

УДК 517.977.5

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ТРАЕКТОРНЫХ ТРУБОК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ¹

Д. В. Лисин, Т. Ф. Филиппова

На основе методов теории гарантированного управления и оценивания в условиях неопределенности рассмотрена задача построения оценок многозначных решений дифференциальных включений. Найдены соотношения, описывающие в терминах соответствующих функций Минковского верхние (относительно операции включения множеств) оценки аппроксимаций первого порядка для траекторных трубок дифференциальных включений билинейного типа.

1. Введение

В теории гарантированного управления и оценивания в условиях неопределенности рассматриваются динамические системы, эволюция которых может зависеть не только от текущего фазового состояния объекта, но и от неопределенных возмущений или ошибок моделирования. Среди огромного числа публикаций, посвященных различным аспектам теории неопределенных динамических систем, отметим исследования [2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 18, 22], в рамках проблематики которых находятся и постановки задач данной работы.

Предполагается, что неопределенные факторы в математической модели динамической системы не имеют вероятностного описания, а известны лишь с точностью до множеств, их содержащих. В качестве модели динамики систем такого рода может быть взято *дифференциальное включение* [13]

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

с неизвестным, но также ограниченным начальным состоянием $x(t_0)$:

$$x(t_0) = x^0, \quad x^0 \in X^0. \quad (1.2)$$

В задачах оценивания состояний неопределенных систем по результатам текущих измерений обычно предполагается заданным так называемое *уравнение измерения*:

$$y(t) = g(t, x, \xi(t)), \quad (1.3)$$

где функция $\xi(t)$ является неизвестной помехой ("шумом") измерения с априори известными ограничениями.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00369).

Последнее соотношение можно записать в виде включения (условия *выживаемости*) ([2, 3])

$$x(t) \in Y(t), \quad (1.4)$$

где $Y(t)$ – заданная многозначная функция.

Одним из основных вопросов теории управления – оценивания в условиях неопределенности является проблема нахождения *информационных множеств* неопределенных динамических систем [11], или, в терминах теории дифференциальных включений, множеств всех решений $x[t] = x(t, t_0, x^0)$ системы (1.1)–(1.2), а также подмножеств указанного семейства, состоящих из всех траекторий $x[t] = x(t, t_0, x^0)$, удовлетворяющих дополнителюму условию *выживаемости* (1.4).

Таким образом, задача гарантированного оценивания состоит в описании множества

$$X[\cdot] = \bigcup \{x[\cdot] = x(\cdot, t_0, x^0)\}$$

решений системы (1.1)–(1.4) (*траекторного пучка*) и соответствующих сечений в момент времени t (*t -сечений*) $X[t]$ этого множества,

$$X[t] = \bigcup \{x : x = x[t] = x(t, t_0, x^0), x(\cdot, t_0, x^0) \in X[\cdot]\},$$

совпадающего с множеством достижимости в момент t (информационным множеством) рассматриваемой неопределенной системы. Отметим, что множество $X[t]$ можно трактовать как неуплучшаемую многозначную оценку неизвестного состояния $x(t)$ системы (1.1)–(1.4).

Трубки решений $X[t]$, полученные с учетом условия (1.4), называются трубками *выживающих* траекторий, или просто *выживающими* трубками траекторий дифференциального включения. Проблемы существования выживающих траекторий рассматривались в теории дифференциальных включений [2], другие аспекты проблемы *выживаемости* (в том числе построение выживающих трубок, анализ их свойств) изучались также в несколько иной постановке в теории дифференциальных игр [9, 10]. Данная работа продолжает исследования [11, 13, 15, 14], посвященные анализу многозначной динамики систем, функционирующих в условиях неопределенности. Основная проблема, рассмотренная здесь, касается описания траекторных трубок дифференциальных включений билинейного типа, для которых t -сечения $X[t]$ траекторных трубок $X[\cdot]$ являются *звездными* множествами. Отметим, что звездные множества, вообще говоря, невыпуклы, поэтому техника опорных функций выпуклого анализа, характерная для исследования линейных неопределенных систем, здесь неприменима, и для описания траекторных трубок и их аппроксимаций выбран аппарат функций Минковского.

