Е. Ю. Ногина, Соотношения между некоторыми классами эффективно топологических пространств,
Матем. заметки, 1969, том 5, выпуск 4, 483–495

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 4 (1969), 483—495

УДК 51.01.16

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ ЭФФЕКТИВНО ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Е. Ю. Ногина

Исследуются соотношения между свойствами эффективно топологических пространств, такими, как наличие перечислимо регулярной базы, вычислимого пересечения, эффективная регулярность, нормальность и др.; устанавливается некоторый алгоритмический (конструктивный) аналог теоремы Урысона о метризации топологических пространств со счетной базой, показывается независимость условий, фигурирующих в этом аналоге. Библ. 8 назв.

Введение. При изучении эффективно топологических пространств (ЭТП) *) оказываются существенными как, во-первых, их свойства, являющиеся эффективизацией традиционных «классических» свойств обычных топологических пространств (счетности базы, сепарабельности, аксиом отделимости и т. п.), так, во-вторых, их свойства, «классические» аналоги которых не представляют специального интереса ввиду своей тривиальности или ввиду того, что они совпадают с другими, известными свойствами. К числу свойств ЭТП первого рода относятся свойства перечислимости базы, эффективной сепарабельности (ЭТП с этим свойством называются ЭС ЭТП), свойства «быть

*) Понятие ЭТП представляет собой один из вариантов конструктивного аналога понятия топологического пространства; этот вариант предполагает нумерацию самого пространства и его базы натуральными числами (н. ч.). Определение ЭТП см. в [3]; при изъятии из приведенного в [3] определения ЭТП условия 1) все результаты как работы [3], так и настоящей заметки остаются справедливыми. В дальнейшем терминология [3] и [5] используется без разъяснений; следует иметь в виду следующую опечатку в [3]: в определениях ЭТ$_i$П при $i = 0, 1, 2$ вместо «элемент базы» следует читать «эффективно открытое (ЭО) множество».

эффективно T_i-пространством» и т. п. К числу свойств второго рода — такие, например, свойства:

A) «существует перечислимое множество E пар н. ч. такое, что если m — номер точки пространства, n — номер элемента базы, то пара $\langle m, n\rangle$ тогда и только тогда принадлежит E, когда точка с номером m принадлежит элементу базы с номером n»; ЭТП с таким свойством будем называть *вполне эффективно топологическим пространством* (ВЭТП);

B) «пересечение любых двух ЭО множеств есть ЭО множество, причем существует вычислимая функция (в. ф.), дающая по номерам двух ЭО множеств номер ЭО множества, являющегося их пересечением»; ЭТП со свойством B будем называть *ЭТП с вычислимым пересечением*;

C) «существует в. ф., дающая по номеру элемента $\mathcal{U}$ базы номер (в некоторой главной нумерации) перечислимого множества $\{\langle m_0, n_0\rangle, \langle m_1, n_1\rangle, \ldots\}$ пар н. ч. таких, что для всякого н. ч. i н. ч. m_i — номер ЭО множества $\mathcal{W}_i$, n_i — номер ЭЗ множества $\mathcal{F}_i$, причем выполняются условия $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$ и $\bigcup\limits_i \mathcal{W}_i = \mathcal{U}$»; ЭТП с таким свойством будем называть *пространством с перечислимо регулярной базой*.

«Классический» аналог свойства A) бессодержателен. «Классический» аналог свойства B) состоит в открытости пересечения любых двух открытых множеств. «Классическим» аналогом свойства C) является следующее свойство «счетной регулярности базы»: «каждый элемент $\mathcal{U}$ базы получается объединением взятых не более чем в счетном числе открытых множеств, замыкания которых содержатся в $\mathcal{U}$» (для T_0-пространств со счетной базой свойство счетной регулярности базы эквивалентно свойству регулярности самого пространства).

Свойства A), B), C) служат показателями «хорошего устройства» ЭТП. Наличие этих свойств, как показано ниже в § 1 (теорема 4), играет решающую (и неустранимую) роль при установлении конструктивного аналога теоремы Урысона о метризации топологических пространств со счетной базой. В § 4 настоящей работы показывается (теорема 10) независимость этих свойств друг от друга и от других свойств ЭТП, фигурирующих в конструктивном аналоге теоремы Урысона. Для ЭТП со свойствами A) и B) (т. е. для ВЭТП с вычислимым пересечением) оказываются (по теореме 2 из [3]) эквивалентными свойства «быть $ЭТ_4П$» и «быть $ЭТ_ФП$» (в «классическом» случае понятия T_4-, т. е. нормальных, пространств и T_Φ-, т. е. таких T_1-пространств, в которых любые два непересекающихся замкнутых множества функционально отделимы, совпадают); в § 3 настоящей заметки показывается (теоремы 7 и 8), что указанная эквивалентность перестает иметь место при лишении ЭТП любого из свойств A) или B). Наконец, наличие свойств B) и C) достаточно для того, чтобы эффективно регулярное ЭТП ($\text{ЭТ}_3\text{П}$) было эффективно нормальным ($\text{ЭТ}_4\text{П}$) (теорема 1 из [3]); в § 2 настоящей заметки (теоремы 5 и 6) показывается, что оба эти свойства существенны.