2. Эволюция многозначных состояний

Здесь мы дадим точные формулировки и напомним некоторые известные результаты, необходимые в дальнейшем.

Изложение основывается на понятиях непрерывности и измеримости многозначных функций (см., например, [5]).

Символом $\text{Conv } \mathbb{R}^n$ будем обозначать множество всех непустых выпуклых компактных подмножеств конечномерного евклидова пространства \mathbb{R}^n и символом $\text{Comp } \mathbb{R}^n$ – множество всех непустых компактных подмножеств \mathbb{R}^n .

Рассмотрим дифференциальное включение (1.1), где $x \in \mathbb{R}^n$, правая часть \mathcal{F} есть непрерывная многозначная функция ($\mathcal{F} : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Conv } \mathbb{R}^n$), удовлетворяющая условию Липшица с константой $L > 0$, а именно,

$$h(\mathcal{F}(t, x), \mathcal{F}(t, y)) \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $h(A, B)$ – расстояние Хаусдорфа между множествами $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$h(A, B) = \max \{h^+(A, B), h^-(A, B)\},$$

где $h^+(A, B), h^-(A, B)$ – соответствующие полурасстояния Хаусдорфа между A, B ,

$$h^+(A, B) = \sup \{d(x, B) \mid x \in A\}, \quad h^-(A, B) = h^+(B, A),$$

$$d(x, A) = \inf \{\|x - y\| \mid y \in A\}.$$

Пусть дано $X_0 \in \text{Comp } \mathbb{R}^n$. Обозначим $x[t] = x(t, t_0, x_0)$ ($t \in T = [t_0, t_1]$) траекторию (решение в смысле Каратеодори) дифференциального включения (1.1), исходящую из начальной точки $x[t_0] = x_0 \in X_0$.

Напомним, что решение в смысле Каратеодори на интервале T есть абсолютно непрерывная функция $x[t]$ ($t \in T$), удовлетворяющая включению

$$\frac{d}{dt} x[t] = \dot{x}[t] \in \mathcal{F}(t, x[t]) \quad (2.1)$$

при почти всех $t \in T$.

Будем считать, что все решения $\{x[t] = x(t, t_0, x_0) \mid x_0 \in X_0\}$ продолжимы до момента t_1 (например, предположим, что выполнено известное условие продолжимости [7]).

Пусть многозначное отображение $Y(t)$ непрерывно, ($Y : T \rightarrow \text{Conv } \mathbb{R}^n$), $X_0 \subseteq Y(t_0)$.

Напомним следующее определение [2, 13].

Определение 2.1. Траектория $x[t] = x(t, t_0, x_0)$ ($x_0 \in X_0, t \in T$) дифференциального включения (2.1) называется выживающей на $[t_0, \tau]$, если

$$x[t] \in Y(t) \quad \text{при всех } t \in [t_0, \tau]. \quad (2.2)$$

Предположим, что существует по крайней мере одно решение $x^*[t] = x^*(t, t_0, x_0^*)$ включения (2.1) (с начальной точкой $x^*[t_0] = x_0^* \in X_0$), удовлетворяющее требованию выживаемости (2.2) при $\tau = t_1$.

Обозначим $\mathcal{X}(\cdot, t_0, X_0)$ множество всех решений включения (2.1), исходящих из всего начального множества X_0 . Пусть $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, t_0, X_0)$ означает его t -сечение в момент времени t .

Подмножество из $\mathcal{X}(\cdot, t_0, X_0)$, состоящее из всех решений (2.1), выживающих на $[t_0, \tau]$, будет обозначаться как $X(\cdot, \tau, t_0, X_0)$, а его s -сечения – как $X(s, \tau, t_0, X_0)$, $s \in [t_0, \tau]$. Для краткости записи будем использовать символ $X[\tau]$ для этих временных сечений в момент τ :

$$X[\tau] = X(\tau, t_0, X_0) = X(\tau, \tau, t_0, X_0)$$

Известно, что обе многозначные функции $\mathcal{X}(t, t_0, X_0)$, $X(t, t_0, X_0)$,

$$\mathcal{X} : T \times T \times \text{Comp } \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Comp } \mathbb{R}^n,$$

$$X : T \times T \times \text{Comp } \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Comp } \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяют свойству полугруппы:

$$\mathcal{X}(t, \tau, \mathcal{X}(\tau, t_0, X_0)) = \mathcal{X}(t, t_0, X_0), \quad t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1,$$

$$X(t, \tau, X(\tau, t_0, X_0)) = X(t, t_0, X_0), \quad t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1,$$