§ 1. Некоторые определения и результаты общего характера. Пусть $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ суть ЭТП,

$$\mathfrak{T}_1 = \langle \mathscr{X}_1, \alpha_1, \mathfrak{U}_1, \beta_1 \rangle, \qquad \mathfrak{T}_2 = \langle \mathscr{X}_2, \alpha_2, \mathfrak{U}_2, \beta_2 \rangle.$$

Мы скажем, что $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ эффективно эквивалентны, если $\mathscr{X}_1 = \mathscr{X}_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ и: 1) каждый элемент $\mathfrak{U}_1$ есть ЭО в $\mathfrak{T}_2$ множество, причем существует в. ф., дающая по β_1-номеру ([1]) произвольного элемента $\mathfrak{U}_1$ — его номер как ЭО в $\mathfrak{T}_2$ множества; 2) то же с переменой ролей $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$. ЭТП назовем *допускающим перечислимую базу*, если оно эффективно эквивалентно некоторому ЭТП с перечислимой базой. Свойство «допускать перечислимую базу» является инвариантом эффективного гомеоморфизма, как и другие основные свойства ЭТП. Более точно, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$— эффективно гомеоморфные ЭТП. Тогда $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ одновременно принадлежат или не принадлежат каждому из следующих классов пространств: классу ВЭТП; ЭС ЭТП; ЭТП, допускающих перечислимую базу; ЭТП с вычислимым пересечением; ЭТП с перечислимо регулярной базой; для $i = 0, 1, 2, 3, 4,$ ф классу $\text{ЭТ}_i\text{П}$.*

В то же время перечислимость базы не является инвариантом эффективного гомеоморфизма.

Поскольку каждое ЭТП можно рассматривать и как обычное топологическое пространство, оно может обладать и обычными топологическими свойствами, например быть T_i-пространством. Как указано в [3], ЭТП, являющееся T_i-пространством, может и не быть эффективно T_i-пространством ($\text{ЭТ}_i\text{П}$). При некоторых условиях, однако, свойство T_i влечет ЭТ_i (и даже ЭТ_j при $j > i$). Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Всякое ВЭТП с перечислимо регулярной базой, являющееся T_0-пространством и допускающее перечислимую базу, есть $ЭТ_3П$.*

Теорема 2 является непосредственным следствием лемм 1—3 и теоремы 1.

ЛЕММА 1. *Если $\langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle$ — ВЭТП с перечислимой и перечислимо регулярной базой, являющееся T_0-пространством, то существует в. ф. h такая, что для всякого н. ч. n из основания нумерации α $h(n)$ есть номер (в нумерации ЭЗ множеств, см.* [3]) *одноточечного множества $\{\alpha(n)\}$.*

ЛЕММА 2. *Если ЭТП $\langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle$ таково, что для него существует в. ф. h, удовлетворяющая условию леммы 1, то $\langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle$ — $ЭТ_1П$.*

ЛЕММА 3 (см. [3]). *Всякое $ВЭТ_0П$*) с перечислимо регулярной базой является $ЭТ_3П$.*

Из теоремы 2 (настоящей заметки) и следствия 2 теоремы 2 статьи [3] вытекает

ТЕОРЕМА 3. *ВЭТП с перечислимо регулярной базой и вычислимым пересечением, допускающее перечислимую базу и являющееся T_0-пространством, есть $ЭТ_ФП$.*

Мы получаем теперь возможность (благодаря теоремам 1 и 2) следующим образом усилить метризационную теорему 3 из [3].