и, следовательно, каждая из них определяет соответствующую обобщенную динамическую систему с многозначными траекториями [4, 17, 13]. Многозначные функции $\mathcal{X}[t]$ и $X[t]$ ($t \in T$) будут называться, соответственно, *траекторной трубкой* и *выживающей траекторной трубкой* (или *выживающей трубкой*). Данные понятия можно трактовать как многозначные аналоги классических (однозначных) траекторий систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Один из подходов к описанию динамики многозначных состояний неопределенных динамических систем основан на понятии эволюционного уравнения, которое получило название уравнения *интегральной воронки* [11, 13, 15, 8]. Напомним кратко основную конструкцию указанного эволюционного соотношения, приведенного в отмеченных работах, где также сформулированы достаточные условия, при которых оно выполняется.

Рассмотрим "уравнение":

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h(\mathcal{X}[t + \sigma], \bigcup_{x \in \mathcal{X}[t]} (x + \sigma \mathcal{F}(t, x))) = 0, \quad t \in T = [t_0, t_1] \quad (2.3)$$

с "начальным условием":

$$\mathcal{X}[t_0] = X_0. \quad (2.4)$$

Заметим, что это уравнение превращается в обыкновенное дифференциальное, как только пропадает неопределенность в системе, когда $\mathcal{F}(t, x) = \{f(t, x)\}$ и $\mathcal{X}[t] = \{x[t]\}$ ($X_0 = \{x_0\}$) являются однозначными функциями.

Теорема 2.1. *Многозначная функция $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, t_0, X_0)$ является единственным многозначным решением эволюционного уравнения (2.3)–(2.4).*

Другой вариант уравнения интегральной воронки (2.3) использует Хаусдорфово полурасстояние h^+ [14]. При этом для такого рода уравнений теряется свойство единственности многозначных решений, и в качестве "компенсации" приходится рассматривать понятие *максимального по включению* решения.

Приведем еще один вариант эволюционного уравнения, описывающего динамику выживающих трубок $X[t] = X(t, t_0, X_0)$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h \left(X[t + \sigma], \bigcup_{x \in X[t]} (x + \sigma \mathcal{F}(t, x)) \cap Y(t + \sigma) \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$X[t_0] = X_0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1). \quad (2.6)$$

Следующая теорема доказана в [13, 8] при достаточно жестких предположениях относительно функций $\mathcal{F}(t, x)$ и $Y(t)$, включающих, однако, рассматриваемый билинейный случай.

Теорема 2.2. *Многозначная функция $X[t] = X(t, t_0, X_0)$ есть единственное решение уравнения (2.5)–(2.6).*

Отметим, что соответствующие аналоги последнего уравнения в терминах полурасстояний h^+ и h^- можно найти в [15, 14].

3. Билинейные динамические системы

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \mathcal{A}(t)x + P(t), \quad x(t_0) = x_0 \in X_0, \quad (3.1)$$

при ограничениях

$$x(t) \in Y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где правая часть $\mathcal{F}(t, x) = \mathcal{A}(t)x + P(t)$ является билинейной функцией относительно пары переменных, фазового вектора x и многозначного отображения \mathcal{A} .

Предположим, что отображение $\mathcal{A}(\cdot)$ непрерывно на $[t_0, t_1]$, со значениями во множестве $\text{Conv } \mathbb{R}^n$ выпуклых и компактных подмножеств пространства \mathbb{R}^n всех $n \times n$ -матриц.

Включение (3.1) моделирует неопределенную динамическую систему с априори неизвестной матрицей, для которой дано лишь описание в терминах включений: $A(t) \in \mathcal{A}(t)$, $h(t) \in P(t)$ и $x_0 \in X_0$ [13].

Нетрудно показать, что множества $\mathcal{X}[t] = \mathcal{X}(t, t_0, X_0)$ (а также $X[t] = X(t, t_0, X_0)$) могут оказаться невыпуклыми для таких "почти линейных" дифференциальных систем (см. примеры в [8]). Однако при подходящих предположениях эти множества обладают другими геометрическими характеристиками.

Напомним следующее определение.

Определение 3.1. *Множество $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ называется звездным (с центром c), если $c + \lambda(Z - c) \subseteq Z$ для всех $\lambda \in [0, 1]$.*

Множество всех звездных компактных подмножеств $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ с центром c обозначим символом $\text{St}(c, \mathbb{R}^n)$ и с центром в начале координат $0 \in \mathbb{R}^n$ – символом $\text{St}(\mathbb{R}^n)$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

Предположение 3.1.

(i) *При всех $t \in [t_0, t_1]$ справедливо включение $0 \in P(t)$.*

(ii) *Существует $\epsilon > 0$ такое, что*

$$\epsilon S \subseteq Y(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

(iii) *Верно включение $0 \in X_0$.*

Справедливо следующее свойство [13].

Теорема 3.1. В предположении 3.1 t -сечения $\mathcal{X}[t]$, $X[t]$ являются звездными и компактными множествами при всех $t \in T$ ($\mathcal{X}[t]$, $X[t] \in \text{St}(\mathbb{R}^n)$).

Для рассматриваемой билинейной системы можно уточнить формулировки теорем 2.1, 2.2 предыдущего раздела.

Введем предварительно обозначение:

$$\mathcal{M} * X = \{z \in \mathbb{R}^n : z = Mx, M \in \mathcal{M}, x \in X\},$$

где $\mathcal{M} \in \text{Conv } \mathfrak{R}^n$, $X \in \text{Conv } \mathbb{R}^n$.

Тогда эволюционное уравнение, описывающее динамику звездных траекторных трубок, приобретает вид, указанный ниже.

Теорема 3.2. Выживающая трубка $X[t] = X(t, t_0, X_0)$ билинейного дифференциального включения (3.1) является единственным решением эволюционного уравнения

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h(X[t + \sigma], ((I + \sigma \mathcal{A}(t)) * X[t] + \sigma P(t)) \cap Y(t + \sigma)) = 0 \quad (3.2)$$

с начальным условием

$$X[t_0] = X_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

4. Оценки многозначных состояний: функция Минковского

Рассмотрим специальный класс билинейных динамических систем вида (3.1), где при каждом t значениями $\mathcal{A}(t)$ многозначной функции \mathcal{A} являются множества всех диагональных $n \times n$ матриц $A(t)$ с неизвестными, но ограниченными диагональными элементами $a_{ii}(t)$:

$$\mathcal{A}(t) = \{A(t) : a_{ij} = 0 \text{ для } i \neq j, a_i = a_{ii}, a = (a_1, \dots, a_n) \in A_0\}.$$

Здесь $A_0 \in \text{St}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, как и ранее, что начальное множество X_0 лежит в пространстве $\text{St}(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим задачу построения аппроксимации первого порядка для многозначной функции $X[t]$ на основе эволюционного уравнения (3.2), при этом положим $Y(t) = \mathbb{R}^n$ (фазовые ограничения отсутствуют). Отметим, что возможные вычислительные процедуры, основанные на использовании данного уравнения и ориентированные на точное или приближенное построение искомым многозначных состояний $X[t]$, имеют итерационный характер и близки известному методу Эйлера численного решения дифференциальных уравнений. Поэтому представляется важным иметь эффективные алгоритмы обработки каждого шага итерации. Данная задача и решается здесь для множеств ограничений достаточно простой структуры.

Итак, рассмотрим первый шаг аппроксимации первого порядка (для достаточно малых моментов σ). Тогда из теоремы 3.2 имеем ($t = t_0 + \sigma$)

$$h(X[t], ((I + \sigma A_0) * X_0 + \sigma P)) = o(\sigma), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} o(\sigma) = 0,$$

где $A_0 = A(t_0)$ и $P = P(t_0)$.