ТЕОРЕМА 4. *ЭТП, допускающее перечислимую базу, тогда и только тогда эффективно метризуемо, когда оно является ЭС ВЭТП с вычислимым пересечением и перечислимо регулярной базой и T_0-пространством.*

Для дальнейшего нам удобно фиксировать следующие обозначения:

1) N — натуральный ряд; N_1, N_2, N_3, N_4 — некоторые бесконечные попарно непересекающиеся разрешимые множества н. ч., f_1, f_2, f_3, f_4 — их прямые пересчеты; P — перечислимое, но неразрешимое множество; Q — его дополнение до N; g — в. ф. типа $N \to N$, R и S — взаимно дополнительные неперечислимые множества такие, что $g(R) = S \& (\forall n \in N)$ $(g(g(n)) = n)$; χ — 1-1-значная натуральная вычислимая нумерация множества всех непустых кортежей н. ч.; ω — некоторая главная нумерация совокупности всех перечислимых множеств н. ч.

2) $\mathscr{R}$ — множество рациональных чисел, θ — 1-1-значная вычислимая натуральная нумерация $\mathscr{R}$; ζ есть

*)Вместо слов «ВЭТП, являющееся $ЭТ_iП$, мы пишем «$ВЭТ_i$ П)».

1—1-значная вычислимая натуральная нумерация пар рациональных чисел; $\mathscr{R}_1 \overset{\text{def}}{=} \{r/r \in \mathscr{R} \& 0 < r < {}^1/_2\}$.

3) $\mathfrak{R}$ — конструктивный континуум, γ — некоторая канторова или эквивалентная ей нумерация $\mathfrak{R}$; $\mathscr{S}(x, r)$ — окрестность в конструктивном континууме с центром в x из $\mathfrak{R}$ и радиусом r из $\mathscr{R}$; $\mathfrak{S}$ — совокупность всех таких окрестностей, τ — нумерация этой совокупности, осуществленная, как указано в [3]; заметим, что $\langle \mathfrak{R}, \gamma, \mathfrak{S}, \tau \rangle$ есть (как и всякое ЭС ЭМП) ЭТП, допускающее перечислимую базу.

Через $[a]$ будем обозначать множество членов кортежа a; через $\delta\alpha$ — основание нумерации α; через $\widetilde{\beta}$ и $\hat{\beta}$ — соответственно нумерации (описанные в [3]) совокупностей ЭО множеств и ЭЗ множеств ЭТП, в котором β служит нумерацией базы. В дальнейшем запись $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ употребляется лишь для того случая, когда φ определено на $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, так что, скажем, запись «$\varphi(n) \notin M$» означает «$\varphi(n)$ определено и $\varphi(n) \notin M$».

§ 2. Соотношение между эффективной регулярностью ($ЭТ_3$) и эффективной нормальностью ($ЭТ_4$). Как установлено в [3], всякое $ЭТ_4$ П является $ЭТ_3$ П, а всякое $ЭТ_3$ П с вычислимым пересечением и перечислимо регулярной базой является $ЭТ_4$П.

ТЕОРЕМА 5. *Существует $ЭТ_3П$ с перечислимо регулярной базой, не являющееся $ЭТ_4П$.*

Доказательство. Пусть K — непустое подмножество множества N_1; L, M неперечислимы, $L \subset N_2$, $M \subset N_3$; l_0 (соответственно m_0) — фиксированный элемент множества L (соответственно M). Зададим ЭТП $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{p} \overset{\text{df}}{=} \langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle$, где $\mathscr{X} \overset{\text{df}}{=} k \cup L \cup M$; $\alpha(x) \overset{\text{df}}{=} x$ для x из $\mathscr{X}$; элементами нумерованной совокупности ([1]) $\langle \mathfrak{U}, \beta \rangle$ являются для x из $\mathscr{X}$ множества $\{x\}$ с номером $f_1(x)$ и $\mathscr{X} \setminus \{x\}$ с номером $f_2(x)$, а также множества $K \cup M \setminus \{m_0\}$, $K \cup L \setminus \{l_0\}$, $M \cup \{l_0\}$, $L \cup \{m_0\}$ с номерами $f_3(0)$, $f_3(1)$, $f_3(2)$, $f_3(3)$ соответственно. Легко видеть, что $\mathfrak{T}$ есть $ЭТ_3$П с перечислимо регулярной базой, не являющееся $ЭТ_4$П. Теорема 5 доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Существует ЭС $ВЭТ_3П$ с перечислимой базой и вычислимым пересечением, не являющееся ни ЭТП с перечислимо регулярной базой, ни $ЭТ_4П$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{X} \overset{\text{df}}{=} \mathscr{R} \setminus P$, α — сужение на $\theta^{-1}(\mathscr{X})$ нумерации θ. Для всякого x из $\mathscr{R} \setminus N$