Для каждого множества $M \in \text{St}(\mathbb{R}^n)$ символом $h_M(z)$ будем обозначать функцию Минковского ($z \in \mathbb{R}^n$):

$$h_M(z) = \inf\{t > 0 : z \in tM\}.$$

Наша основная цель состоит в том, чтобы вычислить функцию Минковского для множества $X[t]$ или для его аппроксимации $((I + \sigma A_0) * X_0 + \sigma P)$, но мы разобьем решение на два более простых этапа, позволяющих построить оценку сверху по включению для указанной аппроксимации.

Вначале найдем функцию Минковского для множества $A_0 * X_0$ и затем получим формулу для вычисления функции Минковского для алгебраической суммы множеств.

Отметим следующие общие свойства функций Минковского.

Лемма 4.1. Пусть $M \in \text{St}(\mathbb{R}^n)$ и для некоторого $\epsilon > 0 \in S \subset M$. Тогда функция $h_M(z)$ является положительно однородной и $h_M(0) = 0$.

Будем считать в дальнейшем, что выполнено предположение 3.1.

Пусть символ $\rho(l|C)$ означает опорную функцию выпуклого компактного множества $C \in \text{Conv } \mathbb{R}^n$, вычисленную на элементе $l \in \mathbb{R}^n$,

$$\rho(l|C) = \max\{(l, c) : c \in C\}$$

(здесь $(l, c) = l'c$ означает скалярное произведение в \mathbb{R}^n).

Непосредственно из определения функции Минковского и с учетом предположения 3.1 нетрудно получить следующий результат.

Лемма 4.2. Для любого $z \in \mathbb{R}^n$ такого, что $z_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$), справедлива формула

$$h_{A_0 * X_0}(z) = \min \left\{ \max_{l \neq 0} \frac{\sum_{i=1}^n l_i z_i a_i^{-1}}{\rho(l|X_0)} : a \in A_0, a_i \neq 0 (i = 1, \dots, n) \right\}. \quad (4.1)$$

Пример 4.1. Предположим, в частности, что множества A_0, X_0 имеют следующий простой вид:

$$A_0 = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq 1 \right\},$$

$$X_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq 1 \right\},$$

т.е. являются единичными шарами в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

Тогда вычисления по формуле (4.1) (с использованием техники множителей Лагранжа) приводят к результату:

$$h_{A_0 * X_0}(z) = \sum_{i=1}^n |z_i|, \quad (4.2)$$

причем в силу леммы 4.1 формула (4.2) остается справедливой при всех $z \in \mathbb{R}^n$, и следовательно,

$$A_0 * X_0 = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |z_i| \leq 1 \right\}. \quad (4.3)$$

Имеет место и более общий результат.

Теорема 4.1. Пусть

$$A_0 = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |a_i|^p \leq 1 \right\},$$

$$X_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i|^q \leq 1 \right\}.$$

($p, q > 0$). Тогда

$$h_{A_0 * X_0}(z) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}, \quad r = \frac{pq}{p+q}.$$

Доказательство. Указанные в теореме формулы получаются прямым вычислением в результате вспомогательной замены $b_i = |a_i|^{p/2}$, $y_i = |x_i|^{q/2}$ и из равенства (4.2).

Пример 4.2. Рассмотрим случай $p = q = 1$. Тогда из теоремы 4.1 сразу же получаем

$$A_0 * X_0 = S_{\frac{1}{2}} = \left\{ z : \sum_{i=1}^n |z_i|^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\}.$$

Таким образом, множество $A_0 * X_0$ уже теряет свойство выпуклости, оставаясь звездным. Причем отсутствие выпуклости произведения может наблюдаться и при равномерно выпуклых исходных множествах, при $p, q > 1$, если только $(p^{-1} + q^{-1}) > 1$.

Верхняя по включению оценка шага аппроксимации $X[t]$ следует из соотношения:

$$X[t] \subset (X_0 + \sigma A_0 * X_0 + \sigma P) + o(\sigma)S$$

и из "конволюционной" формулы для вычисления функции Минковского алгебраической суммы звездных множеств, приведенной в следующей теореме.