множество $\{x\}$ с номером $f_1(\theta^{-1}(x))$ отнесем к совокупности $\langle \mathfrak{U}_1, \beta_1\rangle$. Для всяких p из P, q из Q, r из $\overline{\mathscr{R}_1}$ множества $\mathscr{S}(q, r) \cap \mathscr{X}$ с номером $f_2(\zeta^{-1}(q, r))$, и $\mathscr{X}$ с номером $f_2(\zeta^{-1}(p, r))$ отнесем к совокупности $\langle \mathfrak{U}_2, \beta_2\rangle$. Для всяких n из N, x из $\mathscr{R}\setminus N$, r из $\mathscr{R}_1$ множества $\mathscr{X}\setminus\mathscr{S}(n, r)$ с номером $f_3(\zeta^{-1}(n, r))$ и $\mathscr{X}\setminus\{x\}$ с номером $f_3(\zeta^{-1}(x, 0))$ отнесем к совокупности $\langle \mathfrak{U}_3, \beta_3\rangle$. Для всякого k из $N\setminus\{0\}$ и кортеже $\langle m_0, \ldots, m_k\rangle$ и $\langle n_0, \ldots, n_k\rangle$ таких, что

$$[\langle m_0, \ldots, m_k\rangle] \subset \delta\beta_3 \,\&\, [\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle] \subset \delta\beta_3 \,\&\, n_k \in \delta\beta_2 \,\&$$
$$\& \,\beta_3(n_0) \cap \ldots \cap \beta_3(n_{k-1}) \cap \beta_2(n_k) \neq \Lambda,$$

множества

$$\beta_3(m_0) \cap \ldots \cap \beta_3(m_k)$$

с номером $f_4(\chi^{-1}(m_0, \ldots, m_k))$ и

$$\beta_3(n_0) \cap \ldots \cap \beta_3(n_{k-1}) \cap \beta_2(n_k)$$

с номером $f_4(\chi^{-1}(n_0, \ldots, n_k))$ отнесем к совокупности $\langle \mathfrak{U}_4, \beta_4\rangle$.

Положим

$$\mathfrak{U} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2 \cup \mathfrak{U}_3 \cup \mathfrak{U}_4,$$

β — нумерация $\mathfrak{U}$, являющаяся продолжением нумераций β_1, β_2, β_3, β_4 и такая, что $\delta\beta = \delta\beta_1 \cup \delta\beta_2 \cup \delta\beta_3 \cup \cup\, \delta\beta_4$.

$$\mathfrak{T} \overset{\mathrm{df}}{=} \langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta\rangle.$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{T}$ есть ЭС ВЭТ$_3$П с вычислимым пересечением и перечислимой базой. Покажем, что $\mathfrak{T}$ не есть ЭТ$_4$П. Для i из N

$$\mathscr{F}_i \overset{\mathrm{df}}{=} \mathscr{X}\setminus\beta(f_3(\zeta^{-1}(i, 1/4))),$$
$$\mathscr{G}_i \overset{\mathrm{df}}{=} \mathscr{X}\setminus\beta(f_2(\zeta^{-1}(i, 1/3))).$$

Если $\mathfrak{T}$ есть ЭТ$_4$П, то существует в. ф. φ и ψ такие, что

$$(\forall i)(\widetilde{\beta}(\varphi(i)) \cap \widetilde{\beta}(\psi(i)) = \Lambda \,\&\, \mathscr{F}_i \subseteq \widetilde{\beta}(\varphi(i))(\&\, \mathscr{G}_i \subseteq \widetilde{\beta}(\psi(i))).$$

Положим для i из N

$$K_i \overset{\text{df}}{=} \{n \mid n \in N_2 \& \neg (\exists r \in \mathscr{R})(\zeta(f_2^{-1}(n))) = \langle i,r \rangle\};$$

$$L_i \overset{\text{df}}{=} \{n \mid n \in N_4 \& [\chi(f_4^{-1}(n))] \cap K_i \neq \Lambda\};$$

$$H_i \overset{\text{df}}{=} \omega(\varphi(i)) \setminus (N_1 \cup L_i \cup K_i); \qquad J \overset{\text{df}}{=} \{i \mid (H_i \neq \Lambda)\}.$$

Очевидно, J перечислимо и $Q \subset J$. Пусть D — множество β_2-номеров множества $\mathscr{X}$. Положим

$$T \overset{\text{df}}{=} \{n \mid [\chi(f_4^{-1}(n))] \cap N_2 \subset D\}; \qquad Z \overset{\text{df}}{=} D \cup N_3 \cup T.$$

Так как $(\forall_i \in J \setminus Q)\,(H_i \cap Z \neq \Lambda)$, легко показать, что

$$(\forall_i \in J)\,(i \in Q \leftrightarrow (\omega(\psi(i)) \cap Z \neq \Lambda)),$$

и тем самым прийти к противоречию с неперечислимостью Q. Итак, $\mathfrak{T}$ не является ЭТ$_4$П и, как это следует из теоремы 1 работы [3], оно не есть ЭТП с перечислимо регулярной базой.