Теорема 4.2. Пусть A, B – некоторые множества из $St(\mathbb{R}^n)$, причем для некоторого $\epsilon > 0$ $\epsilon S \subset A \cap B$. Тогда

$$h_{A+B} = \min_{z_*} \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha h_A(z_*) + (1 - \alpha) h_B(z - z_*) \}. \quad (4.4)$$

Доказательство. Отметим, что из предположений теоремы вытекает достижимость минимума в формуле (4.4). Зафиксируем произвольный вектор $z \in \mathbb{R}^n$ и положим

$$\begin{aligned} T &= \min_{z_*} \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha h_A(z_*) + (1 - \alpha) h_B(z - z_*) \} = \\ &= \min_{z_*} \max \{ h_A(z_*), h_B(z - z_*) \}. \end{aligned}$$

Тогда существует z_* такой, что одновременно выполняются два неравенства: $T \geq h_A(z_*)$ и $T \geq h_B(z - z_*)$. Отсюда получаем

$$z_* \in TA, \quad (z - z_*) \in TB.$$

Но тогда $z = z_* + (z - z_*) \in T(A + B)$ и, следовательно, $h_{A+B}(z) \leq T$.

Обратно, пусть для некоторого числа $t > 0$ выполнено включение $z \in t(A + B)$. Тогда $t^{-1}z \in (A + B)$ и найдутся элементы $z_1 \in A$, $z_2 \in B$ такие, что $t^{-1}z = z_1 + z_2$, причем $h_A(z_1) \leq 1$, $h_B(z_2) \leq 1$. Обозначим $z_* = tz_1$ (а тогда $tz_2 = z - z_*$) и получим снова два неравенства

$$h_A(z_*) \leq 1, \quad h_B(z - z_*) \leq 1,$$

которые должны быть выполнены одновременно. Поэтому

$$\max \{ h_A(z_*), h_B(z - z_*) \} \leq t,$$

откуда получаем

$$\min_{z_*} \max \{ h_A(z_*), h_B(z - z_*) \} \leq t.$$

Но тогда и для точной нижней грани $h_{A+B}(z)$ чисел t выполнено аналогичное неравенство, что и требовалось доказать.

Приведем еще один вариант теоремы 4.1 для эллипсоидальных множеств ограничений A_0, X_0 .

Теорема 4.3. Пусть

$$A_0 = \{ a \in \mathbb{R}^n : (a, Ma) \leq 1 \},$$

$$X_0 = \{ x \in \mathbb{R}^n : (x, Nx) \leq 1 \},$$

где M, N симметричные положительно определенные матрицы. Тогда имеет место формула

$$h_{A_0 * X_0}(z) = \| N^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} z \|_{l_1},$$

что эквивалентно соотношению

$$A_0 * X_0 = N^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} S_1,$$

где S_1 единичный шар (с центром в 0) в \mathbb{R}^n относительно l_1 -нормы.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.

Пример 4.3. Пусть $n = 2$ и множества A_0, X_0 имеют вид:

$$A_0 = \{a \in \mathbb{R}^2 : |a_1| + |a_2| \leq 1\},$$

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}.$$

Тогда

$$A_0 * X_0 = \{z \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|} \leq 1\}.$$

Вычислив функцию Минковского суммы множеств $X_0 + A_0 * X_0$, получим равенство

$$X_0 + A_0 * X_0 = 2X_0 = 2S_1,$$

причем при значениях $0 < \sigma \leq 1$ верна подобная формула

$$X_0 + \sigma A_0 * X_0 = (1 + \sigma)X_0 = (1 + \sigma)S_1.$$

При $\sigma > 1$ нетрудно показать, что свойство выпуклости теряется. Аналогично, не будет выпуклым и множество $(I + \sigma A_0) * X_0$. Действительно, точки $z_* = (1 + \sigma, 0)$ и $z_{**} = (0, 1 + \sigma)$ принадлежат всем трем множествам, связанным цепочкой включений

$$(I + \sigma A_0) * X_0 \subset (X_0 + \sigma A_0 * X_0) \subset (1 + \sigma)S_1,$$

однако выпуклая комбинация $(z_* + z_{**})/2$ лежит лишь в последнем из них. Заметим, что для пространства размерности $n > 2$ множество $S_1 + A_1 * S_1$ отлично от $2S_1$ и более того, невыпукло и звездно.