§ 3. Соотношение между эффективной нормальностью (ЭТ$_4$) и аксиомой эффективной функциональной отделимости (ЭТ$_\Phi$). В [3] было установлено, что всякое ЭТ$_\Phi$ П есть ЭТ$_4$П, а всякое ВЭТ$_4$П с вычислимым пересечением есть ЭТ$_\Phi$П. Однако

ТЕОРЕМА 7. *Существует ВЭТ$_4$П, не являющееся ЭТ$_\Phi$П.*

ТЕОРЕМА 8. *Существует ЭТ$_4$П с вычислимым пересечением, не являющееся ЭТ$_\Phi$П.*

Доказательство теоремы 7. Положим

$$M \overset{\text{df}}{=} \{k \mid 0 < \gamma(k) < 1\};$$

для n из M

$$\mathscr{Y}_n \overset{\text{df}}{=} \{k \mid \gamma(k) < \gamma(n)\}, \qquad \mathscr{Z}_n \overset{\text{df}}{=} \{k \mid \gamma(k) > \gamma(n)\}.$$

Зададим ЭТП $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T} \overset{\text{df}}{=} \langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle,$$

где $\mathscr{X} \overset{\text{df}}{=} \delta\gamma$; $\alpha(x) \overset{\text{df}}{=} x$ для x из $\mathscr{X}$; к совокупности $\langle \mathfrak{U}, \beta \rangle$ отнесены для всякого x из $\mathscr{X}$ множества $\{x\}$, $\mathscr{X} \setminus \{x\}$, для всякого m из M множества $\mathcal{I}_m$, $\mathcal{J}_m$ с номерами $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(m)$, $f_4(m)$ соответственно. Легко видеть, что $\mathfrak{T}$ ВЭТ$_3$П.

ЛЕММА. Пусть L — перечислимое подмножество $\delta\beta$ такое, что $\mathscr{X} = \bigcup_{n\in L} \beta(n)$. Тогда: или 1) $L \cap N_2 \neq \Lambda$, или 2) существует пара $\langle k, m\rangle$, удовлетворяющая условию

$$[\langle f_3(k), f_4(m)\rangle] \subseteq L \& \mathcal{I}_k \cap \mathcal{J}_m \neq \Lambda.$$

Доказательство леммы. Положим

$$\mathcal{I} \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{k\in L\cap N_3} \beta(k), \qquad \mathcal{J} \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{k\in L\cap N_4} \beta(k).$$

Предположим, что условие 2) места не имеет, тогда $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \Lambda$. Так как $\mathcal{I} \cap \gamma^{-1}(1) = \Lambda$, $\mathcal{J} \cap \gamma^{-1}(0) = \Lambda$ и не существует нетривиальных вполне разрешимых [4] подмножеств множества $\mathfrak{K}$ (как это следует из [2], см. также [7]), найдется x_0 из $\mathfrak{K}$ такое, что $\gamma^{-1}(x_0) \cap (\mathcal{I} \cup \mathcal{J}) = \Lambda$. Если теперь не выполнено и условие 1), то $\gamma^{-1}(x_0) \subset \bigcup_{n\in L\cap N_1} \beta(n)$, что невозможно, поскольку, как нетрудно показать, никакое перечислимое множество γ-номеров элементов конструктивного континуума не может содержать всех γ-номеров некоторого элемента. Лемма доказана.

Покажем теперь, что $\mathfrak{T}$ есть ЭТ$_4$П. Пусть l, t суть $\hat{\beta}$-номера двух непересекающихся ЭЗ множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Тогда $\mathscr{X} = \bigcup_{n\in\omega(l)\cup\omega(t)} \beta(n)$. По лемме: или 1) $(\exists n)\ (f_2(n) \in \in \omega(l) \cup \omega(t))$, или 2) существует пара $\langle k, m\rangle$, удовлетворяющая условию

$$[\langle f_3(k), f_4(m)\rangle] \subset \omega(l) \cup \omega(t) \& \mathcal{I}_k \cap \mathcal{J}_m \neq \Lambda.$$

Пусть имеет место 1) и $f_2(n) \in \omega(l)$. Тогда, если $n \in \widetilde{\beta}(l)$ (соответственно $n \in \widetilde{\beta}(t)$), ЭО множества Λ и $\mathscr{X}$ (соответственно $\{n\}$ и $\mathscr{X} \setminus \{n\}$) отделяют $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Пусть 2) имеет место и $f_3(k) \in \omega(l)$. Тогда множества $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ отделяются ЭО множествами Λ и $\mathscr{X}$ (соответственно $\mathcal{I}_{h(k,m)}$, $\mathcal{J}_{h(k,m)}$), если $f_4(m) \in \omega(l)$ (соответственно $f_4(m) \in \omega(t)$). Здесь h есть в. ф. такая, что

$$(\forall m \in \delta\gamma)\left(h(k, m) \in \gamma^{-1}\left(\frac{\gamma(m) + \gamma(k)}{2}\right)\right).$$

Однако $\mathfrak{T}$ не ЭТ$_\Phi$П. Пусть n, l из M таковы, что $\gamma(l) > \gamma(n)$:

$$\mathcal{F}_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \mathscr{X} \setminus \mathcal{J}_n, \quad \mathcal{G}_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \mathscr{X} \setminus \mathcal{I}_l.$$

Если $\mathfrak{T}$ есть ЭТ$_\Phi$П, существует эффективно непрерывная на $\mathfrak{T}$ функция ψ со значениями из отрезка $[0, 1]$ конструктивного континуума, удовлетворяющая условиям $\mathcal{F}_0 \subseteq \psi^{-1}(0)$, $\mathcal{G}_0 \subseteq \psi^{-1}(1)$. Пусть D, E, H — перечислимые множества н. ч. такие, что

$$\bigcup_{n \in D} \beta(n) = \psi^{-1}(\{y \mid y \in \mathfrak{R} \& 0 < y < 1\}),$$
$$\bigcup_{n \in E} \beta(n) = \psi^{-1}(\{y \mid y \in \mathfrak{R} \& y > {}^1/_2\}),$$
$$\bigcup_{n \in H} \beta(n) = \psi^{-1}(\{y \mid y \in \mathfrak{R} \& y < {}^1/_2\}).$$

Представление $\mathscr{X} = \bigcup_{n \in D \cup E \cup H} \beta(n)$ противоречит лемме; таким образом, $\mathfrak{T}$ не ЭТ$_\Phi$П. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Пусть $a \in N \setminus \delta\tau$, $\langle \mathfrak{U}, \beta \rangle$ — нумерованная совокупность, получающаяся добавлением к совокупности $\langle \mathfrak{S}, \tau \rangle$ множества $\{0\}$ с номером a. Положим

$$\mathfrak{T} \overset{\mathrm{df}}{=} \langle \mathfrak{R}, \gamma, \mathfrak{U}, \beta \rangle.$$

Нетрудно показать, что $\mathfrak{T}$ есть ЭТ$_4$П с вычислимым пересечением. Предположим теперь, что $\mathfrak{T}$ есть ЭТ$_\Phi$П. Тогда существует эффективно непрерывная на $\mathfrak{T}$ функция ψ со значениями из отрезка $[0, 1]$ конструктивного континуума, равная 0 на ЭЗ множестве $\{0\}$ и 1 на ЭЗ множестве $\mathfrak{R} \setminus \{0\}$, и множество $\{0\}$ оказывается вполне перечислимым [4] в $\langle \mathfrak{R}, \gamma \rangle$, как полный прообраз вполне перечислимого в $\langle \mathfrak{R}, \gamma \rangle$ множества $\{x \mid x \in \mathfrak{R} \& (-{}^1/_2 < x < {}^1/_2)\}$ при вычислимом отображении $\psi \langle \mathfrak{R}, \gamma \rangle$ в $\langle \mathfrak{R}, \gamma \rangle$, что невозможно (как это следует из [2], см. также [7]). Следовательно, $\mathfrak{T}$ не ЭТ$_\Phi$П.

Замечание. Легко заметить, что построенное при доказательстве теоремы 8 ЭТП $\mathfrak{T}$ будет ЭС ЭТ$_4$П с перечислимой и перечислимо регулярной базой и вычислимым пересечением, не являющееся ВЭТП.