Отметим в заключение, что полученные оценки могут быть использованы при построении итерационных процедур при компьютерном моделировании на основе дискретных версий эволюционных уравнений типа уравнений интегральной воронки. Хотя предлагаемые множества дают оценки сверху аппроксимаций траекторных трубок, однако даже при помощи таких "грубых" операций удастся проанализировать нелинейные эффекты, такие как отсутствие выпуклости множеств достижимости неопределенных систем, и тем не менее приближенно описать границы указанных множеств.

Отметим, наконец, что использование внешних аппроксимаций многозначных функций $X[t]$ позволяет связать данный подход с техникой исчисления многозначных оценок, построенных на основе эллипсоидов или многогранников ([15, 16, 20]).

Поступила 27.06.2000

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Наука, 1988.
- [2] Aubin J.-P. Viability Theory. Boston: Birkhäuser, 1991.
- [3] Aubin J.-P. and Frankowska H. Set-Valued Analysis. Boston: Birkhäuser. 1990.
- [4] Варбашин Е. А. К теории обобщенных динамических систем // Уч. зап. Московского ун-та. Математика, 1948. 135. С.110-133.

- [5] **Castaing C., Valadier M.** Convex Analysis and Measurable Multifunctions // Lect. Notes Math. 1977. Vol. 580.
- [6] **Dontchev A. L., Lempio F.** Difference methods for differential inclusions: a survey // SIAM Review, 1992. Vol. 34. P. 263-294.
- [7] **Филиппов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [8] **Filippova T. F.** A note on the evolution property of the assembly of viable solution to a differential inclusion // Comput. Math. Appl. 1993. Vol. 25. P. 115-121.
- [9] **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1986.
- [10] **Krasovskii N. N., Subbotin A. I.** Positional Differential Games. Berlin etc: Springer-Verlag, 1988.
- [11] **Куржанский А. В.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 365 с.
- [12] **Kurzhanski A. B.** Identification: A Theory of Guaranteed Estimates // From Data to Model. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
- [13] **Kurzhanski A. B., Filippova T. F.** On the theory of trajectory tubes – a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia / A.B. Kurzhanski, ed. Boston etc.: Birkhäuser, 1993. P. 122-188. (Progress in Systems and Control Theory: 17).
- [14] **Kurzhanski A. B., Nikonov O. I.** On the control strategy synthesis problem. Evolution equations and set-valued integration // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 311. 1990. P. 788-793.
- [15] **Kurzhanski A. B. and Valyi I.** Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [16] **Черноусько Ф.Л.**, Оценивание фазового состояния динамических систем. М: Наука, 1988
- [17] **Roxin E.** On the generalized dynamical systems defined by contingent equations // J. Different. Equations. Vol. 1. 1965. P. 188-205.
- [18] **Walter E., Pronzato L.** Identification of Parametric Models from Experimental Data. London: Spriger, 1997. (Commun. and Control Eng. Ser.)
- [19] **Filippova T. F.** Second order approximations for viable solution tubes of a differential inclusion. // Proc. World Congress IMACS'97. Berlin, 1997. V. 1. P. 681-686.
- [20] **Koustousova E. K., Kurzhanski A. B.** Theoretical Framework and Approximation Techniques for Parallel Computation in Set-Membership State Estimation. // CESA'96 IMACS Multiconf. Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, July 9-12, 1996. Symposium on Modelling, Analysis and Simulation: Proc. V. 2. P. 849-854.
- [21] **Filippova T. F., Kurzhanski A. B., Sugimoto K., Valyi I.** Ellipsoidal Calculus, Singular Perturbations and State Estimation Problem for Uncertain Systems // Bounding Approaches to System Identification / M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, E. Walter eds. New York etc: Plenum Press, 1995.
- [22] **Baras J. S., Kurzhanski A. B.** Nonlinear Filtering: The Set-Membership (Bounding) and the H_∞ Approaches // Proc. IFAC NOLCOS Conf., Tahoe, CA. New York etc: Plenum press, 1995.