§ 4. Независимость условий, фигурирующих в конструктивном аналоге метризационной теоремы П. С. Урысона. Некоторым конструктивным аналогом теоремы Урысона (о других ее аналогах см. в [3]) является теорема 4. Предположение о том, что пространство допускает перечислимую базу, является здесь существенным. Действительно, среди эффективно метрических пространств, не допускающих перечислимой базы, существуют «очень плохие» пространства — например, не обладающие вычислимым пересечением ([3]). С другой стороны, имеет место

ТЕОРЕМА 9. *Существует ЭС ВЭТП с вычислимым пересечением и перечислимо регулярной базой, являющееся T_0-пространством, но не эффективно метризуемое.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{X}$ — счетное множество, α — нумерация множества $\mathscr{X}$, такая, что каждый элемент из $\mathscr{X}$ имеет ровно два α-номера и $(\forall n \in N)\,(\alpha(n) = \alpha(g(n)))$. К совокупности $\langle \mathfrak{U}, \beta \rangle$ отнесем для всякого s из S множество $\{\alpha(s)\}$ с номером $f_1(s)$ и для всякого непустого кортежа $\langle s_0, \ldots, s_k \rangle$ такого, что $[\langle s_0, \ldots, s_k \rangle] \subset S$, множество $\mathscr{X} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k} \alpha(s_i)$ с номером $f_2(\chi(s_0, \ldots, s_k))$. $\mathfrak{X} \overset{\mathrm{df}}{=} \langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle$. Легко показать, что $\mathfrak{X}$ есть ЭС ВЭТП с вычислимым пересечением и перечислимо регулярной базой. $\mathfrak{X}$ — пространство с дискретной топологией, однако оно не ЭТ$_0$П и, следовательно, не является эффективно метризуемым. Теорема доказана.

Встает вопрос о независимости тех условий, которые, согласно теореме 4, в совокупности необходимы и достаточны для эффективной метризуемости ЭТП, допускающих перечислимую базу. Следующая теорема показывает, что они независимы.

ТЕОРЕМА 10. *Для каждого из следующих классов пространств: класса ЭС ЭТП; ЭТП, являющихся T_0-пространством; класса ЭТП с вычислимым пересечением; ЭТП с перечислимой регулярной базой; класса ВЭТП — существует ЭТП с перечислимой базой, не принадлежащее этому классу, но содержащееся в пересечении остальных классов.*

Теорема 10 следует из примеров 1, 2, 3, теоремы 6 и замечания к теореме 8.

Пример 1. Пусть F и G — два взаимно дополнительных множества $\langle [8] \rangle$,

$$\mathscr{X} \overset{\mathrm{df}}{=} \{\theta(i) \mid i \in F\},$$

α — сужение нумерации θ на множество $\theta^{-1}(\mathscr{X})$. Для всяких н. ч. i и положительного рационального r множество $\mathscr{S}(\theta(i), r) \cap \mathscr{X}$ с ζ — номером пары $\langle i, r \rangle$ отнесем к совокупности $\langle \mathfrak{U}, \beta \rangle$. Легко видеть, что $\langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle$ есть ВЭТ$_3$П с перечислимо регулярной перечислимой базой и вычислимым пересечением, не являющееся ЭС пространством.

Пример 2. Пусть совокупность $\langle \mathscr{X}, \alpha \rangle$ состоит из двух точек, занумерованных 0 и 1; к совокупности $\langle \mathfrak{U}, \beta \rangle$ отнесено множество $\{\alpha(0), \alpha(1)\}$ с номером 0. Тогда $\langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle$ — ЭС ВЭТП с перечислимой перечислимо регулярной базой и вычислимым пересечением, не являющееся T_0-пространством.

Пример 3. Пусть $H \overset{\text{def}}{=} f_1(Q)$; $E \overset{\text{def}}{=} f_2(P)$; h — в. ф. типа $N \to N$, $h(N_1) = N_2$, $(\forall n \in N)$ $(h(h(n)) = n)$; $T \overset{\text{df}}{=} H \cup E \cup N_3$; $\mathscr{X} \overset{\text{df}}{=} \mathscr{R} \setminus (N \setminus T)$; α — сужение на $\theta^{-1}(\mathscr{X})$ нумерации θ. К нумерованной совокупности $\langle \mathfrak{U}, \beta \rangle$ отнесем для всякого x из $\mathscr{X} \setminus H$ множество $\{x\}$ с номером $f_1(\theta^{-1}(x))$; для всякого x из $\mathscr{X} \setminus N$ множество $\mathscr{X} \setminus \{x\}$ с номером $f_2(\theta^{-1}(x))$, множества $\mathscr{X} \setminus N_3$ и $\mathscr{X} \setminus E$ с номерами $f_3(0)$, $f_3(1)$ соответственно; для n из $N_1 \cup N_2$ и r из $\mathscr{R}_1$ множество $\mathscr{X} \cap (\mathscr{S}(n, r) \cup \mathscr{S}(h(n), r))$ с номерами $f_4(\zeta^{-1}(n, r))$ и $f_4(\zeta^{-1}(h(n), r))$. Положим $\mathfrak{T} \overset{\text{df}}{=} \langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle$. Нетрудно, показать, что $\mathfrak{T}$ есть ЭС ВЭT_3П с перечислимой перечислимо регулярной базой, не являющееся ЭТП с вычислимым пересечением.

§ 5. Соотношение между эффективной регулярностью (ЭT_3) и наличием перечислимо регулярной базы. Хотя «классические» аналоги этих свойств эквивалентны для T_0-пространств со счетной базой, сами эти свойства не являются эквивалентными для ЭТП с перечислимой базой. Действительно, по теореме 3 возможно ЭT_3П с перечислимой, но не перечислимо регулярной базой. Кроме того, имеет место

ТЕОРЕМА 11. *Существует ЭT_0П (и даже ЭT_2П) с перечислимой перечислимо регулярной базой, не являющееся ЭT_3П.*

В то же время, как показывает лемма 3, всякое ВЭT_0П с перечислимо регулярной базой является ЭT_3П.

Доказательство теоремы 11. Пусть λ есть 1-1-значная натуральная вычислимая нумерация множества $\mathscr{R} \setminus N$. Положим

$$R_1 \overset{\text{df}}{=} f_1(R), \; S_1 \overset{\text{df}}{=} f_1(S), \quad g_1(n) \overset{\text{df}}{=} f_1(g(n))$$

для n из N;

$$\mathscr{X} \overset{\text{df}}{=} R_1 \cup (\mathscr{R} \setminus N).$$

Число l из R_1 назовем α-номером элемента l; число $f_2(n)$ такое, что $\gamma(n) \in \mathscr{R} \setminus N$ назовем α-номером элемента $\gamma(n)$. К нумерованной совокупности $\langle \mathfrak{U}, \beta \rangle$ отнесем для всякого x из $\mathscr{X}$ множество $\{x\}$ с номером x, если $x \in R_1$, с номером $f_2(\lambda^{-1}(x))$, если $x \in \mathscr{R} \setminus N$, и множества $\mathscr{X} \setminus \{x\}$ с номером $g_1(x)$, если $x \in R_1$ с номером $f_3(\lambda^{-1}(x))$, если $x \in \mathscr{R} \setminus N$, а также всевозможные непустые подмножества $\mathscr{W}$ множества $\mathscr{R} \setminus N$ такие, что $\lambda^{-1}(\mathscr{W})$ перечислимо, с номерами вида $f_4(m)$, где m есть ω-номер $\lambda^{-1}(\mathscr{W})$,

$$\mathfrak{T} \overset{\mathrm{df}}{=} \langle \mathscr{X}, \alpha, \mathfrak{U}, \beta \rangle.$$

Нетрудно, показать, что $\mathfrak{T}$ есть ЭТ$_2$П с перечислимо регулярной базой и, поскольку множество ω-номеров непустых множеств перечислимо, перечислима и база $\mathfrak{T}$. Предположим теперь, что $\mathfrak{T}$ есть ЭТ$_3$П. Тогда, так как $\mathscr{R} \setminus N$ есть ЭО в $\mathfrak{T}$ множество, существует в. ф. u такая, что

$$n \in \gamma^{-1}(\mathscr{R} \setminus N) \to R_1 \subset \widetilde{\beta}(u(n)) \,\&\, \gamma(n) \notin \widetilde{\beta}(u(n)).$$

Очевидно,

$$n \in \gamma^{-1}(\mathscr{R} \setminus N) \to \omega(u(n)) \cap N_3 \neq \Lambda.$$

Отсюда следует, что должна существовать в. ф., дающая по γ-номеру элемента из $\mathscr{R} \setminus N$ его λ-номер, что невозможно (как это следует, например, из результатов [6], [7]). Теорема доказана.

Автор глубоко признателен В. А. Успенскому за предложение темы исследования и большое внимание к работе.

Вычислительный центр
АН СССР

Поступило
5.V.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.
[2] Марков А. А., О непрерывности конструктивных функций, Успехи матем. наук, 9, № 3 (1954), 226—230.
[3] Ногина Е. Ю., Об эффективно топологических пространствах, Докл. АН СССР, 169, № 1 (1966), 28—31.

[4] Успенский В. А., Системы перечислимых множеств и их нумерации, Докл. АН СССР, **105**, № 6 (1955), 1155—1158.
[5] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960.
[6] Цейтин Г. С., Алгорифмические операторы в конструктивных полных сепарабельных метрических пространствах, Докл. АН СССР, **12**, № 1 (1959), 49—52.
[7] Moschovakis Y. N., Recursive metric spaces. Fund. Math., 55, № 3 (1964), 215—238.
[8] Rogers H., Theory of recursive functions and effective computability, N.—Y., 1967.